

А. О. Сяський, Н. В. Шевцова

**КОНТАКТ БЕРЕГІВ МІЖФАЗНОГО РОЗРІЗУ МІЖ ПЛАСТИНКОЮ
З ОТВОРОМ І ЗАМКНЕНИМ ПРУЖНИМ РЕБРОМ**

*Рівненський державний гуманітарний університет,
вул. Степана Бандери, 12, 33028, Рівне, Україна; e-mail: rectorat@rshu.edu.ua*

Abstract. The formulation and method of solving the problem of frictionless contact of the edges of the interfacial cut between an infinite plate with a curvilinear hole and a closed elastic rib is proposed. Using the model of the reinforcing rib as an elastic rod of great curvature, the mathematical model of the problem is built in the form of the system of singular integral-differential equations with the Hilbert kernels to determine the contact tractions between the plate and rib. The structure of sought functions at the ends of the areas of their connection and smooth contact is established. Using the method of mechanical quadrature and collocation, the complete closure of the cut edges and the influence of the rib relative stiffness on the stress state of the plate and reinforcing rib are studied.

Key words: curvilinear interfacial cut, isotropic plate, reinforcing rib, contact tractions, area of smooth contact, system of integral-differential equations.

Вступ.

Підвищення надійності деталей машин та елементів споруд у вигляді кусково-однорідних пластин з гладкою криволінійною межею поділу матеріалів є однією з ключових проблем сучасного машинобудування і будівництва. Довговічність деталей машин та елементів споруд суттєво залежить від наявності на цій межі дефектів типу тріщин (розривів нульової ширини). Такі дефекти можуть виникнути як на етапі виготовлення деталі, так і в процесі її експлуатації. При певних навантаженнях береги розривів можуть контактувати частково або по всій довжині. Системне дослідження таких задач проведено в [1, 2, 5, 13, 16, 17]. Контакт берегів міжфазного розриву між ізотропною пластинкою з криволінійним отвором і абсолютно жорстким диском розглянуто в роботі [12].

Для інженерної практики актуальною є проблема визначення напруженого стану в пластинці з криволінійним отвором, підсиленім замкненим пружним ребром за наявності на межі поділу матеріалів міжфазного розриву, береги якого контактують частково або змикаються по всій довжині, забезпечуючи непроникність і герметичність пластинчастої конструкції. Напружено-деформований стан (НДС) пластинки з криволінійним ребром жорсткості, яка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, суттєво залежить від вибору математичної моделі, що описує деформацію ребра. У науковій літературі переважно використовують три моделі замкненого або розімкненого криволінійного пружного ребра: модель стрингера; балкова модель; модель криволінійного стержня сталого поперечного перерізу. Огляд досліджень, які стосуються розробки, модифікацій та застосування таких моделей, наведено в [9].

У даний час найбільш поширеною моделлю замкненого підсилювального ребра є криволінійний стержень великої кривизни і сталого прямокутного поперечного перерізу [6, 10, 14, 15]. Використовуючи цю модель, у роботі [11] досліджено вплив міжфазного розриву, береги якого не контактують, на НДС ізотропної пластинки з криво-

лінійним отвором і замкненого пружного ребра. Частковий контакт берегів міжфазного розрізу по дузі кола між ізотропною пластинкою і замкненим пружним ребром розглянуто в [18]. Для пластин з криволінійним отвором, відмінним від кругового, такі задачі не розглядалися.

§1. Постановка задачі.

Розглянемо кусково-однорідну пружну систему, що містить пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, гладкий контур якого підсилений пружним ребром у вигляді замкненої моментної циліндричної оболонки товщиною 2η і висотою $2h_0$ ($h_0 > h$). Їх симетричне з'єднання відповідає повному механічному контакту. Спільна серединна площина пластинки і ребра віднесена до декартової (x, y) та полярної (r, δ) систем координат з полюсом у центрі отвору. Пластинчаста конструкція перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного однорідним силовим навантаженням на зовнішньому контурі пластинки. Всі компоненти НДС віднесені до серединної площини (рис. 1).

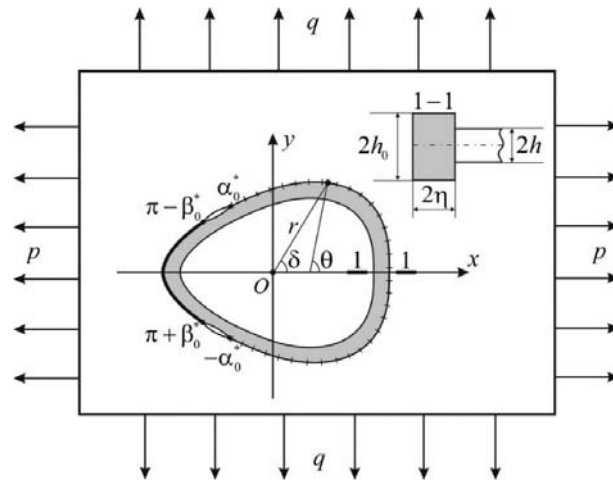


Рис. 1

Припустимо, що на лінії сполучення пластинки і ребра зовні ділянки $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$ виник симетричний відносно осі Ox міжфазний розріз, береги якого за дії заданого навантаження на ізолюваній ділянці $[\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$ гладко контактують. Межі ділянок сполучення і контактування визначаються полярними кутами $-\alpha_0^*$, α_0^* , $\pi - \beta_0^*$, $\pi + \beta_0^*$.

Розв'язання задачі передбачає:

визначення розмірів ділянки гладкого контактування берегів міжфазного розрізу між пластинкою і ребром та компонент напруженого стану на межі поділу їх матеріалів;

встановлення мінімального розміру міжфазного розрізу, для якого при заданих навантаженні й інших параметрах задачі забезпечується повний контакт його берегів, а також компонент напруженого стану в пластинці та ребрі.

§2. Математична модель задачі.

Умовно розділимо двокомпонентну конструкцію, зображену на рис. 1, на окремі елементи (пластинку з криволінійним отвором і підсилювальне ребро). Замінюючи дію одного тіла на інше невідомими контактними зусиллями, приходимо до першої основної задачі теорії пружності для пластинки з криволінійним отвором і пружного ребра.

Вважаючи, що розмір отвору значно менший від зовнішніх розмірів пластинки, її будемо моделювати нескінченною пластинкою, яка перебуває в умовах однорідного

напруженого стану на нескінченності, а на контурі отвору діють контактні зусилля, що передаються до нього від пружного ребра. Підсилювальне ребро перебуває у пружній рівновазі під дією контактних зусиль, що передаються до нього від пластинки.

Ізотропна пластинка. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$, послаблену симетричним криволінійним отвором. Лінію перетину серединної площини з поверхнею отвору позначимо Γ і будемо називати контуром отвору.

Вважаємо, що пластинка перебуває в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими на нескінченності зусиллями p і q , які діють вздовж координатних осей, та нормальних T_ρ і дотичних $S_{\rho\lambda}$ контактних зусиль, що передаються до контуру Γ від підсилювального ребра.

