

М. М. Ткачук^{1,2}, А. М. Ткачук²,
А. В. Грабовський¹, М. А. Ткачук¹

НЕЛІНІЙНА СТАТИЧНА РЕАКЦІЯ ПРУЖНОГО КІЛЬЦЯ ІЗ ВИСТУПАМИ В ОПОРАХ РОТОРІВ

¹Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут», МОН України,
вул. Курпичова, 2, Харків, Україна; e-mail: tma@tmm-sapr.org;
²Карлстадський університет, Karlstads Universitet.
Dataskyddsbud, 651 88, Karlstad, Швеція; e-mail: m.tkachuk@tmm-sapr.org

Abstract. The response of a radial flexible ring with the flanges in supports of machine rotors to radial deflection is studied. Two models of deformation and contact interaction of an elastic element with two rigid bodies inside and outside of the ring are developed. These models are based on the variational formulations relative to the unknown forces and displacements, respectively. The presence of gaps or tight fit from both sides in the contact between the ring and the rigid bodies is taken into account. The substantially nonlinear nature of the static reaction of the studied ring to the radial deflection is observed. The radial response curves are obtained in a wide range of design parameters. This makes it possible to make a well-justified choice of an elastic damper with the desired stiffness properties.

Key words: contact interaction, curved beams, elastic ring damper, Kalker's principle, nonlinear support stiffness.

Вступ.

Значна частина сучасних машин працює в умовах високих частот обертання їхніх роторних частин [9, 11, 20]. Відповідно, можуть виникати проблеми зі стійкістю руху цих елементів. Із метою аналізу таких режимів будуються різні аналітичні та чисельні моделі та методи [3, 4, 7, 11, 14]. Для уникнення небажаних режимів руху таких роторних частин залучаються різні способи, у тому числі – застосування пружних проміжних кілець (ППК) чи інших пристроїв [5, 12, 16, 18, 19]. Зокрема, застосування ППК зазвичай покликане зменшити жорсткість опор роторних частин. Цим самим можна відійти від резонансних режимів їх руху.

У випадку застосування ППК мається на увазі, що вони мають лінійну статичну характеристику [9, 17, 18]. Тобто, жорсткість ППК приймається сталою. Проте конструктивне виконання цих кілець та умови їх спряження із іншими елементами конструкції ротора та підшипникових опор свідчать про те, що у загальному випадку статична характеристика (реакція) ППК може бути нелінійною [17, 18].

Отже, необхідно визначити більш реальну статичну характеристику ППК, що може нелінійним чином залежати від параметрів контактної взаємодії. Для цього слід побудувати відповідні моделі, які враховують контактну взаємодію кільця зі спряженими деталями і проаналізувати закономірності напружено-деформованого стану (НДС) пружних проміжних кілець.

У даній роботі розвинуто моделі напружено-деформованого стану ППК на основі удосконалення та адаптації підходів теорії варіаційних нерівностей [6, 10, 13]. Також розвинуто та адаптовано варіаційні принципи типу Калькера чи мінімуму додаткової роботи [8, 15, 17]. При цьому розв'язок відносно сил і моментів є точним у межах моделі криволінійного стержня [17], але визначення деформованого стану у межах моделі суцільного пружного тіла вимагає скінченно-елементної апроксимації [21] переміщень та умов контакту.

§1. Постановка задачі.

Розглянемо конструкцію опори роторної частини (рис. 1).

