

Н.М.Д'яченко, К.М.Дмитрів

**ВПЛИВ ЗАКОНУ ДЕФОРМУВАННЯ ПОКРИТТЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ
ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ НА РІЗНИХ СТАДІЯХ
ЗНОШУВАННЯ**

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, 69600, Запоріжжя, Україна;
e-mail: dyachenkonata69@gmail.com*

Abstract. An axisymmetric contact problem on the wear of a thin layer-coating by the annular in plan punch while rotating around its axis is considered. The base of the punch is conformally aligned with the coating surface. The problem is solved by the time-stepping method. The power law of the coating deformation determines the integral equation at each time step, which is reduced to Hammerstein's equation. The conditions for the existence of a unified solution of this equation are found by the iterative method. An effect of the annulus sizes, the coating deformation law, and the conformal contact function on contact characteristics at different stages of the wear process is analyzed. The gradual change regularities of the pressure function over time are revealed. The behavior of the contact characteristics, when the inner radius of the annulus tends to zero, is studied.

Key words: axisymmetric wear contact problem, annular punch in plan, conformal contact, power law of coating deformation.

Вступ.

При контактній взаємодії внаслідок тертя з часом виникає часткове руйнування контактуючих тіл, що призводить до зміни їхньої форми у процесі зношування [2, 11, 15, 21]. Важливим напрямом досліджень у сфері машинобудування є вивчення змінних контактних характеристик та їхнього впливу на термін експлуатації машин і механізмів, надійність їхньої роботи. Покриття використовуються для продовження терміну експлуатації машин [1, 11].

Як відомо, зносоконтактна задача за наявності покриття пружного півпростору має лише обмежені розв'язки на відміну від задачі за відсутності покриття, яка в нульовий момент часу має за розв'язок функцію тиску, необмежену в «кутових точках». Тому покриття дозволяє уникнути пластичних деформацій на межі площадки контакту під штампом з плоскою основою [1, 15].

Розглянемо осесиметричну зносоконтактну задачу про взаємодію абсолютно жорсткого, кільцевого в плані штампа з півпростором з тонким покриттям, яке зношується внаслідок обертання штампа навколо власної осі. Розв'язок цієї задачі можна використати для обчислення зносу в дисковому гальмі, осьовому підшипнику ковзання, муфті зчеплення та інших спряженнях.

У роботі розглянуто узгоджений контакт штампа і покриття, що передбачає взаємну повторюваність поверхонь [6, 17, 19]. Найпростішим узгодженим є контакт тіл з абсолютно плоскими поверхнями. Також розглянуто випадок поверхонь, що визначені функціями квадратичного типу.

В [15] показано, що швидкість зміни профілю зношеної поверхні тіла в загальному випадку залежить від контактної тиску за степеневим законом, зокрема, лінійним.

Дослідженню плоскої зносоконтактної задачі за різними законами зношування присвячено роботу [3], де виявлено, що нелінійний закон впливає на сповільнення процесу зношування. У даній роботі проведено розрахунки для степеневому закону зношування.

Дослідження в галузі зносоконтактних задач спрямовані на розв'язання плоских [2, 3, 5, 10, 11, 13, 15, 17, 19], осесиметричних [7, 14, 15, 20, 21], просторових задач [8, 15 – 18, 23]. Крім того, розглядають задачі з різноманітними, зокрема, динамічними навантаженнями [11, 22], різними фізичними властивостями тіл [11, 17, 19, 23, 24], задачі, які передбачають незмінну [3, 11, 13 – 16, 18 – 20] та змінну за часом площадки контакту [7, 10, 15, 17, 21, 24].

У монографії [15] досліджено зносоконтактні задачі в осесиметричній та плоскій постановці, вписано відповідні інтегральні рівняння. За відомої осадки штампа в осесиметричному випадку отримано розв'язок лінійної задачі зношування півпростору без покриття на основі розкладу за власними функціями інтегрального оператора рівняння, а числові результати наведено лише для стадії усталеного зносу. Для випадку плоскої задачі в [15] застосовано покроковий за часом метод, який використано в цій роботі.

Найчастіше в контактних задачах покриття описується моделлю Вінклера [1, 11, 15]. Згідно з цією моделлю покриття може деформуватися за лінійним та степеневим законами [1]. Саме так моделюється тонке покриття тут та досліджується вплив значених законів на контактні характеристики.