Нехай форма отвору в пластинці визначається функцією [11, 12]

$$z = x + iy = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon_1}{\xi} + \frac{\varepsilon_2}{\xi^2} + \frac{\varepsilon_3}{\xi^3} \right), \quad (2.1)$$

яка здійснює конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ в площині $\xi = \tilde{\rho}e^{i\lambda}$ на область, яку займає серединна площина пластинки в площині $z = x + iy$. Тут R_0 – характерний розмір отвору; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – параметри, які характеризують відхилення контуру Γ від кола. За умови $|\varepsilon_1| + 2|\varepsilon_2| + 3|\varepsilon_3| < 1$, яка гарантує відсутність на контурі кутових точок і неперервність його кривизни, функція (2.1) визначає Γ як комбінацію кола, еліпса, правильних трикутника і квадрата із закругленими кутами.

Компоненти тензора напружень і тензора деформацій пластинки в точках контуру Γ визначаються за формулами [11, 12]

$$\begin{aligned} T_\rho &= \frac{\alpha T_\rho^* + \beta S_{\rho\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; & S_{\rho\lambda} &= \frac{\alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_\rho^*}{\alpha^2 + \beta^2}; & \varepsilon_\lambda &= \frac{\alpha \varepsilon_\lambda^* + \beta \tilde{V}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \\ \tilde{V} &= \frac{\alpha \tilde{V}^* - \beta \varepsilon_\lambda^*}{\alpha^2 + \beta^2}; & \tilde{k}(\lambda) &= \frac{1}{\rho} \left[1 - \varepsilon_\lambda + \frac{d\tilde{V}}{d\theta} \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

де

$\alpha(\lambda) + i\beta(\lambda) = \omega'(\sigma)$; $T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda})\omega'(\sigma)$; $\varepsilon_\lambda^* + i\tilde{V}^* = (\varepsilon_\lambda + i\tilde{V})\omega'(\sigma)$; $\sigma = e^{i\lambda}$; $\varepsilon_\lambda, \tilde{V}, \tilde{k}(\lambda)$ – відносне видовження, кут повороту нормалі та кривизна в контурних точках; $\rho(\lambda)$ – радіус кривизни недеформованого контуру; θ – кут, який утворює нормаль до Γ з віссю Ox ; $e^{i\theta} = \sigma\omega'(\sigma)/|\omega'(\sigma)|$.

Для заданого зовнішнього навантаження пластинки величини $\varepsilon_\lambda^*, \tilde{V}^*$ на Γ знаходимо зі співвідношень [11, 12]

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{1}{2Eh} \left\{ (1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} \tilde{T}_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + V^0 \right\}; \\ \varepsilon_\lambda^* &= \frac{1}{2Eh} \left\{ (1-\nu)T_\rho^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[T_\rho^0(t) - S_{\rho\lambda}^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} \left[\tilde{T}_\rho(t) - \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt + \varepsilon_\lambda^0 \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

в яких позначено

$$(1 - \varepsilon_3)\alpha_1 = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} [T_{\rho}^*(t) \cos 2t - S_{\rho\lambda}^* \sin 2t] dt - \frac{1}{2}(q - p) - \frac{p+q}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_3);$$

$$\varepsilon_{\lambda}^0 = (p+q)(2 - \alpha(\lambda)) + [2(q-p) + \varepsilon_1\varepsilon_3(p+q) - 4\alpha_1\varepsilon_3] \cos 2\lambda;$$

$$V^0 = -(p+q)\beta(\lambda) + [2(p-q) - \varepsilon_1\varepsilon_3(p+q) + 4\alpha_1\varepsilon_3] \sin 2\lambda;$$

$$T_{\rho}^* = \begin{cases} T_{\rho}^0, & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{T}_{\rho}, & \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \end{cases} \quad S_{\rho\lambda}^* = \begin{cases} S_{\rho\lambda}^0, & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{S}_{\rho\lambda}, & \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \end{cases}$$

$[-\alpha_0; \alpha_0]$, $[\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$ – образи проміжків $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$, $[\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$ при відображенні (2.1); ν , E – коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга матеріалу пластинки.

Якщо за фіктивні параметри деформації контуру Γ обрати функції ε_{λ}^* , \tilde{V}^* , то на підставі (2.2) формула для обчислення його кривизни набуває вигляду

$$\tilde{k}(\lambda) = \frac{1}{\rho} \left[1 - \frac{\alpha\varepsilon_{\lambda}^* + \beta\tilde{V}^*}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\alpha\tilde{V}^* - \beta\varepsilon_{\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right]. \quad (2.4)$$

Кільцеві зусилля на контурі Γ в пластинці визначаються залежністю [12]

$$T_{\lambda} = \nu T_{\rho} + 2Eh\varepsilon_{\lambda}. \quad (2.5)$$

Підсилювальне ребро моделюємо замкненим криволінійним стержнем великої змінної кривизни, який перебуває в пружній рівновазі під дією контактних зусиль T_{ρ} і $S_{\rho\lambda}$, що передаються до нього від пластинки [6, 10, 11, 14, 15]. Позначимо через $\rho^{(e)} = \rho$ радіус кривизни крайнього зовнішнього недеформованого волокна ребра, яке контактує з пластинкою. Відповідно до прийнятої моделі, напружений стан підсилення визначають внутрішні поздовжня N і поперечна Q сили та згинальний момент L_b , що діють у поперечних перерізах стержня і віднесені до його осі.

Задача розрахунку внутрішніх силових факторів у замкненому стержні двічі статично невизначена. Відповідно до методу сил [6, 10] обираємо основну розрахункову схему стержня (статично визначену і геометрично незмінну) вилученням зайвих зв'язків та заміною їх невідомими внутрішніми реакціями N_0 , L_b^0 і N_1 , L_b^1 . Зображений на рис. 2 розімкнений стержень деформується так само, що й верхня частина суцільного стержня.

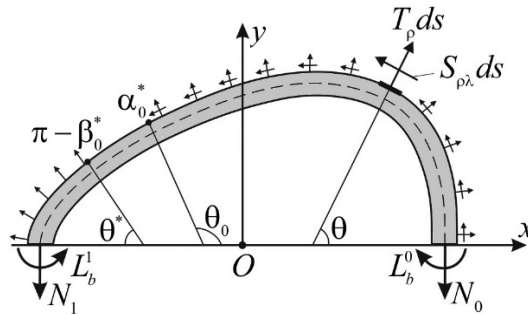


Рис. 2

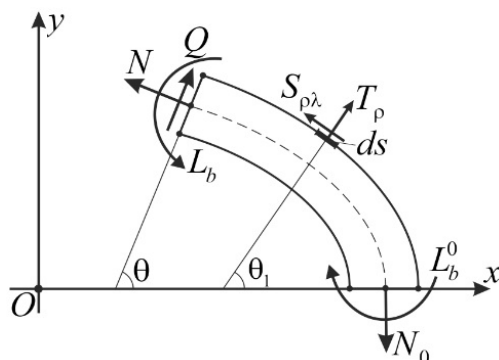


Рис. 3

Для визначення функцій N , Q , L_b розглянемо частину стержня між перерізами $\theta = 0$ і $\theta = \theta$ (рис. 3). З умов її рівноваги знаходимо після певних перетворень