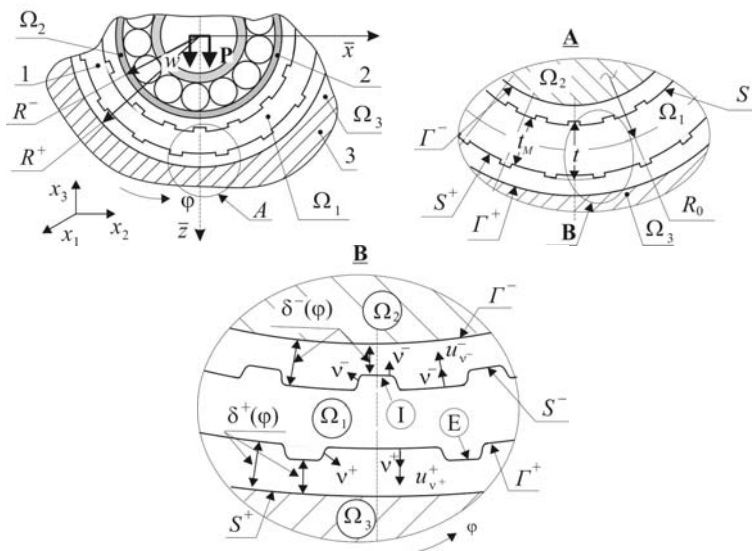


Рис. 1

Основне навантаження на підшипникову опору – радіальна сила P , яка діє у напрямку від осі вала ротора через підшипник на корпус. Між цими елементами розміщується пружне проміжне кільце. Для аналізу напружено-деформованого стану цього ППК побудовано розрахункову схему, зображену на рис. 1. У цій схемі досліджуване кільце 1 розміщене між двома жорсткими тілами 2 (умовно – вал із підшипником) і 3 (умовно – корпус). З боку тіла 2 діє у радіальному напрямку сила P . Ця сила компенсує статичну та динамічну нерівноваженість роторної частини [9]. Така сила створюється внаслідок зміщення w тіла 2 та деформування ППК 1 . Тіло 3 – жорстко закріплене (нерухоме). Тіло 1 розміщене між тілами 2 і 3 із зазорами δ («додатній») або натягами («від’ємний»). Внутрішній контакт (тіла $1, 2$) реалізується уздовж поверхонь S^- та Γ^- . Зовнішній контакт (тіла $1, 3$) відбувається між поверхнями S^+ та Γ^+ . Зазори між контактуючими тілами – δ^- (тіла $1, 2$) та δ^+ (тіла $1, 3$). Тертям нехтуємо. ППК має рівномірно розташовані за коловою координатою φ (через кути проміжків (секторів) $2\pi/n$) n внутрішніх (I) та зовнішніх (E) виступів (опор). Саме ці опори (рис. 1) першою чергою вступають у контакт із тілами 2 і 3 , відповідно.

Ставиться задача визначення НДС проміжного пружного кільця 1 за умов навантаження з боку тіла 2 силою P (або його зміщенням на відстань w). Також слід визначити розподіли областей контакту та контактних сил. У кінцевому підсумку вимагається визначити статичну характеристику досліджуваної системи у вигляді залежностей « $P-w$ », а також НДС пружного проміжного кільця.

§2. Основна система рівнянь та нерівностей.

2.1. Модель напружено-деформованого стану пружного проміжного кільця.

НДС проміжного пружного кільця можна моделювати у різних постановках.

Стержнева модель. Пружне кільце подається у вигляді сукупності $2n$ криволінійних стержнів. Кожен із цих сегментів є почергово внутрішнім або зовнішнім виступом збільшеної товщини, або ж тоншою гнучкою ділянкою. Нехтуючи асиметрією виступів, вважатимемо, що центральна лінія для усіх цих ділянок збігається із тотож-

ним колом радіуса R_0 . Вважатимемо також, що контакт кільця із внутрішньою та зовнішньою жорсткими перепонами відбувається виключно на краях виступів. В такому разі, спираючись на підхід, описаний у [8, 17], можна побудувати стержневу модель ППК, наведену на рис. 2.

