

Ю.М.Стреляєв<sup>1</sup>, Р.М.Мартиняк<sup>2</sup>

**ЧАСТКОВЕ ПРОКОВЗУВАННЯ ПРИ ТЕРМОМЕХАНІЧНОМУ КОНТАКТІ  
ПЛОСКОГО ШТАМПУ ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ**

<sup>1</sup> Запорізький інститут економіки та інформаційних технологій,  
вул. Кияшка, 16-Б, 69041, Запоріжжя, Україна; e-mail: strelkinu@gmail.com

<sup>2</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: mrostyslav@gmail.com

**Abstract.** A numerical solution of the problem of frictional thermomechanical contact of a rigid cylindrical punch with a plane bottom and elastic half-space is obtained. We used Coulomb's law to take into account friction. This problem is reduced to the systems of non-linear boundary integral equations. A discretization of integral equations and iterative process are used to obtain a numerical solution of these systems. The partial slip that occurs on the contact surface due to friction and thermal expansion of bodies is studied. The dependence of the distributions of the normal and tangential contact stresses and the configuration of stick and slip zones on the heating temperature is studied for two possible cases of the relationship between the coefficients of thermal expansion of bodies.

**Key words:** contact mechanics, friction, plane punch, thermal expansion, stick-slip, contact stresses, integral equation, numerical solution, iterative method.

**Вступ.**

Трибологічні елементи різноманітних технічних, природних і біологічних структур часто контактують в режимі часткового проковзування, який реалізується за умови, що прикладена до взаємно притиснутих тіл тангенціальна сила недостатня для ковзання одного з них по іншому. Тоді на периферії ділянки контакту тіл виникає зона проковзування з тертям, а на центральній частині ділянки контакту поверхні перебувають у зчепленні. Зі збільшенням тангенціальної сили зона зчеплення зменшується, а зона проковзування збільшується. Коли ділянка проковзування охоплює всю область контакту, відбувається перехід до глобального ковзання тіл, за якого на всій поверхні контакту діють сили тертя. В загальному випадку конфігурація зон зчеплення і проковзування та розподіл контактних напружень на них заздалегідь невідомі і залежать від геометрії тіл, їхніх механічних характеристик, величини та історії навантаження, фрикційних характеристик спряжених поверхонь.

Зростання прикладного інтересу до контактних задач зі зчепленням і проковзуванням в останні десятиліття значною мірою пов'язане з явищами фретингу (fretting) [10] (зокрема, з фретинг-втомою і фретинг-зношуванням), зумовленими контактним мікро-проковзуванням у вузлах і з'єднаннях за змінного навантаження. Ці явища можуть мати критичний вплив на функціонування, міцність і надійність важливих інженерних систем і біомедичних пристроїв [10, 29], в тому числі – аерокосмічні газотурбінні двигуни, підшипники кочення, атомні енергетичні системи, електричні роз'єми і провідники, штучні суглоби, тощо. Багато сучасних технічних систем працюють за підвищеної температури, яка може істотно впливати на фретинг-втому і фретинг-зношування фрикційних з'єднань [25]. Тому моделювання і дослідження контактної

поведінки тіл з урахування часткового фрикційного проковзування, зумовленого одночасною дією силових і термічних навантажень, є актуальною проблемою контактної механіки.

Перші теоретичні дослідження часткового проковзування тіл за механічного навантаження здійснили Каттанео (Cattaneo) [7] і Міндлін (Mindlin) [22]. Вони розглянули осесиметричний контакт пружно ідентичних тіл геометрії Герца, коли початковий зазор між ними заданий квадратичною функцією, за дії постійної нормальної сили стиску та монотонно зростаючої від нуля горизонтальної сили. Було обґрунтовано виникнення на ділянці контакту двох зон – зчеплення і проковзування, та запропоновано ефективний підхід для визначення радіуса зони зчеплення і розподілу дотичних контактних напружень на ній, використовуючи закон тертя Амонтона – Кулона. Підхід Каттанео – Міндіна був узагальнений [5] на контакт тіл довільної геометрії за плоскої деформації.

Коли взаємодіють тіла з неідентичних матеріалів, нормальні й дотичні контактні напруження взаємозв'язані та одночасно впливають на розміри ділянок контакту, зчеплення і проковзування поверхонь. Для таких контактних пар часткове проковзування виникає навіть за відсутності тангенціального навантаження, коли на них діє лише нормальне. Плоскі та осесиметричні задачі з частковим проковзуванням тіл з неідентичних матеріалів розглядалися у працях [23, 30].

Огляди публікацій про взаємодію механічно навантажених тіл з частковим проковзуванням кінця минулого століття і перших двох декад цього століття наведені в монографіях [3, 12, 15] та оглядових статтях [5, 11, 13, 16]. Сучасні тенденції в цій галузі пов'язані з актуальними запитами техніки на розроблення моделей і методів дослідження фретинг-контакту тіл з урахуванням шорсткості поверхонь [6], шаруватості й функціональної градієнтності матеріалів [28] та адгезії поверхонь [4].