$$\begin{aligned}
 N(\lambda) &= N_0 \cos \theta + A(\lambda) \sin \theta - B(\lambda) \cos \theta; & Q(\lambda) &= N_0 \sin \theta - A(\lambda) \cos \theta - B(\lambda) \sin \theta; \\
 L_b(\lambda) &= L_b^0 + (x_0 - \eta - x(\lambda)) N_0 + \eta N(\lambda) + x(\lambda) B(\lambda) - y(\lambda) A(\lambda) + C(\lambda) - D(\lambda); \\
 \lambda &\in [0; \alpha_0]; & \theta &\in [0; \theta_0];
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
 N(\lambda) &= N_0 \cos \theta + A(\alpha_0) \sin \theta - B(\alpha_0) \cos \theta; & Q(\lambda) &= N_0 \sin \theta - A(\alpha_0) \cos \theta - B(\alpha_0) \sin \theta; \\
 L_b(\lambda) &= L_b^0 + (x_0 - \eta - x(\lambda)) N_0 + \eta N(\lambda) + x(\lambda) B(\alpha_0) - y(\lambda) A(\alpha_0) + C(\alpha_0) - D(\alpha_0); \\
 \lambda &\in [\alpha_0; \pi - \beta_0]; & \theta &\in [\theta_0; \pi - \theta^*];
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 N(\lambda) &= -N_1 \cos \theta - A_1(\lambda) \sin \theta + B_1(\lambda) \cos \theta; & Q(\lambda) &= -N_1 \sin \theta + A_1(\lambda) \cos \theta + B_1(\lambda) \sin \theta; \\
 L_b(\lambda) &= L_b^1 - (x(\pi) + \eta - x(\lambda)) N_1 + \eta N(\lambda) - x(\lambda) B_1(\lambda) + y(\lambda) A_1(\lambda) - C_1(\lambda) + D_1(\lambda); \\
 \lambda &\in [\pi - \beta_0; \pi]; & \theta &\in [\pi - \theta^*; \pi].
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned}
 A(\lambda) &= \int_0^\lambda (T_\rho^*(t) \cos t - S_{\rho\lambda}^*(t) \sin t) dt; & B(\lambda) &= \int_0^\lambda (T_\rho^*(t) \sin t + S_{\rho\lambda}^*(t) \cos t) dt; \\
 C(\lambda) &= \int_0^\lambda (T_\rho^*(t) \cos t - S_{\rho\lambda}^*(t) \sin t) y(t) dt; & D(\lambda) &= \int_0^\lambda (T_\rho^*(t) \sin t + S_{\rho\lambda}^*(t) \cos t) x(t) dt; \\
 C_1(\lambda) &= \int_\pi^\lambda (T_\rho^*(t) \cos t - S_{\rho\lambda}^*(t) \sin t) y(t) dt; & D_1(\lambda) &= \int_\pi^\lambda (T_\rho^*(t) \sin t + S_{\rho\lambda}^*(t) \cos t) x(t) dt; \\
 A_1(\lambda) &= \int_\pi^\lambda (T_\rho^*(t) \cos t - S_{\rho\lambda}^*(t) \sin t) dt; & B_1(\lambda) &= \int_\pi^\lambda (T_\rho^*(t) \sin t + S_{\rho\lambda}^*(t) \cos t) dt.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Деформації поздовжніх волокон підсилювального ребра, що контактують з пластинкою, характеризуються відносним видовженням $\varepsilon_\lambda^{(c)}$, приростом кута повороту нормалі $d\theta_b / d\theta$ та кривизною $k^{(c)}$ і визначаються за формулами [10, 11]

$$\varepsilon_\lambda^{(c)}(\theta) = \frac{1}{E_0 F_0} \left[N(\theta) + \frac{\eta + \eta_c}{\rho \eta_c} L_b(\theta) \right]; \quad \frac{d\theta_b(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[N(\theta) + \frac{L_b(\theta)}{\eta_c} \right];$$

$$k^{(c)}(\theta) = \frac{1}{\rho^{(c)}} \left[1 + \frac{r_0 L_b(\theta)}{\rho \eta_c E_0 F_0} \right], \quad \theta \in [0; \pi], \quad (2.10)$$

де $2h_0, 2\eta$ – висота і ширина ребра; $E_0 F_0$ – жорсткість ребра на розтяг (стиск); E_0, ν_0 – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона його матеріалу; $F_0 = 2h_0 \cdot 2\eta$ – площа поперечного перерізу; $\eta_c = \rho - \eta + 2\eta / (\ln(\rho - \eta) - \ln \rho)$; $r_0 = \rho - \eta - \eta_c$ – відстань від осі ребра до нейтрального для чистого згину поздовжнього волокна та радіус його кривизни.

Кут повороту нормалі θ_b і проєкції u_1, u_2 вектора зміщення на координатні осі в точках зовнішнього поздовжнього волокна на підставі [14] визначаються за формулами

$$\theta_b(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta_b}{d\theta_1} d\theta_1; \quad u_1(\theta) = u_1(0) - \int_0^\theta [y(\theta) - y(\theta_1)] \frac{d\theta_b}{d\theta_1} d\theta_1 - \int_0^\theta \varepsilon_\lambda^{(c)}(\theta_1) \sin \theta_1 \rho(\theta_1) d\theta_1;$$

$$u_2(\theta) = \int_0^\theta [x(\theta) - x(\theta_1)] \frac{d\theta_b}{d\theta_1} d\theta_1 + \int_0^\theta \varepsilon_\lambda^{(c)}(\theta_1) \cos \theta_1 \rho(\theta_1) d\theta_1, \quad (2.11)$$

в яких $u_1(0)$ – жорстке зміщення волокна в напрямку осі Ox .

Аналогічні залежності для осьового волокна ребра сталої кривизни наведені в [14].

Функції $\theta_b(\theta), u_1(\theta), u_2(\theta)$ повинні бути однозначними при обході замкнутого контуру Γ , тому для них повинні виконуватися умови

$$\int_0^\pi \left[N(\theta_1) + \frac{L_b(\theta_1)}{\eta_c(\theta_1)} \right] x(\theta_1) d\theta_1 - \int_0^\pi \left[N(\theta_1) + \frac{\eta + \eta_c(\theta_1)}{\rho(\theta_1) \eta_c(\theta_1)} L_b(\theta_1) \right] \rho(\theta_1) \cos \theta_1 d\theta_1 = 0;$$

$$\int_0^\pi \left[N(\theta_1) + \frac{L_b(\theta_1)}{\eta_c(\theta_1)} \right] d\theta_1 = 0, \quad (2.12)$$

які забезпечують відсутність кута повороту нормалі та вертикального зміщення в центрі ваги правого торця розікненого стержня. Разом з умовами його рівноваги

$$D(\alpha_0) - C(\alpha_0) - D_1(\pi - \beta_0) + C_1(\pi - \beta_0) - (x(0) - \eta) N_0 - (x(\pi) + \eta) N_1 - L_b^0 + L_b^1 = 0;$$

$$B(\alpha_0) - B_1(\pi - \beta_0) - N_0 - N_1 = 0 \quad (2.13)$$

вони слугують для визначення початкових параметрів N_0, N_1, L_b^0, L_b^1 ребра.

Нормальні напруження в зовнішньому і внутрішньому поздовжніх волокнах ребра та найбільші дотичні напруження в осьовому волокну визначаються за формулами [10]

$$\sigma^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{F_0} \left[N(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c}{\rho \eta_c} L_b(\lambda) \right]; \quad \sigma^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{F_0} \left[N(\lambda) + \frac{\eta_c - \eta}{(\rho - 2\eta) \eta_c} L_b(\lambda) \right];$$

$$\tau_{\rho\lambda}^{(c)}(\lambda) = \frac{3}{2} \frac{Q(\lambda)}{F_0}. \quad (2.14)$$

Співвідношення (2.5) – (2.14) визначають повну систему рівнянь одновимірної теорії замкнених криволінійних стержнів при їх симетричній відносно осі Ox деформації.