Однією з основних відмінностей задач з лінійним та степеневим законами деформування покриття є тип інтегрального рівняння зносоконтактної взаємодії. Якщо покриття деформується за лінійним законом, то за фіксованого часу таке рівняння є рівнянням Фредгольма другого роду, якщо за степеневим, то рівняння можна звести до рівняння Гаммерштейна. Проведено дослідження останнього на існування єдиного розв'язку, який можна знайти методом послідовних наближень.

До розв'язання інтегральних рівнянь плоскої контактної задачі зношування покриття, що деформується за лінійним законом, у працях [2, 3, 15] застосовано комбінацію покрокового за часом методу і методу чисельного інтегрування. Поєднання таких методів разом з методом послідовних наближень застосовано до осесиметричної задачі зношування покриття, що деформується за степеневим законом.

У роботі досліджено осесиметричну контактну задачу про обертання кільцевого в плані штампа на півпросторі-основі з тонким покриттям, що деформується за степеневим законом (зокрема, лінійним) на різних стадіях процесу зношування з пошуком невідомого осідання штампа. Проаналізовано вплив закону деформування покриття, розмірів кільця на зносоконтактні характеристики. У випадку наближення до нуля внутрішнього радіуса кільця простежено особливості в точках, близьких до центру. Розглянуто також узгоджений контакт, визначений квадратичною функцією, для пружної двошарової основи та встановлено зв'язок між результатами у випадку плоских та неплоских поверхонь узгодженого контакту.

§1. Постановка задачі та її рівняння.

Розглянемо осесиметричну зносоконтактну задачу, в якій циліндричний, кільцевий у плані штамп з внутрішнім радіусом a , зовнішнім – b обертається навколо власної осі з кутовою швидкістю ω та вдавлюється нормальною силою P у півпростір з тонким шаром-покриттям. Товщина покриття не перевищує h_0 , причому $h_0/b \ll 1$.

Нехай E_i , ν_i – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона шару ($i=1$) і основи ($i=2$), причому $E_1 < E_2$. Уведемо позначення: $E_i^* = E_i / [2(1-\nu_i^2)]$, $n = E_1^* / E_2^*$.

Припустимо, що поверхні штампа і шару узгоджені, а між шаром і основою виконуються умови ідеального механічного контакту. На рис. 1 зображено схему контактної взаємодії з позначеннями на виносках: a – узгоджений контакт, визначений плоскими поверхнями, b – визначений квадратичною функцією.

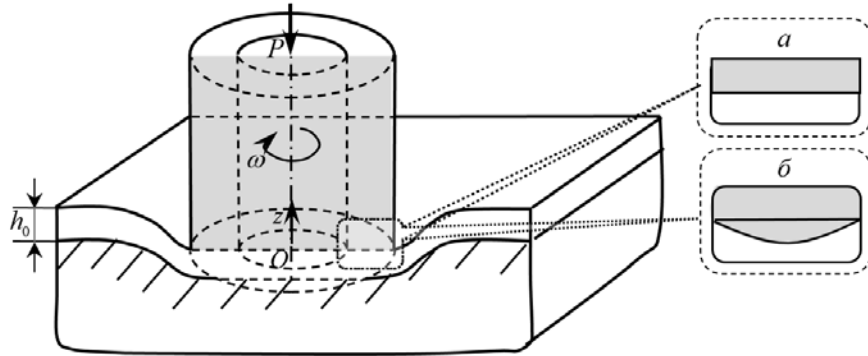


Рис. 1

Задачу розв'язано в діапазоні часу, в якому відсутнє повне зношування покриття, що буде відслідковуватися на кожному кроці чисельних розрахунків.

У процесі зношування площадка контакту залишається незмінною, а шар змінює товщину $h(r, t)$ зі швидкістю, що підпорядковується закону

$$\frac{\partial h(r, t)}{\partial t} = K_w \omega r \left(\frac{p(r, t)}{p^*} \right)^\alpha, \quad a \leq r \leq b, \quad (1.1)$$

де $p(r, t)$ – контактний тиск; K_w – коефіцієнт зносу, що залежить від умов взаємодії; p^* – деякий характерний тиск; $\alpha \geq 1$ – показник степеневого закону зношування [15].