Термічні деформації з'єднань, що функціонують за високих температур, зумовлюють зміну області контакту і перерозподіл контактного тиску. Переважну більшість контактних задач термопружності розглянуто в літературі за виконання на всій ділянці спряження тіл умов гладкого контакту або повного зчеплення поверхонь [14, 17, 18, 19, 21]. Значно менше праць присвячено вивченню часткового термомеханічного проковзування тіл. Так, у [24] було досліджено часткове проковзування між жорстким штампом і пружним півпростором, зумовлене нагріванням штампа. Вивчено [20] термопружний контакт зі зчепленням і проковзуванням двох півпросторів, один з яких має поверхневу виїмку, за теплового потоку через інтерфейс. Досліджено [8] часткове проковзування тіл з регулярним рельєфом за термічної ізоляції або термічної провідності міжконтактних зазорів. У перелічених публікаціях [8, 20, 24] розглянуто плоскі контактні задачі термопружності. В праці [26] розв'язано осесиметричну задачу про часткове проковзування сфери і півпростору з однакових матеріалів за нагріву півпростору до сталої температури.

У цій статті досліджено часткове проковзування з тертям між спряженими поверхнями жорсткого циліндричного штампу з плоскою основою та пружного півпростору, яке виникає в результаті дії спочатку навантаження стиску, а потім – рівномірного нагріву тіл. Розподіли нормальних і дотичних контактних зусиль та конфігурації ділянок зчеплення вивчені для двох можливих випадків співвідношення між коефіцієнтами теплового розширення тіл.

### **§1. Формулювання контактної задачі.**

Розглянемо контактну задачу про взаємодію жорсткого циліндричного штампу з плоскою основою радіуса  $R$  та пружного півпростору, що характеризується модулем Юнга  $E$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ . Початкова температура тіл дорівнює нулю. Навантаження тіл відбувається послідовно, за два етапи. Спочатку штамп набуває нормального осідання  $\Delta > 0$ . Потім, за фіксованого осідання штампа  $\Delta$ , відбувається рівномірне нагрівання тіл до температури  $T$ , яке супроводжується їх тепловим розширенням. Коефіцієнти лінійного теплового розширення штампу  $\alpha_1$  та півпростору

$\alpha_2$  вважаємо різними. Відносні горизонтальні переміщення точок спряжених поверхонь, зумовлені тепловим розширенням тіл та пружними деформаціями півпростору, частково стримуються тертям Кулона [16].

Розглянемо задачу у тривимірній постановці. Введемо декартову систему координат  $Oxyz$  так, щоб пружний півпростір займав область  $z \leq 0$ , а початок координат збігався з центром основи штампу, яка в ненавантаженому стані лежить у площині  $z = 0$  (рис. 1).

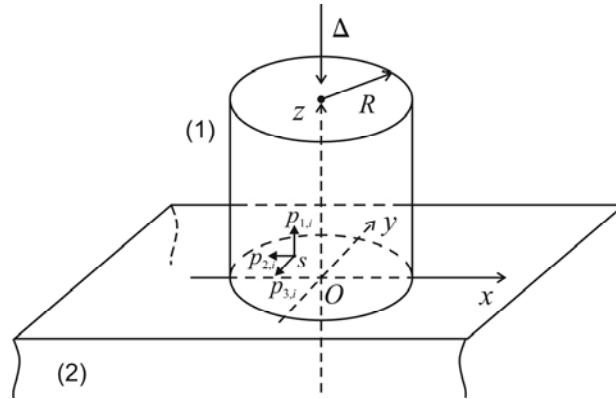


Рис. 1

Крайові умови контактної взаємодії тіл на кожному з двох етапів навантаження можна виразити системою рівнянь і нерівностей, що виконуються в кожній точці  $s = (x, y)$  обмеженої області  $\Omega$ , яка лежить у площині  $z = 0$  і містить область контакту  $\Omega_0$  [2].

$$v_{1,i}(s) \geq 0; \quad (1.1)$$

$$p_{1,i}(s) \geq 0; \quad (1.2)$$

$$v_{1,i}(s)p_{1,i}(s) = 0; \quad (1.3)$$

$$\sqrt{p_{2,i}^2(s) + p_{3,i}^2(s)} \leq \mu p_{1,i}(s); \quad (1.4)$$

$$p_{2,i}(s)\sqrt{v_{2,i}^2(s) + v_{3,i}^2(s)} + \mu p_{1,i}(s)v_{2,i}(s) = 0; \quad (1.5)$$

$$p_{3,i}(s)\sqrt{v_{2,i}^2(s) + v_{3,i}^2(s)} + \mu p_{1,i}(s)v_{3,i}(s) = 0, \quad (1.6)$$

де:  $i = 1$  відповідає першому (механічному) етапу навантаження,  $i = 2$  – другому (термічному) етапу навантаження;  $v_{1,i}(s)$  – функція зазору між тілами;  $p_{1,i}(s)$  – контактний тиск, що діє на основу штамп;  $p_{2,i}(s)$ ,  $p_{3,i}(s)$  – питомі дотичні контактні зусилля, що діють на поверхню основи штамп;  $\mu$  – коефіцієнт тертя;  $v_{2,i}(s)$ ,  $v_{3,i}(s)$  – прирости дотичних переміщень поверхні штамп відносно поверхні півпростору.

Позначимо через  $u_{1,i}(s)$ ,  $u_{2,i}(s)$ ,  $u_{3,i}(s)$  пружні переміщення точок поверхні півпростору у напрямках координатних осей  $z$ ,  $x$ ,  $y$ , відповідно.