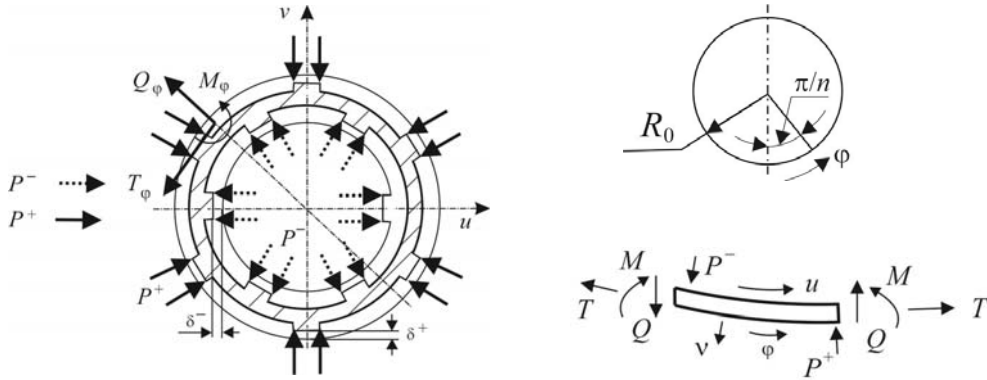


Рис. 2

Тут до розгляду вводяться силові фактори: згинний момент M , перерізна сила Q та сила розтягу – стиску T . Ці силові фактори залежать від кутової координати φ (рис. 1, 2). Зовнішнім навантаженням є контактні сили P_i^- , P_i^+ , що діють у вузлах (опорах I та E).

Тривимірна модель. У системі декартових координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 1) розподіл компонент вектора переміщень $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, тензорів деформації ε та напружень σ визначаються за співвідношеннями теорії пружності [1]:

$$\varepsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3; \quad (2.2)$$

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0, \quad (2.3)$$

де C_{ijkl} – компоненти тензора пружних сталей матеріалів.

2.2. Граничні умови. *Стержнева модель.* Для цієї моделі справедливі умови невід'ємності вузлових сил, які діють із боку тіл 2 і 3 (рис. 1, 2):

$$P_i^- \geq 0; \quad P_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

При цьому поточний зазор у актуальному стані на кожному вузлі теж є невід'ємним

$$g_i^- = \delta^- - w \cos\left(\frac{2\pi}{n}(i-1)\right) \geq 0; \quad g_i^+ = \delta^+ \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Просторова модель. Відповідно до відомих постановок [2] маємо умови невід'ємності контактної тиску q на поверхнях контакту

$$q|_{S^-} \equiv -\sigma_{\nu^-}|_{S^-} \geq 0; \quad q|_{S^+} \equiv -\sigma_{\nu^+}|_{S^+} \geq 0, \quad (2.6)$$

де σ_{ν^-} , σ_{ν^+} – нормальні напруження на поверхнях S^- та S^+ із нормальними ν^- та ν^+ , відповідно (рис. 1). Крім того, вимагається виконання умов непроникнення точок поверхонь S^- та S^+ тіла 1 у жорсткі обмеження (тобто у тіла 2, 3):

$$g^-|_{S^-} \equiv \delta^- - u_{v^-} - \omega \cos \varphi \geq 0; \quad g^+|_{S^+} \equiv \delta^+ - u_{v^+} \geq 0, \quad (2.7)$$

де u_{v^-} , u_{v^+} – нормальні переміщення на поверхнях S^- та S^+ , відповідно.

2.3. Варіаційні постановки задачі про визначення напружено-деформованого стану пружного проміжного кільця. На протигагу локальним постановкам, у випадку, що розглядається, доцільно застосувати варіаційні формулювання.