Крайові умови задачі на ділянці з'єднання пластинки і підсилювального ребра формулюємо у вигляді умов ідеального механічного контакту в диференціальній формі [4], а на ділянці гладкого контактування – у вигляді рівності їх кривизн [11]. На підставі (2.2), (2.10) ці умови можна подати у вигляді

$$\frac{\alpha(\lambda)\varepsilon_\lambda^*(\lambda) + \beta(\lambda)\tilde{V}^*(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} = \frac{1}{E_0F_0} \left[N(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c(\lambda)}{\rho(\lambda)\eta_c(\lambda)} L_b(\lambda) \right];$$

$$\frac{\alpha(\lambda)\tilde{V}^*(\lambda) - \beta(\lambda)\varepsilon_\lambda^*(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} = \frac{1}{E_0F_0} \int_0^\lambda \left[N(t) + \frac{L_b(t)}{\eta_c(t)} \right] dt, \quad \lambda \in [0; \alpha_0]; \quad (2.15)$$

$$\frac{\alpha\varepsilon_\lambda^* + \beta\tilde{V}^*}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\alpha\tilde{V}^* - \beta\varepsilon_\lambda^*}{\alpha^2 + \beta^2} \right) = -\frac{r_0L_b(\lambda)}{\rho\eta_cE_0F_0}; \quad \alpha\tilde{S}_{\rho\lambda} - \beta\tilde{T}_\rho = 0, \quad (2.16)$$

$$\lambda \in [\pi - \beta_0; \pi]; \quad \theta \in [\pi - \theta^*; \pi].$$

Тут величини ε_λ^* , \tilde{V}^* в пластинці визначаються за формулами (2.3), а внутрішні силові фактори N , Q , L_b в підсилювальному ребрі – зі співвідношень (2.6) – (2.9). Їх підставлення в умови (2.15), (2.16) після певних перетворень призводить до системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь (ССІДР) з ядрами Гільберта відносно функцій T_ρ^0 , $S_{\rho\lambda}^0$, \tilde{T}_ρ , $\tilde{S}_{\rho\lambda}$, в якій ділянка гладкого контактування наперед невідома

$$\alpha(\lambda) \left\{ (1-\nu)T_\rho^0(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[T_\rho^0(t) - S_{\rho\lambda}^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} \left[\tilde{T}_\rho(t) - \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt + \varepsilon_\lambda^0 \right\} +$$

$$+ \beta(\lambda) \left\{ (1-\nu)S_{\rho\lambda}^0(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} \tilde{T}_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + V^0 \right\} =$$

$$= \frac{2Eh(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))}{E_0F_0} \left[N(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c(\lambda)}{\rho(\lambda)\eta_c(\lambda)} L_b(\lambda) \right];$$

$$\alpha(\lambda) \left\{ (1-\nu)S_{\rho\lambda}^0(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} \tilde{T}_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + V^0 \right\} -$$

$$- \beta(\lambda) \left\{ (1-\nu)T_\rho^0(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[T_\rho^0(t) - S_{\rho\lambda}^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt - \right. \quad (2.17)$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} \left[\tilde{T}_\rho(t) - \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt + \varepsilon_\lambda^0 \right\} = \frac{2Eh(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))}{E_0F_0} \int_0^\lambda \left[N(t) + \frac{L_b(t)}{\eta_c(t)} \right] dt,$$

$$\lambda \in [0; \alpha_0]; \quad \theta \in [\pi - \theta^*; \pi];$$

$$\begin{aligned}
& \left[\alpha + \frac{d\lambda}{d\theta} \left(\beta \frac{d}{d\lambda} + \beta' - \frac{2\beta(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right] \left\{ (1-\nu)\tilde{T}_\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[T_\rho^0(t) - S_{\rho\lambda}^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} \left[\tilde{T}_\rho(t) - \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt + \varepsilon_\lambda^0 \right\} + \left[\beta - \frac{d\lambda}{d\theta} \left(\alpha \frac{d}{d\lambda} + \alpha' - \frac{2\alpha(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right] \times \\
& \times \left\{ (1-\nu)\tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} \tilde{T}_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + V^0 \right\} + \quad (2.18) \\
& + \frac{2Eh}{E_0F_0} (\alpha^2 + \beta^2) \frac{r_0 L_b(\lambda)}{\rho\eta_c} = 0; \quad \alpha\tilde{S}_{\rho\lambda} - \beta\tilde{T}_\rho = 0; \quad \alpha' = \frac{d\alpha}{d\lambda}; \quad \beta' = \frac{d\beta}{d\lambda}, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi].
\end{aligned}$$

Разом з (2.12), (2.13) вона визначає повну систему рівнянь, які складають математичну модель поставленої задачі. Співвідношення (2.12), (2.13), (2.17), (2.18) при $\tilde{T}_\rho = \tilde{S}_{\rho\lambda} = 0$ визначають математичну модель цієї задачі за відсутності контактування берегів міжфазного розрізу [11], а при $\tilde{T}_\rho < 0$, $\alpha_0 + \beta_0 = \pi$ – математичну модель задачі при повному контактуванні берегів.

За умови $E/E_0 \rightarrow 0$ із системи (2.17), (2.18) отримаємо математичну модель задачі про гладкий контакт берегів міжфазного розрізу між ізотропною пластинкою з криволінійним отвором і абсолютно жорстким кільцем (диском) [12]. Її наближений розв'язок побудовано методом механічних квадратур і колокації.

§3. Наближений розв'язок задачі.

Точний розв'язок системи (2.12), (2.13), (2.17), (2.18) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру шуканих функцій на кінцях ділянок з'єднання і гладкого контактування пластинки та ребра.

Оскільки розглядувана задача відноситься до змішаних контактних задач теорії пружності, то відповідно до [2, 8] контактні зусилля T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ на кінцях $\lambda = \pm\alpha_0$ ділянки з'єднання пластинки і ребра мають кореневу особливість з локальною осциляцією. Контактні зусилля на проміжку $[\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$ обмежені та неперервні, тому, нехтуючи впливом осциляції, наближений розв'язок задачі побудуємо комбінованим методом механічних квадратур і колокації [3, 11, 18].

Заміною змінних

$$\lambda = 2 \operatorname{arctg} a_0 \cos \varphi; \quad a_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}; \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \quad \varphi \in [0; \pi] \quad (3.1)$$

в системі (2.17) перейдемо від проміжку інтегрування $[-\alpha_0; \alpha_0]$ до стандартного для даного методу проміжку $[0; \pi]$.