На етапі механічного навантаження ( $i = 1$ ) функції  $v_{1,1}(s)$ ,  $v_{2,1}(s)$ ,  $v_{3,1}(s)$  визначимо співвідношеннями:

$$v_{1,1}(s) = g_0(s) - \Delta - u_{1,1}(s); \quad (1.7)$$

$$v_{2,1}(s) = -u_{2,1}(s); \quad (1.8)$$

$$v_{3,1}(s) = -u_{3,1}(s). \quad (1.9)$$

Функція  $g_0(s)$ , яка входить в формулу (1.7), визначає початковий зазор між тілами і у випадку кругового штампа з плоскою основою має вигляд:

$$g_0 v_{3,2}(s) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x^2 + y^2 \leq R^2, \\ A, & \text{якщо } x^2 + y^2 > R^2, \end{cases}$$

де  $A$  – довільне додатне число, більше за  $\Delta$ . Зокрема, у праці [9] це число було обрано рівним нескінченності.

За термічного навантаження на другому етапі ( $i = 2$ ), внаслідок різних коефіцієнтів лінійного теплового розширення штампа  $\alpha_1$  та півпростору  $\alpha_2$ , виникають додаткові відносні дотичні переміщення спряжених поверхонь. Для функцій  $v_{1,2}(s)$ ,  $v_{2,2}(s)$ ,  $v_{3,2}(s)$  на цьому етапі отримаємо співвідношення:

$$v_{1,2}(s) = g_0(s) - \Delta - u_{1,2}(s); \quad (1.10)$$

$$v_{2,2}(s) = (\alpha_1 - \alpha_2)xT - u_{2,2}(s) + u_{2,1}(s); \quad (1.11)$$

$$v_{3,2}(s) = (\alpha_1 - \alpha_2)yT - u_{3,2}(s) + u_{3,1}(s). \quad (1.12)$$

Перший доданок у правій частині рівнянь (1.11) і (1.12) описує різницю вільних горизонтальних переміщень поверхонь штампа і півпростору, зумовлених нагрівом за відсутності контакту тіл.

Слід зазначити, що на першому етапі механічного навантажування ( $i = 1$ ) функції  $v_{2,i}(s)$ ,  $v_{3,i}(s)$  визначають переміщення поверхні штампа відносно поверхні півпростору, а на другому етапі ( $i = 2$ ) – прирости цих переміщень, зумовлені тепловим розширенням тіл.

Виконання умов (1.1) – (1.6) на кожному етапі навантаження має наступний фізичний зміст. Умова (1.1) означає невід'ємність зазору між тілами (тіла не можуть проникати один в одного), умова (1.2) означає невід'ємність контактної тиску (нормальні контактні напруження не можуть бути розтягувальними), умова (1.3) означає відсутність контактної тиску поза ділянкою контакту і відсутність зазору в межах цієї ділянки. Умови (1.4) – (1.6) виражають закон тертя Кулона. Умова (1.4) означає, що у кожній точці області  $\Omega$  модуль дотичних зусиль не перевищує добутку коефіцієнта тертя  $\mu$  на контактний тиск. Умови (1.5) та (1.6) означають, що для всіх точок області  $\Omega$ , в яких відбувається проковзування, виконується рівність  $|\vec{q}_i| = \mu p_{1,i}(s)$ , причому вектор дотичного зусилля  $\vec{q}_i = (p_{2,i}(s), p_{3,i}(s))$  і вектор відносного проковзування спряжених поверхонь  $\vec{v}_{\tau,i} = (v_{2,i}(s), v_{3,i}(s))$  у кожній точці  $s \in \Omega$  на кожному  $i$ -му етапі навантаження мають протилежні напрямки.

Зв'язок пружних переміщень  $u_{1,i}(s)$ ,  $u_{2,i}(s)$ ,  $u_{3,i}(s)$  з компонентами вектора питомого контактної навантаження  $\vec{p}_i = (p_{1,i}(s), p_{2,i}(s), p_{3,i}(s))$  встановлюється формулами

$$u_{m,i}(s) = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} K_{mj}(s, s') p_{j,i}(s') ds', \quad (1.13)$$

в яких функції  $K_{mj}(s, s')$  визначаються розв'язком Буссінеска – Черутті [15].

Отже, контактна задача зводиться до визначення на кожному етапі навантажування ( $i=1,2$ ) невідомих компонентів  $p_{1,i}(s)$ ,  $p_{2,i}(s)$ ,  $p_{3,i}(s)$  вектора питомого контактної навантаження, що для всіх  $s \in \Omega$  задовольняють систему співвідношень (1.1) – (1.6), в яких функції  $v_{1,i}(s)$ ,  $v_{2,i}(s)$ ,  $v_{3,i}(s)$  визначають співвідношення (1.7) – (1.12) з урахуванням (1.13). Зони зчеплення і проковзування визначимо з умов  $|\bar{q}_i| < \mu p_{1,i}(s)$  і  $|\bar{q}_i| = \mu p_{1,i}(s)$ , відповідно.

## §2. Інтегральні рівняння контактної задачі.

Для отримання інтегральних рівнянь, що моделюють контактну взаємодію тіл на першому та другому етапах навантаження, скористаємося підходом, запропонованим в роботах [1, 2].