Стержнева модель. Відповідно до робіт [8, 17], для задач одностороннього контакту пружних тіл може бути сформульований варіаційний принцип Калькера. Він полягає в тому, що дійсні внутрішні зусилля в системі та контактні зусилля мінімізують функціонал повної додаткової енергії за умов статичної рівноваги. Для задачі визначення НДС пружних проміжних кілець функціонал додаткової енергії відносно невідомих розподілів осьової сили T , згинного моменту M і контактних сил P_i^- , P_i^+ на внутрішній та зовнішній поверхнях кільця має вираз

$$\Phi = \int_0^{2\pi} R \left(\frac{T^2(\varphi)}{2EA(\varphi)} + \frac{M^2(\varphi)}{2EI_z(\varphi)} \right) d(\varphi) + \left[\sum_i P_i^+ g_i^+ - \sum_j P_j^- g_j^- \right]. \quad (2.8)$$

Внутрішні зусилля $T(\varphi)$ та $M(\varphi)$ визначаються за контактними реакціями P_i^- , P_i^+ , осьовою силою T_0 та згинним моментом M_0 в довільному перерізі з умов рівноваги. Задача (2.8) є задачею умовної мінімізації, адже для контактних сил мають виконуватися нерівності (2.4). Виступи з ненульовою додатною реакцією $P_i^- > 0$, $P_i^+ > 0$ перебувають в контакті.

Просторова модель. Відповідно до підходів теорії варіаційних нерівностей [2, 6, 13, 17], вихідна задача еквівалентна проблемі мінімізації функціоналу повної внутрішньої енергії

$$2\Pi = \int_{(\Omega_1)} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) d\Omega. \quad (2.9)$$

Мінімізація (2.9) здійснюється на множині розподілів переміщень \mathbf{u} , які задовольняють умовам (2.7). Апроксимуючи пробні поля переміщень \mathbf{u} за допомогою базисних функцій методу скінченних елементів [21], задачу (2.9), (2.7) можна звести до задачі квадратичного програмування відносно вузлових значень \mathbf{u} . Тоді за співвідношеннями (2.1), (2.2) визначаються компоненти тензорів ε , σ . Тобто, визначаються компоненти НДС всередині області Ω_1 . А на границях S^- та S^+ набуття співвідношень (2.7) значень рівності визначає область дійсного контакту. Відповідно, з (2.6) визначаються розподіли контактної тиску q .

§3. Чисельні моделі напружено-деформованого стану пружних проміжних кілець.

Для чисельної реалізації розроблених підходів створені дві моделі. Перша побудована для варіанту стержневої моделі. Друга побудована на базі методу скінченних елементів [21]. Відповідно, розроблені чисельні моделі застосовані до розрахунків НДС пружних проміжних кілець із урахуванням контактної взаємодії зі спряженими тілами.

§4. Результати розв'язання тестових задач.

4.1. Результати аналізу статичної характеристики пружного проміжного кільця за допомогою принципу мінімуму Калькера додаткової енергії за стержневою моделлю. На основі розробленої стержневої математичної моделі контактної взаємодії ППК із жорсткими обмеженнями побудовано статичні його характеристики. Якісний вигляд залежностей « $P-w$ » наведено на рис. 3 для різних випадків («offset» –

натяг, «exact fit» – без зазору – натягу, «gap» – зазор), отримані за стержневою моделлю для певного варіанту ППК. Тут жорсткість $k = dP/dw$. Видно, що вигляд статичної характеристики сильно змінюється при переході від зазору у контакті до натягу. Зміна у кількості виступів кільця, що перебувають у контакті з зовнішньою опорою та внутрішньою обоймою, відображається у раптовій зміні жорсткості пружної реакції, як видно на рис. 3, б.