Аналогічну заміну використаємо на проміжку $[\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$ в системі (2.18)

$$\tilde{\lambda} = 2 \operatorname{arctg} \tilde{a}_0 \cos \tilde{\varphi}; \quad \tilde{a}_0 = \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2}; \quad \tilde{\lambda} \in [-\beta_0; \beta_0]; \quad \lambda = \pi + \tilde{\lambda}; \quad \tilde{\varphi} \in [0; \pi]. \quad (3.2)$$

З урахуванням структури розв'язку задачі (2.12), (2.13), (2.17), (2.18) на кінцях ділянок сполучення і гладкого контактування пластинки та ребра, а також симетрії задачі відносно осі Ox , шукані функції обираємо у вигляді [3, 11, 18]

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} T_\rho^0(\lambda) \\ S_{\rho\lambda}^0(\lambda) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} T_\rho^0(2 \operatorname{arctg} a_0 \cos \varphi) \\ S_{\rho\lambda}^0(2 \operatorname{arctg} a_0 \cos \varphi) \end{array} \right\} = \frac{1}{2m_0 \sin \varphi} \sum_{n=1}^{2m_0} \left\{ \begin{array}{l} A_n \\ B_n \end{array} \right\} \Phi_0(\varphi, \varphi_n); \\ \left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_\rho(\lambda) \\ \tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_\rho(2 \operatorname{arctg} \tilde{a}_0 \cos \tilde{\varphi}) \\ \tilde{S}_{\rho\lambda}(2 \operatorname{arctg} \tilde{a}_0 \cos \tilde{\varphi}) \end{array} \right\} = \frac{\sin \tilde{\varphi}}{2\tilde{m}_0} \sum_{n=1}^{2\tilde{m}_0} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_n \\ \tilde{B}_n \end{array} \right\} \tilde{\Phi}_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_n). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Тут

$$\Phi_0(\varphi, \varphi_n) = \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{2m_0-1} \cos m\varphi_n \cos m\varphi \right]; \quad \tilde{\Phi}_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_n) = \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{2\tilde{m}_0-1} \cos m\tilde{\varphi}_n \cos m\tilde{\varphi} \right];$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{2m_0+1-n} \\ B_{2m_0+1-n} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} A_n \\ -B_n \end{array} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, m_0; \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_n \\ \tilde{B}_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_{2\tilde{m}_0+1-n} \\ -\tilde{B}_{2\tilde{m}_0+1-n} \end{array} \right\}, \quad n = \tilde{m}_0 + 1, \dots, 2\tilde{m}_0$$

– умови, які забезпечують симетрію задачі відносно осі Ox ; $\varphi_n = \frac{2n-1}{4m_0}\pi$, $\tilde{\varphi}_n = \frac{2n-1}{4\tilde{m}_0}\pi$ – вузли Чебишева для інтерполяційних поліномів Лагранжа на ділянках сполучення та гладкого контактування пластинки і ребра; $2m_0$, $2\tilde{m}_0$ – кількість вузлів інтерполяції на цих ділянках.

Розрахункові формули для обчислення значень шуканих функцій та сингулярних інтегралів у вузлах інтерполяції на підставі [3, 11, 18] набувають вигляду

$$\begin{aligned} T_\rho^0(\lambda_k) &= \frac{A_k}{\sin \varphi_k}; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt = -\frac{1}{m_0} \sum_{n=1}^{m_0} \frac{A_n}{\sin \varphi_n} \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_k} 2 \operatorname{ctg} \psi; \\ S_{\rho\lambda}^0(\lambda_k) &= \frac{B_k}{\sin \varphi_k}; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt = -\frac{1}{m_0} \sum_{n=1}^{m_0} \frac{B_n}{\sin \varphi_n} \left[\frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_k} \frac{2}{\sin \psi} - a_0 \cos \varphi_n q_n \right]; \\ q_n &= \frac{2a_0 \sin \varphi_n}{1 + a_0^2 \cos^2 \varphi_n}; \quad \lambda_k = 2 \operatorname{arctg} a_0 \cos \varphi_k; \quad \lambda_k \in [0; \alpha_0]; \\ \psi &= \varphi_k + (-1)^{k+n} \varphi_n; \quad \varphi_k = \frac{2k-1}{4m_0} \pi; \quad k = 1, 2, \dots, m_0; \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\rho(\tilde{\lambda}_k) &= \tilde{A}_k \sin \tilde{\varphi}_k; \quad \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} \tilde{T}_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{T}_\rho(\tilde{t}) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda}_k - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} = \\ &= \frac{2}{\tilde{m}_0} \sum_{n=1+\tilde{m}_0}^{2\tilde{m}_0} \tilde{A}_n \sin \tilde{\varphi}_n \left[-\frac{\sin \tilde{\varphi}_k}{\sin \tilde{\varphi}_n} \operatorname{ctg} \tilde{\psi} + \frac{\cos \tilde{\varphi}_k}{\sin \tilde{\varphi}_n} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tilde{\lambda}_k) &= \tilde{B}_k \sin \tilde{\varphi}_k; \quad \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tilde{t}) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda}_k - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} = \\ &= \frac{1}{\tilde{m}_0} \sum_{n=1+\tilde{m}_0}^{2\tilde{m}_0} \tilde{B}_n \sin \tilde{\varphi}_n \left[\tilde{a}_0 \cos \tilde{\varphi}_n \tilde{q}_n + \operatorname{ctg} \tilde{\varphi}_n - \frac{\sin \tilde{\varphi}_k}{\sin \tilde{\varphi}_n} \frac{2}{\sin \tilde{\psi}} \right]; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\tilde{q}_n = \frac{2\tilde{a}_0 \sin \tilde{\varphi}_n}{1 + \tilde{a}_0^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_n}; \quad \tilde{\lambda}_k = 2 \arctg \tilde{a}_0 \cos \tilde{\varphi}_k; \quad \tilde{\varphi}_k = \frac{2k-1}{4\tilde{m}_0} \pi; \quad \tilde{\psi} = \tilde{\varphi}_k + (-1)^{k+n} \tilde{\varphi}_n;$$

$$\tilde{\lambda}_k \in [-\beta_0; 0]; \quad \lambda_k = \pi + \tilde{\lambda}_k; \quad k = \tilde{m}_0 + 1, \dots, 2\tilde{m}_0.$$

Для обчислення похідних від шуканих функцій та сингулярних інтегралів від них у вузлах інтерполяції встановлено такі співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{T}_\rho(\tilde{\lambda}) \right]_{\tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}_k} &= -\frac{1}{\tilde{q}_k} \sum_{n=1+\tilde{m}_0}^{2\tilde{m}_0} \tilde{A}_n \sin \tilde{\varphi}_n a_{nk}; \quad \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{T}_\rho \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right]_{\tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}_k} = \\ &= -\frac{1}{\tilde{q}_k} \sum_{n=1+\tilde{m}_0}^{2\tilde{m}_0} \tilde{A}_n \sin \tilde{\varphi}_n \left[-\frac{2 \sin \tilde{\varphi}_k}{\tilde{m}_0 \sin \tilde{\varphi}_n} - \frac{2 \cos \tilde{\varphi}_k}{\tilde{m}_0 \sin \tilde{\varphi}_n} \operatorname{ctg} \tilde{\psi} + b_{nk} \right]; \\ \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tilde{t}) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right]_{\tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}_k} &= -\frac{1}{\tilde{q}_k} \sum_{n=1+\tilde{m}_0}^{2\tilde{m}_0} \tilde{B}_n \sin \tilde{\varphi}_n \left[d_{nk} - \frac{2 \cos \tilde{\varphi}_k}{\tilde{m}_0 \sin \tilde{\varphi}_n} \frac{1}{\sin \tilde{\psi}} \right]; \quad (3.6) \\ \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{S}_{\rho\lambda}(\tilde{\lambda}) \right]_{\tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}_k} &= -\frac{1}{\tilde{q}_k} \sum_{n=1+\tilde{m}_0}^{2\tilde{m}_0} \tilde{B}_n \sin \tilde{\varphi}_n c_{nk}, \end{aligned}$$