Відповідно до цього підходу систему (1.1) – (1.6) зведемо до системи нелінійних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} p_{1,i}(s) &= h\left(p_{1,i}(s) - \tilde{E}v_{1,i}(s)\right); \\ p_{2,i}(s) &= q\left(p_{2,i}(s) - \tilde{E}v_{2,i}(s), p_{3,i}(s) - \tilde{E}v_{3,i}(s), \mu p_{1,i}(s)\right); \\ p_{3,i}(s) &= q\left(p_{3,i}(s) - \tilde{E}v_{3,i}(s), p_{2,i}(s) - \tilde{E}v_{2,i}(s), \mu p_{1,i}(s)\right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де  $\tilde{E}$  – довільне додатне число, а дійсні функції  $h$  і  $q$  мають такий вигляд:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0; \end{cases} \quad q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \\ \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}$$

Для числового розв'язання системи інтегральних рівнянь (2.1) застосуємо метод, що запропонований у роботі [1]. Цей метод включає дискретизацію інтегральних рівнянь (2.1) та використання ітераційного процесу для отримання наближеного розв'язку дискретних аналогів цих рівнянь.

## §3. Алгоритм числового розв'язання.

Нехай область  $\Omega$  – квадрат зі сторонами, паралельними до осей  $x, y$ . Розіб'ємо цю область на  $n^2$  однакових квадратів  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n^2}$ , орієнтованих подібно  $\Omega$ . Вважатимемо, що на кожному квадраті  $\omega_k$  невідомі функції  $p_{1,i}(s)$ ,  $p_{2,i}(s)$ ,  $p_{3,i}(s)$  набувають сталих значень  $x_{3k-2,i}$ ,  $x_{3k-1,i}$ ,  $x_{3k,i}$ . Тоді за фіксованого  $i$  система інтегральних рівнянь (2.1) зводиться до системи  $3n^2$  нелінійних скалярних рівнянь:

$$\begin{aligned} x_{3k-2,i} &= h\left(x_{3k-2,i} - \tilde{E}\left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2,j} x_{j,i} - b_{3k-2,i}\right)\right); \\ x_{3k-1,i} &= q\left(x_{3k-1,i} - \tilde{E}\left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1,j} x_{j,i} - b_{3k-1,i}\right), x_{3k,i} - \tilde{E}\left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k,j} x_{j,i} - b_{3k,i}\right), \mu x_{3k-2,i}\right); \\ x_{3k,i} &= q\left(x_{3k,i} - \tilde{E}\left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k,j} x_{j,i} - b_{3k,i}\right), x_{3k-1,i} - \tilde{E}\left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1,j} x_{j,i} - b_{3k-1,i}\right), \mu x_{3k-2,i}\right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

У цій системі числові параметри  $a_{k,i}$  є елементами матриці податливості півпростору, а  $b_{k,i}$  визначають з умов навантаження взаємодіючих тіл на  $i$ -му етапі навантаження [2].

Для наближеного розв'язання системи рівнянь (3.1) використовуватимемо ітераційний процес, заснований на методі простої ітерації:

$$\begin{aligned} & \left( x_{1,i}^{(0)}, x_{2,i}^{(0)}, \dots, x_{3n^2,i}^{(0)} \right) \in R^{3n^2} \left( k = 1, n^2, m = 0, 1, 2, \dots \right); \\ & x_{3k-2,i}^{(m+1)} = h \left( x_{3k-2,i}^{(m)} - \tilde{E} \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2,j} x_{j,i}^{(m)} - b_{3k-2,i} \right) \right); \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$x_{3k-1,i}^{(m+1)} = q \left( x_{3k-1,i}^{(m)} - \tilde{E} \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1,j} x_{j,i}^{(m)} - b_{3k-1,i} \right), x_{3k,i}^{(m)} - \tilde{E} \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k,j} x_{j,i}^{(m)} - b_{3k,i} \right), \mu x_{3k-2,i}^{(m)} \right);$$

$$x_{3k,i}^{(m+1)} = q \left( x_{3k,i}^{(m)} - \tilde{E} \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k,j} x_{j,i}^{(m)} - b_{3k,i} \right), x_{3k-1,i}^{(m)} - \tilde{E} \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1,j} x_{j,i}^{(m)} - b_{3k-1,i} \right), \mu x_{3k-2,i}^{(m)} \right).$$

Слід зазначити, що в ітераційному процесі (3.2) при  $i = 2$  (етап термічного навантаження) за початковий вектор  $(x_{1,2}^{(0)}, x_{2,2}^{(0)}, \dots, x_{3n^2,2}^{(0)})$  природно обрати наближений розв'язок системи (3.1) при  $i = 1$ , який відповідає етапу механічного навантаження.

#### §4. Числові результати та їх аналіз.

Числові розрахунки на кожному етапі навантаження виконано для коефіцієнта тертя  $\mu = 0,25$ , коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0,3$  та безрозмірних величин:

$$\bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{y} = \frac{y}{R}; \quad \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{R(1-\nu^2)p_1(s)}{2E\Delta}; \quad \bar{q}_x(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{R(1-\nu^2)p_2(s)}{2E\Delta};$$

$$\bar{q}_y(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{R(1-\nu^2)p_3(s)}{2E\Delta}; \quad \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{R}; \quad \bar{T} = (\alpha_1 - \alpha_2)T.$$

Числові розв'язки отримано для двох випадків. В першому – коефіцієнт лінійного теплового розширення штамп є меншим за коефіцієнт півпростору ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ), у другому – більшим ( $\alpha_1 > \alpha_2$ ).