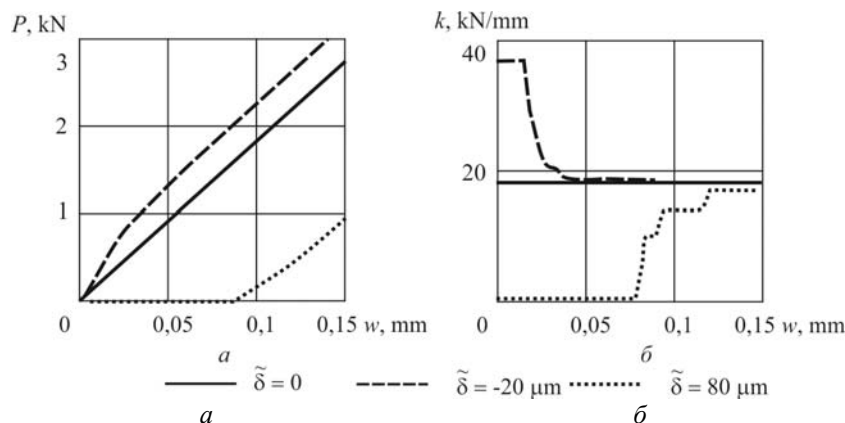


Рис. 3

4.2 Результати аналізу статичної характеристики пружного проміжного кільця за просторовою скінченно-елементною моделлю. Як уже зазначалося, статична характеристика видозмінюється залежно від зазору або натягу. Відповідно, становить інтерес отримання сімейства характеристик для різної величини зазору-натягу. Попередніми дослідженнями встановлено, що на статичну характеристику впливають не окремі складові «зазор-натяг», тобто δ^+ та δ^- , а їх сумарне значення $\delta^\Sigma = \delta^+ + \delta^-$.

Тому для побудови статичної характеристики було обрано варіант відсутності зазору між внутрішнім тілом (вал) та ППК ($\delta^- = 0$). Варіювався сумарний зазор δ^Σ за рахунок зазору δ^+ у зоні сполучення із зовнішнім тілом.

Розглядається приклад пружних проміжних кілець із бронзи (модуль пружності $E = 110$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,34$), кількість опор I та E – по 10. Внутрішній радіус зовнішнього кільця $R^+ = 40$ мм, зовнішній радіус внутрішнього кільця $R^- = 38$ мм, висота гребенів $0,5 \cdot 10^{-3}$ м. Товщина пружного кільця із гребенями – $2 \cdot 10^{-3}$ м.

Ширина пружного проміжного кільця – $1,7 \cdot 10^{-2}$ м. Здійснюється кінематичне навантаження – задається зміщення $w \in [0; 1,2 \cdot 10^{-3}]$ м.

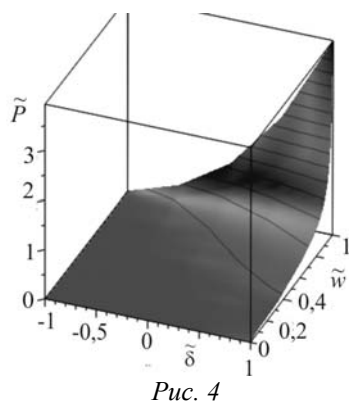


Рис. 4

Контролюється величина відносної реакції $\tilde{P} = P(\delta^\Sigma, w) / P_0(0, w_0)$, де $w_0 = 1,2 \cdot 10^{-3}$ м – максимальне кінематичне навантаження, а P_0 – реакція при максимальному кінематичному навантаженні для випадку $\delta^\Sigma = 0$.

На рис. 4 – вигляд статичної характеристики у вигляді поверхні у координатах

$$\tilde{w} = w / w_0; \quad \tilde{\delta} = \delta^\Sigma / \delta_{\max}, \quad (2.10)$$

де $\delta_{\max} = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м.

На рис. 5 наведено залежність відносної реакції в опорі \tilde{P} від відносних зазору – натягу $\tilde{\delta}$ та величини кінематичного зміщення \tilde{w} (зображено сімейство отриманих статичних характеристик у вигляді набору кривих $\tilde{P}(\tilde{w})$ за різних $\tilde{\delta}^\Sigma$).