в яких введено позначення

$$\tilde{\lambda}_k \in [-\beta_0; 0]; \quad \tilde{q}_k = \frac{2\tilde{a}_0 \sin \tilde{\varphi}_k}{1 + \tilde{a}_0^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_k}; \quad k = \tilde{m}_0 + 1, \dots, 2\tilde{m}_0;$$

$$\begin{aligned} a_{nk} &= \begin{cases} \frac{1}{\sin 2\tilde{\varphi}_n}, & n = k; \\ (-1)^{n+k} \frac{2 \cos \tilde{\varphi}_n}{\cos^2 \tilde{\varphi}_n - \cos^2 \tilde{\varphi}_k}, & n \neq k; \end{cases} & b_{nk} &= \begin{cases} \frac{1}{\tilde{m}_0} \frac{2}{\sin^2 2\tilde{\varphi}_n}, & n = k; \\ \frac{1}{\tilde{m}_0} \frac{\sin \tilde{\varphi}_k}{\sin \tilde{\varphi}_n} \frac{2}{\sin^2 \tilde{\psi}}, & n \neq k; \end{cases} \\ c_{nk} &= \begin{cases} \operatorname{ctg} 2\tilde{\varphi}_n, & n = k; \\ (-1)^{n+k} \frac{\sin 2\tilde{\varphi}_k}{\cos^2 \tilde{\varphi}_n - \cos^2 \tilde{\varphi}_k}, & n \neq k; \end{cases} & d_{nk} &= \begin{cases} \frac{2 \cos 2\tilde{\varphi}_n}{\tilde{m}_0 \sin^2 2\tilde{\varphi}_n}, & n = k; \\ \frac{2 \sin \tilde{\varphi}_k \cos \tilde{\psi}}{\tilde{m}_0 \sin \tilde{\varphi}_n \sin^2 \tilde{\psi}}, & n \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Формули для обчислення функцій $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ на ділянці сполучення пластинки і ребра та функцій $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$, $C_1(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ на ділянці їх гладкого контактування одержані безпосереднім інтегруванням:

ділянка сполучення

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= -\sum_{n=1}^{m_0} C_n \left[\varphi - \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{m=2,4,\dots}^{2m_0-2} \frac{\cos m\varphi_n}{m} \sin m\varphi \right]; \quad B(\lambda) = -\sum_{n=1}^{m_0} D_n F(\varphi, \varphi_n); \\ C(\lambda) &= -\sum_{n=1}^{m_0} C_n y(t_n) F(\varphi, \varphi_n); \quad D(\lambda) = -\sum_{n=1}^{m_0} D_n x(t_n) F(\varphi, \varphi_n), \end{aligned} \quad (3.7)$$

де

$$F(\varphi, \varphi_n) = 2 \sum_{m=1,3,\dots}^{2m_0-1} \frac{\cos m\varphi_n}{m} \left(\sin m\varphi - \sin m \frac{\pi}{2} \right);$$

$$C_n = \left(\frac{A_n}{\sin \varphi_n} \cos t_n - \frac{B_n}{\sin \varphi_n} \sin t_n \right) \frac{q_n}{m_0}; \quad D_n = \left(\frac{A_n}{\sin \varphi_n} \sin t_n + \frac{B_n}{\sin \varphi_n} \cos t_n \right) \frac{q_n}{m_0};$$

$$t_n = 2 \operatorname{arctg} a_0 \cos \varphi_n; \quad \lambda \in [0; \alpha_0]; \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]; \quad \varphi_n = \frac{2n-1}{4m_0} \pi;$$

ділянка гладкого контактування

$$A_1(\lambda) = - \sum_{n=\tilde{m}_0+1}^{2\tilde{m}_0} \tilde{C}_n \left\{ \frac{\tilde{\varphi}}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin 2\tilde{\varphi} + \sum_{m=2,4,\dots}^{2\tilde{m}_0-2} \cos m\tilde{\varphi}_n \left[\frac{\sin m\tilde{\varphi}}{m} - \frac{\sin(m+2)\tilde{\varphi}}{2(m+2)} - \frac{\sin(m-2)\tilde{\varphi}}{2(m-2)} \right] \right\};$$

$$B_1(\lambda) = - \sum_{n=\tilde{m}_0+1}^{2\tilde{m}_0} \tilde{D}_n \tilde{F}(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_n); \quad C_1(\lambda) = - \sum_{n=\tilde{m}_0+1}^{2\tilde{m}_0} \tilde{C}_n y(\tilde{t}_n + \pi) \tilde{F}(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_n); \quad (3.8)$$

$$D_1(\lambda) = - \sum_{n=\tilde{m}_0+1}^{2\tilde{m}_0} \tilde{D}_n x(\tilde{t}_n + \pi) \tilde{F}(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_n),$$

де

$$\tilde{F}(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_n) = \sum_{m=1,3,\dots}^{2\tilde{m}_0-1} \cos m\tilde{\varphi}_n \left(\frac{\sin m\tilde{\varphi}}{m} - \frac{\sin(m+2)\tilde{\varphi}}{2(m+2)} - \frac{\sin(m-2)\tilde{\varphi}}{2(m-2)} - \sin \frac{m\pi}{2} \frac{2m^2-4}{m(m^2-4)} \right);$$

$$\tilde{C}_n = \left(\tilde{A}_n \cos \tilde{t}_n - \tilde{B}_n \sin \tilde{t}_n \right) \frac{\tilde{q}_n \sin \tilde{\varphi}_n}{\tilde{m}_0}; \quad \tilde{D}_n = \left(\tilde{A}_n \sin \tilde{t}_n + \tilde{B}_n \cos \tilde{t}_n \right) \frac{\tilde{q}_n \sin \tilde{\varphi}_n}{\tilde{m}_0};$$

$$\tilde{t}_n = 2 \operatorname{arctg} \tilde{a}_0 \cos \tilde{\varphi}_n; \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi]; \quad \tilde{\varphi} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]; \quad \tilde{\varphi}_n = \frac{2n-1}{4\tilde{m}_0} \pi.$$

Підставляючи (3.4) – (3.8) в систему (2.12), (2.13), (2.17), (2.18) та порівнюючи ліві і праві частини рівнянь у вузлах колокації $\lambda = \lambda_k$ ($\varphi = \varphi_k$), одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення сталих A_n , B_n , \tilde{A}_n , \tilde{B}_n , N_0 , L_b^0 , N_1 , L_b^1 , в яку невідома величина \tilde{a}_0 входить нелінійно. Для лінеаризації цієї системи необхідно зафіксувати певне значення β_0 з проміжку $[0; \pi - \alpha_0]$ так, щоб на ділянці гладкого контактування нормальні зусилля \tilde{T}_ρ були від'ємними, а на кінцях цієї ділянки дорівнювали нулю. Це можна зробити ітераційним методом дихотомії [11].