У першому випадку відносні дотичні переміщення спряжених поверхонь, спричинені термічним навантаженням, мають однаковий напрям з відносними переміщеннями цих поверхонь, досягнутими на першому етапі механічного навантаження. У другому випадку ці переміщення мають протилежні напрямки.

Обчислення проведено для різних значень температури  $\bar{T}$  за фіксованого значення осідання штамп  $\bar{\Delta} = 5 \cdot 10^{-4}$ .

На рис. 2 зображено залежність дотичних питомих контактних зусиль  $\bar{q}_x(x, 0)$  від координати  $\bar{x}$  за різних значень температури  $\bar{T}$ . Рис. 2, а відповідає випадку  $\alpha_1 < \alpha_2$ , рис. 2, б – випадку  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Суцільні лінії, позначені  $\bar{T} = 0$  на рис. 2, відповідають першому етапу механічного навантаження.

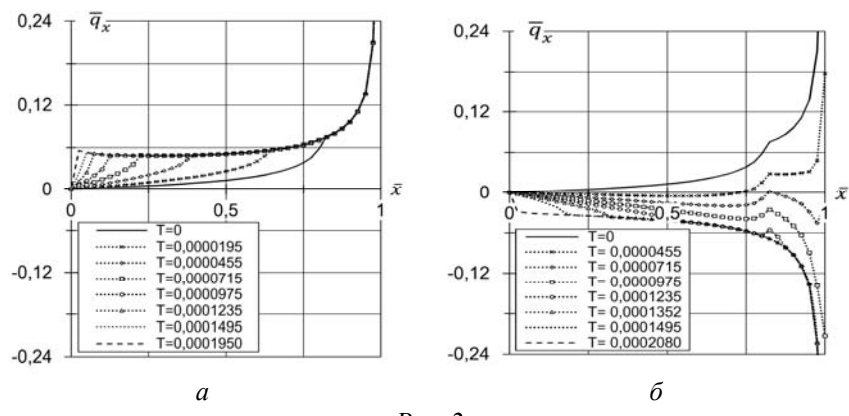


Рис. 2

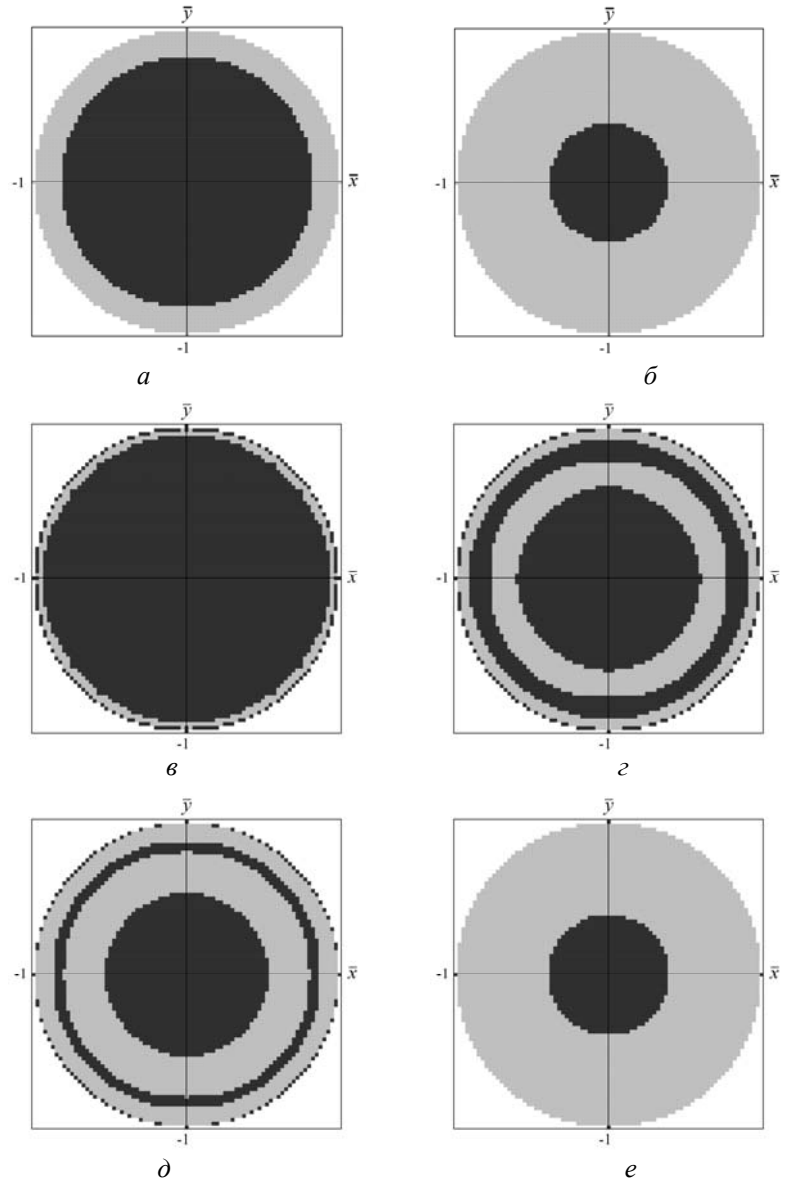


Рис. 3

На рис. 3 проілюстровано зміни конфігурацій зон зчеплення (темний колір) та проковзування (сірий) за нагрівання тіл. Рис. 3, *a* відповідає першому етапу механічного навантаження за температури  $\bar{T} = 0$ . Рис. 3, *b* відповідає температурі  $\bar{T} = 0,0000455$  у випадку  $\alpha_1 < \alpha_2$ . На рис. 3, *в, г, д, e* зображено конфігурацію зон зчеплення та проковзування у випадку  $\alpha_1 > \alpha_2$  за температур  $0,0001183$ ,  $0,0001209$ ,  $0,0001235$ ,  $0,0001300$ , відповідно.

На рис. 4 зображено залежність контактного тиску  $\bar{p}(\bar{x}, 0)$  від координати  $\bar{x}$  для значень температури  $\bar{T}$ , за якої зона проковзування охоплює всю ділянку контакту крім центрального граничного елемента сітки розбиття (штрихові лінії на рис. 4). Рис. 4, *a* відповідає випадку  $\alpha_1 < \alpha_2$ , рис. 4, *b* – випадку  $\alpha_1 > \alpha_2$ .