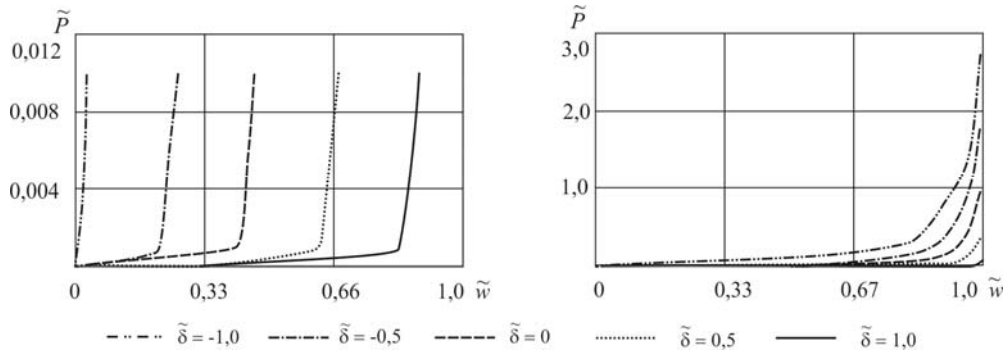


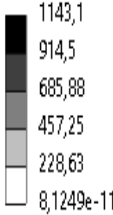

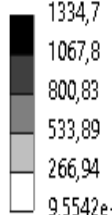

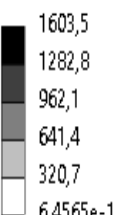

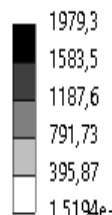

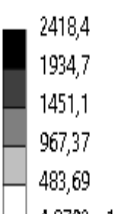

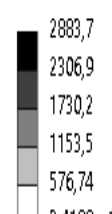

Рис. 5

У табл. 1 та 2 – характерні розподіли контактного тиску за $\delta^\Sigma = 0$ та різних значень w та розподіли еквівалентних за Мізесом напружень у ППК, відповідно.

Таблиця 1

w , 10^{-3} м	Значення, МПа	Розподіл контактного тиску, МПа	w , 10^{-3} м	Значення, МПа	Розподіл контактного тиску, МПа
0,45	2000 2000 1200 600 400 100 0		0,5	2000 2000 1200 600 400 100 0	
0,55	2000 2000 1200 600 400 100 0		0,6	2000 2000 1200 600 400 100 0	
0,65	2909,1 2000 1200 600 400 100 0		0,7	4272,6 2000 1200 600 400 100 0	

Таблиця 2

w , 10^{-3} м	Значення, МПа	Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень, МПа	w , 10^{-3} м	Значення, МПа	Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень, МПа
0,45	 1143,1 914,5 685,88 457,25 228,63 8,1249e-11		0,5	 1334,7 1067,8 800,83 533,89 266,94 9,5542e-11	
0,55	 1603,5 1282,8 962,1 641,4 320,7 6,4565e-11		0,6	 1979,3 1583,5 1187,6 791,73 395,87 1,5194e-11	
0,65	 2418,4 1934,7 1451,1 967,37 483,69 4,8702e-11		0,7	 2883,7 2306,9 1730,2 1153,5 576,74 3,4188e-11	

Слід зазначити, що отримані результати за характером відповідають результатам, отриманим за стержневою моделлю.

§5. Аналіз отриманих результатів та висновки.

Здійснені розробки та отримані результати досліджень дають підстави для констатації таких закономірностей та висновків.

1. За відсутності зазорів та натягів статична характеристика пружного проміжного кільця складається із двох ділянок. Перша – майже лінійна частина за умов незмінної кількості виступів, що перебувають у контакті. Це видно зі значень контактних сил P_i^- , P_i^+ у стержневій моделі та картин розподілів контактної тиску у просторовій моделі у табл. 1. Лінійна ділянка реакції раптово закінчується у ході зростання w із вибором зазору між кільцевою частиною ППК та спряженим тілом (рис. 3 – 5). Тоді починається більш крута ділянка, оскільки замість вигину міжопорних секторів пружного проміжного кільця починається їх стиск по товщині.