За нульове наближення β_0 обираємо середину проміжку $[0; \pi - \alpha_0]$, тобто $\beta_0^{(0)} = 0,5(\pi - \alpha_0)$. Для цього кута розв'язуємо відповідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь і визначаємо знаки контактних зусиль $\tilde{T}_\rho(\lambda_k)$ у вузлах інтерполяції. Якщо виявиться, що всі $\tilde{T}_\rho(\lambda_k)$ від'ємні, то за наступне значення β_0 обираємо середину проміжку $[\beta_0^{(0)}; \pi - \alpha_0]$, тобто $\beta_0^{(1)} = 0,5(\beta_0^{(0)} + \pi - \alpha_0)$. Якщо ж серед значень

$\tilde{T}_p(\lambda_k)$ є додатні і від'ємні або тільки додатні, то кут $\beta_0^{(1)} = 0,5\beta_0^{(0)}$ визначається серединою проміжку $[0; \beta_0^{(0)}]$. Продовжуючи ітераційний процес поділу відрізків навіпіл, кут β_0 можна визначити з наперед заданою точністю і побудувати наближений розв'язок поставленої задачі.

Запропонованим вище методом можна визначити мінімальну величину міжфазного розрізу β_0^{\min} , за якої його береги починають контактувати по всій довжині.

Аналогічні підходи до визначення розмірів і положення ділянок гладкого контактування пружних тіл запропоновані в роботах [5, 7, 11, 18].

Результати числового розрахунку. Для ізотропної ($\nu = 0,3$) пластинки з круговим ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$) отвором і підсилювального ребра з параметрами $h_0/h = 4/3$; $h_0/\eta = 2$; $\eta/R_0 = 0,2$; $\nu_0 = 0,3$; $\beta_0 = \pi/9$ рад досліджено вплив відносної жорсткості підсилення E_0/E на їх напружений стан при повному контактуванні берегів розрізу ($\alpha_0 + \beta_0 = \pi$). Результати числового розрахунку величин T_p , $S_{\rho\lambda}$, T_λ , $F_0\sigma^{(1)}$, $F_0\sigma^{(2)}$, $F_0\tau_{\rho\lambda}^{(c)}$ на межі поділу матеріалів пластинки та ребра при $p = 0$, $q = 1$; $m_0 = 150$, $\tilde{m}_0 = 44$ і повному контактуванні берегів міжфазного розрізу наведені на рис. 4 – 6.

Суцільні лінії відповідають випадку $E_0/E = 5$, $\beta_0^{\min} = 0,0401\pi$ рад; штрихові – $E_0/E = 10$, $\beta_0^{\min} = 0,0330\pi$ рад; штрихпунктирні – $E_0/E = 20$, $\beta_0^{\min} = 0,0283\pi$ рад.

Аналіз одержаних результатів показав, що незалежно від відносної жорсткості підсилювального ребра нормальні зусилля T_p неперервно змінюються при переході через кінці розрізу, а кільцеві зусилля T_λ обмежені біля кінців розрізу з боку ділянки гладкого контактування і необмежено зростають при підході до цих точок з боку розрізу. Дотичні зусилля $S_{\rho\lambda}$ на ділянці сполучення необмежено збільшуються при наближенні до кінцевих точок цієї ділянки. Цей факт узгоджується з результатами роботи [2] стосовно задачі про повний контакт берегів розрізу по дузі кола в однорідній ізотропній пластинці. Компоненти напруженого стану в підсилювальному ребрі по контуру Γ змінюються неперервно.

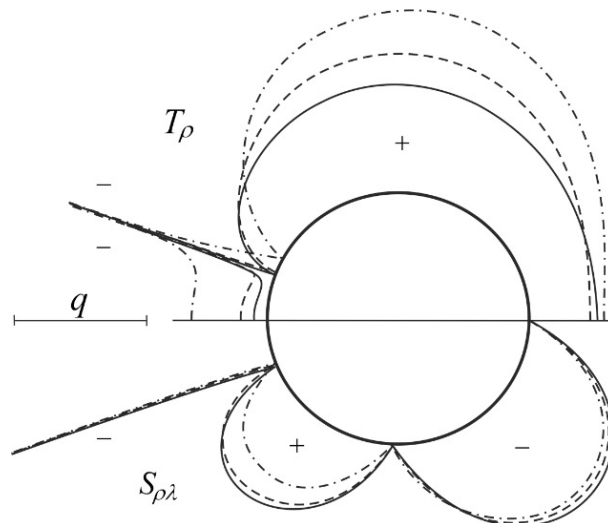


Рис. 4

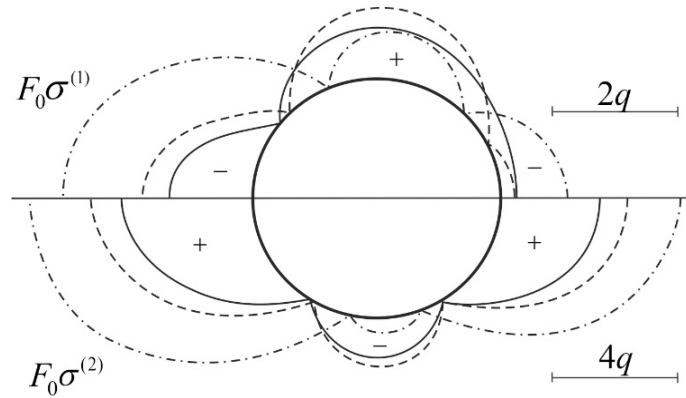


Рис. 5

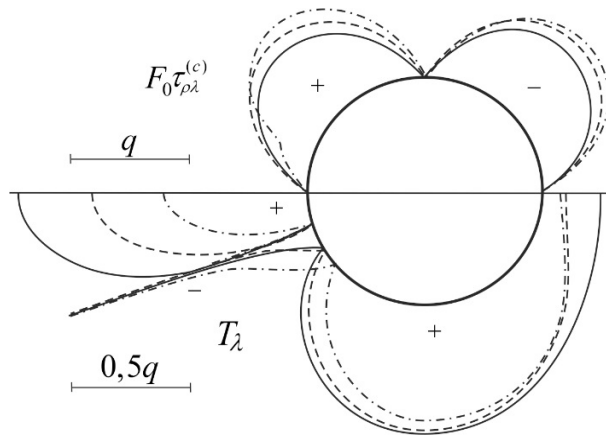


Рис. 6

У наведеному прикладі вплив відносної жорсткості підсилення на розподіл дотичних зусиль у пластинці і дотичних напружень $F_0\tau_{\rho\lambda}^{(c)}$ в осьовому волокні ребра та кільцевих зусиль на ділянці їх сполучення незначний. Максимальні значення нормальних напружень $F_0\sigma^{(1)}$, $F_0\sigma^{(2)}$ в крайніх волокнах ребра суттєво зростають при збільшенні E_0/E , особливо на ділянці розрізу. Для кільцевих зусиль в пластинці на цій ділянці спостерігається обернена залежність.

Збіжність методу оцінювалася порівнянням результатів розрахунку компонент НДС в пластинці та підсилювальному ребрі для різних значень m_0 та \tilde{m}_0 до $m_0=160$, $\tilde{m}_0=50$. Зауважимо, що ці результати практично не змінюються, починаючи з $m_0=100$, $\tilde{m}_0=40$, що свідчить про добру збіжність запропонованого методу.