Тут суцільні лінії  $\mu = 0$  відповідають відомому розподілу тиску  $\bar{p} = \frac{1}{2\pi}(1 - (\bar{x})^2)^{-1/2}$  при нормальному контакті штампу та півпростору за відсутності тертя, точкові криві  $\bar{T} = 0$  – розподілу тиску на першому етапі механічного навантаження.

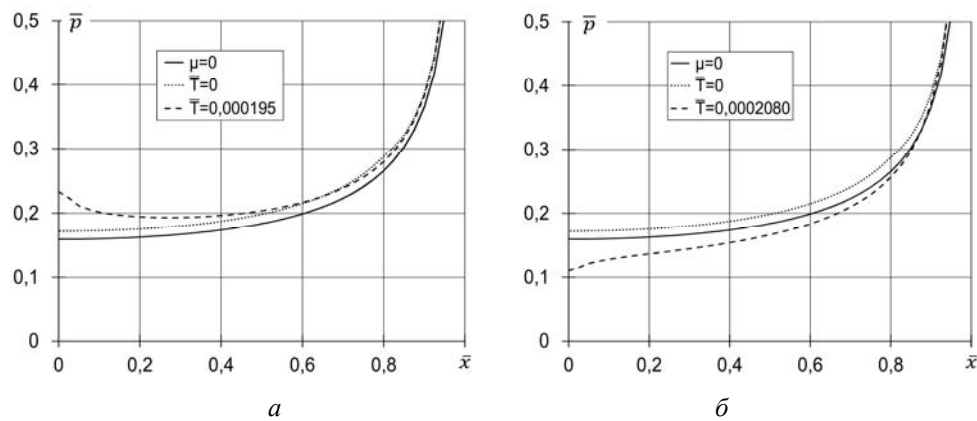


Рис. 4

Аналіз отриманих результатів свідчить, що на першому етапі механічного нормального вдавлювання штампу в півпростір в області контакту утворюється центральна кругова зона зчеплення та кільцева зона проковзування біля краю основи штамп (рис. 3, *a*). Відносний розмір зони зчеплення склав  $R_1 / R \approx 0,82$ , де  $R_1$  – радіус зони зчеплення,  $R$  – радіус основи штамп. Нормалізоване осідання штамп  $\bar{\delta} = ((ER)/P(1 + \nu)) \cdot \Delta \approx 0,3426$ , де  $P$  – нормальна сила, яка прикладена до штамп. Ці результати добре узгоджуються з відомими, наведеними у праці [3].

У випадку  $\alpha_1 < \alpha_2$  за зростання температури тіл дотичні зусилля в зоні зчеплення, що утворилася на початковому етапі механічного навантаження, збільшуються (рис. 2, *a*) і межа цієї зони зміщується до центру (рис. 3, *b*). Злами кривих дотичних зусиль на рис. 2, *a* відповідають межі зон зчеплення та проковзування.

У випадку  $\alpha_1 > \alpha_2$  розподіли дотичних зусиль в області контакту мають інший характер – за нагрівання тіл дотичні контактні зусилля поступово зменшуються в усій області контакту і з певного моменту стають від’ємними (змінюють напрямки на протилежні, рис. 2, *b*). Зазначимо, що при  $\bar{T} \in (0; 0,0001092)$  модулі дотичних зусиль у всіх точках області контакту менші за добуток коефіцієнта тертя на контактний тиск, що діє на штамп у цих точках. Такий розподіл дотичних зусиль відповідає повному зчепленню у всій області контакту. За температури  $\bar{T} \in [0,0001092; 0,0001183]$  в точках біля краю підшви штамп починає виконуватись рівність  $|\vec{q}| = \mu p$ , що відповідає