2. За наявності натягу у sprzęженні пружного проміжного кільця із сусідніми тілами статична реакція відрізняється поступовою зміною жорсткості (рис. 3 – 5). Це відбувається внаслідок того, що зі зростанням радіального відхилення частина виступів у верхній половині кільця виходять із контакту. У результаті нахил кривої зменшується порівняно із початковим. Врешті, як і раніше, із вибором зазору між виступами кільце втрачає початкову гнучкість та починає передавати зусилля між ротором і опорою у більш жорсткий спосіб.

3. За наявності зазору у з'єднанні пружного проміжного кільця із сусідніми тілами перед згаданими вище (§ 1, 2) двома ділянками з'являється «нульова» ділянка (рис. 3 – 5). Тобто, до вибору початкового зазору реакція $P \equiv 0$. Крім того, наступні ділянки – більш пологі, ніж для інших випадків.

4. В цілому статичну характеристику « $P - w$ » можна апроксимувати у загальному випадку «трилінійною» залежністю (§ 1 – 3). При цьому, чим більший натяг, тим більша жорсткість пружного проміжного кільця на кожній ділянці. Навпаки, чим більший зазор, тим ця жорсткість менша. Таким чином, неправомірно вводити у математичну модель деяку спрощену «еквівалентну» (осереднену) жорсткість ППК, оскільки це привносить принципову похибку, яку усунути чи скоригувати у межах спрощеної таким чином моделі неможливо.

5. Напружено-деформований стан пружних проміжних кілець характеризується тим, що при виборі зазору відбувається вигин міжопорних ділянок ППК. Тобто, контактний тиск спочатку локалізується на опорах (I та E). Потім за зростання навантажень починається контакт у середній частині міжопорних ділянок. Розподіл напружень корелює із таким характером зміни контакту (табл. 1, 2).

Висновок.

У цілому слід зазначити, що розроблені варіаційні постановки мають ті переваги, що дають можливість враховувати більш широкую множину значущих чинників, ніж традиційні підходи. Відповідно, розроблені моделі є більш адекватними, а отримувані результати, зокрема, статичні характеристики, можуть слугувати для побудови більш достовірних моделей динамічних процесів у роторних системах із опорами, що містять пружні проміжні кільця.

РЕЗЮМЕ. Досліджено реакцію радіального гнучкого кільця із виступами в опорах роторів машин на радіальне зміщення. Розроблено дві моделі деформування та контактної взаємодії пружного елемента з двома жорсткими тілами зсередини та ззовні кільця. Ці моделі ґрунтуються на варіаційних постановках відносно шуканих сил та переміщень, відповідно. Враховано наявність зазорів або натягів із обох сторін у контакті між кільцем та жорсткими тілами. Установлено суттєво нелінійний характер статичної реакції досліджуваного кільця на радіальне зміщення. Чисельно отримано графіки реакції на радіальне навантаження в широкому діапазоні конструкційних параметрів. Це уможливило обґрунтований вибір пружного демпфера із бажаними властивостями жорсткості.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: контактна взаємодія, криволінійні стержні, пружне кільце, принцип Калькера, нелінійна жорсткість опор.

1. Васильду К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
2. Кравчук А.С., Суряков В.А. Численное решение геометрически нелинейных контактных задач // Докл. АН СССР. – 1981. – 259, № 6. – С.1327 – 1329.
3. Avramov K.V., Mikhlin Y.V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems // Appl. Mech. Rev. – 2013. – 65, N 2. – P. 020801-1 – 020801-20.
4. Avramov K., Shulzhenko M., Borysiuk O., Pierre C. Influence of periodic excitation on self-sustained vibrations of one disk rotors in arbitrary length journal bearings // Int. J. Nonlin. Mech. – 2015. – 77. – P. 274 – 280.
5. Cha M., Glavatskih S. Nonlinear dynamic behaviour of vertical and horizontal rotors in compliant liner tilting pad journal bearings: Some design considerations // Tribology Int. – 2015. – 82. – P. 142 – 152.