Для оцінки його точності розглянемо задачу (2.17), (2.18) при $E/E_0 \rightarrow 0$. Її розв'язок співставимо з наближеним розв'язком аналогічної задачі, отриманим в [12]. Числові розрахунки величини ділянки гладкого контактування пластинки і абсолютно жорсткого ребра, нормальних T_ρ і кільцевих T_λ зусиль в характерних точках контуру Γ $\lambda = \pi/3$, $\lambda = \pi$ при $\nu = 0,3$; $m_0 = 150$, $\tilde{m}_0 = 44$ представлені в таблиці. В чисельнику подані результати, отримані запропонованим методом, а в знаменнику – набли-

женим методом [12]. Їх порівняння дає підставу стверджувати, що запропонований метод має достатню інженерну точність (відносна похибка не перевищує 0,32%), а компоненти НДС на контурі Γ в пластинці суттєво залежать від форми отвору (особливо на ділянках з найбільшою кривизною).

Таблиця

Форма отвору	β_0 (рад)	$T(\pi/3)$	$T(\pi)$	$T(\pi/3)$	$T(\pi)$
$\varepsilon = \varepsilon = 0; \quad \varepsilon = 0,2$	$\frac{9,15\pi}{180}$	$\frac{0,9203}{0,9231}$	$\frac{-0,0292}{-0,0293}$	$\frac{0,2760}{0,2769}$	$\frac{0,7496}{0,7500}$
	$\frac{9,12\pi}{180}$				
$\varepsilon = \varepsilon = \varepsilon = 0$	$\frac{35,45\pi}{180}$	$\frac{1,3728}{1,3750}$	$\frac{-0,5704}{-0,5712}$	$\frac{0,4116}{0,4125}$	$\frac{0,5551}{0,5564}$
	$\frac{35,42\pi}{180}$				
$\varepsilon = \varepsilon = 0; \quad \varepsilon = -0,2$	$\frac{9,80\pi}{180}$	$\frac{1,5782}{1,5769}$	$\frac{-1,6312}{-1,6278}$	$\frac{0,4724}{0,4730}$	$\frac{2,1912}{2,1923}$
	$\frac{9,79\pi}{180}$				

Висновок.

Сформульовано постановку задачі про гладкий контакт берегів міжфазного розрізу між нескінченною ізотропною пластинкою з криволінійним отвором, яка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, та замкненим пружним ребром. Замінюючи замкнене статично невизначене ребро еквівалентним йому відносно деформування статично визначеним розімкненим стержнем, побудовано повну систему рівнянь одновимірної теорії криволінійних стержнів великої кривизни для визначення компонент НДС і початкових параметрів. Крайові умови задачі на ділянці сполучення пластинки і ребра подані у вигляді умов ідеального механічного контакту в диференціальній формі, а на ділянці гладкого без тертя контакту – у вигляді рівності їх кривизн. Математичну модель задачі визначає ССІДР з ядрами Гільберта. Встановлено структуру контактних зусиль на кінцях ділянки сполучення пластинки і ребра та на кінцях ділянки їх гладкого контактування. Числову реалізацію задачі проведено методом механічних квадратур і колокації, яким досліджується випадок повного контакту берегів розрізу. Розвинений підхід та отримані результати без суттєвих змін можуть бути перенесені на ортотропні пластинки з еліптичним отвором, а також використані при дослідженні НДС на межі поділу матеріалів нескінченної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра за наявності на ділянці міжфазного розрізу центральної ділянки відставання, двох симетричних ділянок гладкого контактування і двох симетричних ділянок відставання, що прилягають до кінців ділянки сполучення пластинки і ребра.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано постановку і метод розв'язання задачі про контакт без тертя берегів міжфазного розрізу між нескінченною ізотропною пластинкою з криволінійним отвором і замкненим пружним ребром. Моделюючи підсилювальне ребро замкненим пружним стержнем великої кривизни, математичну модель задачі побудовано у вигляді системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних зусиль між пластинкою і ребром. Встановлено структуру зусиль на кінцях ділянок сполучення та гладкого контактування пластинки і ребра. Використовуючи методи механічних квадратур і колокації, досліджено випадок повного змикання берегів розрізу та вплив на напружений стан пластинки і збільшення відносної жорсткості ребра.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: криволінійний міжфазний розріз, ізотропна пластинка, підсилювальне ребро, контактні зусилля, ділянка гладкого контактування, система інтегрально-диференціальних рівнянь.

1. Годес А.Ю., Лобода В.В. Контактная задача для межфазной дуговой трещины // Вісник Дніпропетр. ун-ту: Сер.: Механіка. – 2015. – 19, № 2. – С. 3 – 17.
2. Гриліцький Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов. – Львів: Вид-во «Вища школа» при ЛДУ, 1975. – 116 с.

3. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – Москва: Наука, 1973. – 304 с.
4. Мартынович Т.Л., Юринец В.Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. – Львов: Вища школа, 1984. – 160 с.
5. Мартиняк Р.М., Середницька Х. І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
6. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. – Київ: Вища. школа, 2004. – 656 с.
7. Попов Г.Я. Некоторые контактные задачи для линейно-деформируемого основания. – Київ-Одеса: Вища. школа, 1982. – 167 с.
8. Рвачев В.Л., Проценко В.С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. – Киев: Наук. думка, 1977. – 236 с.
9. Сулим Г. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видав. центр НТШ, 2007. – 716 с.
10. Сяський А., Шевцова Н. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів // Вісник Тернопільського нац. техніч. ун-ту. – 2015. – 79, № 3. – С. 24 – 30.
11. Сяський А.О., Шевцова Н.В., Сяський В.А., Дейнека О.Ю. Міжфазні розрізи між пластинкою з отвором і ребром жорсткості. В кн. Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь (ред. Р.М. Мартиняк). – Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022. Розділ 13. – С. 322 – 353.
12. Сяський А., Шинкарьчук Н. Мішана контактна задача для ізотропної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска // Вісник Тернопільського нац. техніч. ун-ту. – 2011. – 16, № 1. – С. 16 – 21.
13. Улітко А.Ф., Острик В.І. Міжфазна тріщина на межі розділу кругового включення і матриці // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології – 2006. – Вип. 3. – С. 138 – 149.
14. Филін А.П., Тананайко О.Д., Чернева І.М., Шварц М.А. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем. – Ленинград: Стройиздат, 1983. – 232 с.
15. Шваб'юк В.І., Маткова А.В., Садівський В.М. Про уточнення рівнянь кривих брусів і кілець // Наук. нотатки Луцького індустр. ін-ту. – 1994. – Вип. 25. – С. 51 – 59.
16. Hart E.L., Hudramovich V.S. Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations // Strength of Materials and Theory of Structures. – Kyiv: KNUBA, 2022. – 108. – P. 77 – 86.
17. He B., Chu S.S., Qi G., Sun C.Q. Finite Element Analysis of Coating-Matrix Interface Crack // Appl. Mechanics and Materials. – 2014. – 684. – P. 64 – 69.
18. Siaskyi A., Siaskyi V., Shevtsova N. Contact of the edges of the interphase cut on the arc of the circle between the isotropic plate and the closed elastic rib // Sci. J. of TNTU. – Tern.: TNTU, 2021. – 103, № 3. – P. 88 – 97.

Надійшла 19.07.2023

Затверджена до друку 12.12.2023