появі вузької кільцевої зони проковзування поблизу межі області контакту (рис. 3, *в*). Коли температура досягає значення приблизно 0,0001184, ця рівність починає виконуватися і в точках, розташованих ближче до центру області контакту, що означає появу другої кільцевої зони проковзування. Відмітимо, що подібну конфігурацію зон зчеплення і проковзування отримав Тернер (Turner) [27], досліджуючи випадок розвантажування при нормальному контакті плоского циліндричного штампа з пружним півпростором. Характер зміни конфігурацій цих зон за подальшого збільшення температури проілюстровано на рис. 3, *г*, *д*. Обидві зони проковзування поступово збільшуються за площею і за температури  $\bar{T} \approx 0,0001255$  з'єднуються в одну кільцеву зону, що прилягає до краю основи штампа (рис. 3, *е*). За подальшого збільшення температури внутрішня межа цієї зони зміщується до центру. За температури приблизно 0,0002080 проковзування охоплює всю область контакту, крім центрального граничного елемента сітки розбиття. Результати, приведені на рис. 4, *а*, свідчать, що у випадку  $\alpha_1 < \alpha_2$  нагрівання тіл до температури, за якої зона проковзування охоплює всю область контакту, крім центрального граничного елемента, призводить до суттєвого збільшення тиску у центрі підшови штампа (приблизно на 35% порівняно з його початковим значенням, досягнутим в результаті механічного навантаження при  $\bar{T} = 0$ ). У випадку  $\alpha_1 > \alpha_2$  за аналогічних умов нагріву спостерігається зменшення тиску в центрі приблизно на 36% порівняно з тим самим його початковим значенням.

#### **Висновки.**

Сформульовано задачу про контактну взаємодію жорсткого циліндричного штампа з плоскою основою та пружного півпростору з урахуванням часткового проковзування з тертям, що виникає на ділянці контакту внаслідок механічного нормального навантаження і теплового розширення тіл.

Отримано нелінійні граничні інтегральні рівняння, що моделюють контактну взаємодію тіл на послідовних етапах силового та термічного навантаження. Для розв'язання цих рівнянь застосовано числовий метод [1], який включав дискретизацію інтегральних рівнянь та використання ітераційного процесу для отримання наближених розв'язків їх дискретних аналогів.

Досліджено залежність розподілів контактних зусиль та конфігурацій зон зчеплення і проковзування від зміни температури тіл. Розрахунки виконано для двох можливих випадків співвідношення між різними коефіцієнтами лінійного теплового розширення  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  матеріалів штампа і півпростору відповідно. Встановлено, що у обох розглянутих випадках ( $\alpha_1 < \alpha_2$  і  $\alpha_1 > \alpha_2$ ) з появою термічного навантаження спостерігається зміна розподілу контактного тиску в центральній зоні області контакту. Якщо  $\alpha_1 < \alpha_2$ , тиск у центрі основи штампа може суттєво збільшуватися, а у разі  $\alpha_1 > \alpha_2$  – зменшуватися порівняно з його значенням, досягнутим у результаті механічного навантаження. Розподіли дотичних зусиль, що діють на основу штампа у випадках  $\alpha_1 < \alpha_2$  і  $\alpha_1 > \alpha_2$ , суттєво відрізняються. Зі збільшенням температури у разі  $\alpha_1 < \alpha_2$  в центральній зоні зчеплення, що утворилася на етапі механічного навантаження, дотичні зусилля зростають. Сама зона зчеплення зменшується за площею і стягується до центру основи штампа. У випадку  $\alpha_1 > \alpha_2$  термічне навантаження призводить до того, що модулі дотичних зусиль спочатку зменшуються у всій області контакту, потім, після зміни напрямку цих зусиль, відбувається збільшення їх модулів до граничних значень, що визначаються законом тертя Кулона. Внаслідок цього спочатку вся область контакту охоплюється зчепленням, потім у ній послідовно виникають дві кільцеві зони проковзування: перша – біля краю основи штампа, друга – ближче до її центру. При подальшому збільшенні термічного навантаження вся область контакту, крім центру, охоплюється проковзуванням.

**РЕЗЮМЕ.** Отримано числовий розв'язок задачі про термомеханічний контакт жорсткого циліндричного штампа з плоскою основою та пружного півпростору. Досліджено часткове проковзування з тертям між спряженими поверхнями, яке виникає в результаті дії спочатку навантаження стиску, а потім – рівномірного нагріву тіл. Для врахування тертя використано закон Кулона. Задачу зведено до систем нелінійних граничних інтегральних рівнянь, що відповідають послідовним етапам механічного і термічного навантаження тіл. Для числового розв'язання цих систем використано їх дискретизацію та ітераційний метод. Залежність розподілів нормальних і дотичних контактних зусиль та конфігурації ділянок зчеплення від температури проаналізована для двох можливих випадків співвідношення між коефіцієнтами теплового розширення тіл.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** контактна механіка, тертя, плоский штамп, теплове розширення, зчеплення, проковзування, контактні напруження, інтегральне рівняння, числовий розв'язок, ітераційний метод.