6. Hlavacek I., Haslinger J., Necas J. [and oth.]. Solution of Variational Inequalities in Mechanics. – Berlin: Springer – Verlag, 1988. – 327 p.
7. Hua C., Cao G., Rao Z. et al. Coupled bending and torsional vibration of a rotor system with nonlinear friction // J. Mech. Sci. Technol. – 2017 – **31**. – P. 2679 – 2689.
8. Kalker J.J. Variational and non-variational theory of frictionless adhesive contact between elastic bodies // Wear. – 1987. – **119**, N 1. – P. 63 – 76.
9. Kelson A.S., Cymanskii H.P., Yakovlev B.H. Dynamics of Rotor-Bearing Systems. – Moscow: Nauka, 1982. – 280 p.
10. Kikuchi N., Oden J.T. Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods // SIAM Studies in Appl. and Numer. Mathem. Philadelphia. – 1986. – **8**. – P. 0-156–161.
11. Martynenko G. Application of nonlinear models for a welldefined description of the dynamics of rotors in magnetic bearings // Eureka: Physics and Engineering. – 2016. – 3. – P. 3 – 12.
12. Martynenko G. Resonance mode detuning in rotor systems employing active and passive magnetic bearings with controlled stiffness // Int. J. Automotive and Mech. Engng. – 2016. – **13**. – P. 3293.
13. Panagiotopoulos P.D. Inequality Problems in Mechanics and Applications: Convex and Nonconvex Energy Functions. – Boston: Birkhäuser Verlag, 1985. – 412 p.
14. Shi M.L., Wang D.Z., Zhang J.G. Nonlinear dynamic analysis of a vertical rotor-bearing system // J. Mech. Sci. Technology. – 2013. – **27**, N 1. – P. 9–19.
15. Tkachuk M.M., Grabovskiy A., Tkachuk M.A., Saverska M., Hrechka I. A semi-analytical method for analys of contact interaction between structural elements along aligned surfaces // Eastern-European J. of Enterprise Technologies. – 2020. – **1**, N 7(103). – P. 16 – 25.
16. Tkachuk M.M., Grabovskiy A., Tkachuk M.A., Shut O. Computational-Experimental Evaluation of Stiffness Response in Elastic Supports of Rotor Systems. In: Nonlinear Mechanics of Complex Structures (eds. Altenbach H., Amabili M., Mikhlin Y.V.). – 2021. – P. 353 – 366.
17. Tkachuk M., Grabovskiy A., Tkachuk A. Numerical and Analytical Analysis Methods for Radial Response of Flexible Ring Dampers. In: Rackov M., Mitrović R., Čavić M. (eds) Machine and Industrial Design in Mechanical Engineering. KOD 2021. Mechanisms and Machine Science. – Cham: Springer, 2022. – **109**. – P. 499 – 506.
18. Tkachuk M.M., Grabovskiy A., Tkachuk M.A., Zarubina A., Lipeyko A. Analysis of elastic supports and rotor flexibility for dynamics of a cantilever impeller // J. Phys.: Conf. Ser. – 2021. – **1741**. – P. 012043-1 – 012043-10.
19. Tkachuk M., Shut O., Marchenko A., Grabovskiy A. et al. Strength and Stability Criteria Limiting Geometrical Dimensions of a Cantilever Impeller // SAE Technical Paper. – 2021. – P. 2021-01-5056.
20. Zhang Y., He L., Yang J., Wan F., Gao J. Vibration control of an unbalanced single-side cantilevered rotor system with a novel integral squeeze film bearing damper // Appl. Sci. – 2019. – **20**, N 9. – P. 4371-1 – 4371-18.
21. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. – Oxford: Butterworth – Heinemann, 2013. – 756 p.

Надійшла 15.08.2023

Затверджена до друку 12.12.2023