1. *Александров А.И.* Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2013. – **56**, № 3. – С. 29 – 42.
2. *Александров А.И., Стреляев Ю.М.* Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для контактных задач теории упругости // *Восточно-Европейский журн. передовых технологий.* – 2014. – **7**, № 3. – С. 36 – 40.
3. *Острик В.И.* Метод факторизації та його узагальнення у змішаних задачах теорії пружності. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2018. – 480 с.
4. *Adams G.G.* Stick, partial slip and sliding in the plane strain micro contact of two elastic bodies // *Royal Society Open Sci.* – 2014. – **1**, N 3. – P. 140363.
5. *Barber J.R., Ciavarella M.* Contact mechanics // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – **37**, N 1-2. – P. 29 – 43.
6. *Bazrafshan M., de Rooij M.B., Schipper D.J.* On the role of adhesion and roughness in stick-slip transition at the contact of two bodies: A numerical study // *Tribology International.* – 2018. – **121**. – P. 381 – 388.
7. *Cattaneo C.* Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi // *Rend. Dell'Accademia Nazionale dei Lincei.* – 1938. – **27**. – P. 342 – 348, 434 – 436, 474 – 478.
8. *Chumak K., Malanchuk N., Martynyak R.* Partial slip contact problem for solids with regular surface texture assuming thermal insulation or thermal permeability of interface gaps // *Int. J. Mech. Sci.* – 2014. – **84**. – P. 138 – 146.
9. *Forsbach F.* Stress Tensor and Gradient of Hydrostatic Pressure in the Half-Space Beneath Axisymmetric Bodies in Normal and Tangential Contact // *Frontiers in Mechanical Engng.* – 2020. – **6**. – P. 39.
10. *Fretting Wear and Fretting Fatigue: Fundamental Principles and Applications* (Elsevier Series on Tribology and Surface Engineering) (eds. Liskiewicz T., Dini D.) – Amsterdam: Elsevier, 2023. – 650 p.
11. *Goryacheva I.G., Martynyak R.M.* Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: J. Engng. Tribology.* – 2014. – **228**, N 7. – P. 707 – 716.
12. *Hills D.A., Nowell D., Sackfield A.* Mechanics of Elastic Contact. – Oxford: Butterworth-Heinemann Ltd, 1993. – 560 p.
13. *Hills D.A., Urriolagoitia Sosa G.* Origins of partial slip in fretting – a review of known and potential solutions // *The J. of Strain Analysis for Engineering Design.* – 1999. – **34**, N 3. – P. 175 – 181.
14. *Jang Y.H., Cho H., Barber J.R.* The thermoelastic Hertzian contact problem // *Int. J. Solids Struct.* – 2009. – **46**, N 22-23. – P. 4073 – 4078.
15. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 452 p.
16. *Kalker J.J.* A survey of the mechanics of contact between solid bodies // *ZAMM.* – 1977. – **57**, N 5. – P. T3 – T17.
17. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I., Gavrilenko V.V., Viter M.B.* Modeling of contact interaction of a heated plane rigid elliptical punch with a transversally isotropic elastic half-space // *System Research and Information Technologies.* – 2020. – **3**. – P. 138 – 149.
18. *Krishtafovich A.A., Martynyak R.M.* Lamination of Anisotropic Half-Spaces in the Presence of Contact Thermal Resistance // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 2. – P. 159 – 164.
19. *Luo Q.H., Zhou Y.T., Guler M.A.* Adhesive behavior between dissimilar materials subjected to thermoelastic loadings with normal-tangential coupling effect // *Appl. Mathem. Modelling.* – 2023. – **115**. – P. 360 – 384.

20. *Malanchuk N., Martynyak R., Monastyrskyy B.* Thermally induced local slip of contacting solids in vicinity of surface groove // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – **48**, N 11-12. – P. 1791 – 1797.
21. *Martynyak R., Chumak K.* Effect of heat-conductive filler of interface gap on thermoelastic contact of solids // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 2012. – **55**, N 4. – P. 1170 – 1178.
22. *Mindlin R.D.* Compliance of elastic bodies in contact // *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* – 1949. – **16**, N 3. – P. 259 – 268.
23. *Ostryk V.I., Ulitko A.F.* Axially symmetric contact of two elastic bodies with friction and adhesion // *Materials Sci.* – 2013. – **48**, N 4. – P. 444 – 455.
24. *Pauk V.* Plane contact of hot flat-ended punch and thermoelastic half-space involving finite friction // *J. Appl. Mech.* – 2007. – **74**, N 6. – P. 1172 – 1177.
25. *Pearson S.R., Shipway P.H., Abere J.O., Hewitt R.A.A.* The effect of temperature on wear and friction of a high strength steel in fretting // *Wear.* – 2013. – **303**, N 1-2. – P. 622 – 631.
26. *Streliaiev Y., Martynyak R., Chumak K.* Thermomechanical Slip in Elastic Contact Between Identical Materials // *Acta Mechanica et Automatica.* – 2021. – **15**, N 4. – P. 187 – 192.
27. *Turner J. R.* The frictional unloading problem on linear elastic half-space // *IMA J. Appl. Mathem.* – 1979. – **24**. – P. 439 – 469.
28. *Wang Z., Yu C., Wang Q.* An efficient method for solving three-dimensional fretting contact problems involving multilayered or functionally graded materials // *Int. J. Solids Struct.* – 2015. – **66**. – P. 46 – 61.
29. *Yue T., Abdel Wahab M.* A Review on Fretting Wear Mechanisms, Models and Numerical Analyses // *CMC.* – 2019. – **59**, N 2. – P. 405 – 432.
30. *Zhupanska O.I., Ulitko A.F.* Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2005. – **53**. – P. 975 – 999.

Надійшла 22.08.2023

Затверджена до друку 12.12.2023