Дотичні напруження $\tau_{z\theta}(r, t)$ на площадці контакту, що виникають у процесі обертання штампа, підпорядковані законам Кулона – Амонтона $\tau_{z\theta}(r, t) = \mu p(r, t)$, де μ – коефіцієнт тертя. В [2] показано, що для осесиметричної контактної задачі з тертям дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ не впливають на контактний тиск $p(r, t)$.

Інтегральне рівняння осесиметричного контакту штампа і півпростору з покриттям, що зношується, у довільний момент часу t на площадці контакту $a \leq r \leq b$ має вигляд

$$\frac{1}{\pi E_2^*} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{p(r', t) r' dr' d\varphi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \varphi}} + \frac{A}{(E_1^*)^K} h(r, t) p^K(r, t) + [h(r, 0) - h(r, t)] = D(t) - f(r) \quad (1.2)$$

(аналогічний підхід до отримання інтегрального рівняння був застосований для плоскої зносоконтактної задачі в працях [2, 15].) У лівій частині рівняння (1.2) перший доданок характеризує пружні переміщення півпростору, другий – пружного шару-покриття, третій – переміщення точок покриття, зумовлені зношуванням. Розглянемо другий із цих доданків. Пружний шар має властивості покриття Вінклерівського типу, тому у загальному випадку його деформування підпорядковується степеневому закону з коефіцієнтом постелі $c(r, t) = A / [(E_1^*)^K] h(r, t)$ і показником степеня $K \in (0; 1]$ [1]. Тут коефіцієнт A визначається формулою $A = [2(1-n)(\nu-1)(2-n+n\nu)] / (\nu+1)^2$, якщо $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, (і відповідно $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 3 - 4\nu$) [15].

У правій частині рівняння (1.2) $D(t)$ – невідома функція осідання штампа; $f(r)$ – функція, що визначає форму поверхні підшви штампа. Узгоджений контакт у початковий момент часу визначає рівняння товщини смуги у вигляді $h(r, 0) = h_0 - |f(r)|$

для $r \in [a; b]$. Циліндрична форма бічної поверхні штампa та узгоджений контакт забезпечують незмінність площадки контакту.

Оскільки заданою є нормальна сила P , прикладена до штампa, то для визначення невідомої функції осадки штампa $D(t)$ використовується умова рівноваги сил:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_a^b p(r', t) r' dr' d\varphi. \quad (1.3)$$

§2. Підґрунтя для застосування комбінації методів.

Після введення безрозмірних величин

$$\tau = t K_w \omega; \quad \tilde{r} = \frac{r}{b}; \quad \tilde{P} = \frac{P}{b^2 E_2^*}; \quad H_0 = \frac{h_0}{b}; \quad \tilde{h}(\tilde{r}, \tau) = \frac{1}{b} h\left(\tilde{r}b, \tau \frac{1}{K_w \omega}\right); \quad \tilde{P}^* = \frac{P^*}{E_2^*};$$

$$\tilde{A}_K = \frac{A}{n^K}; \quad \tilde{p}(\tilde{r}, \tau) = \frac{1}{E_2^*} p\left(\tilde{r}b, \tau \frac{1}{K_w \omega}\right); \quad \tilde{D}(\tau) = \frac{1}{b} D\left(\tau \frac{1}{K_w \omega}\right); \quad \tilde{f}(\tilde{r}) = \frac{1}{b} f(\tilde{r}b);$$

$$\Delta(\tilde{r}, \tilde{r}', \varphi) = \sqrt{\tilde{r}^2 + \tilde{r}'^2 - 2\tilde{r}\tilde{r}' \cos \varphi}$$

система розв'язувальних рівнянь (1.1) – (1.3) набуває вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{a/b}^1 \frac{\tilde{p}(\tilde{r}', \tau) \tilde{r}' d\tilde{r}' d\varphi}{\Delta(\tilde{r}, \tilde{r}', \varphi)} + \tilde{A}_K \tilde{h}(\tilde{r}, \tau) \tilde{p}^K(\tilde{r}, \tau) + [\tilde{h}(\tilde{r}, 0) - \tilde{h}(\tilde{r}, \tau)] = \tilde{D}(\tau) - \tilde{f}(\tilde{r}); \quad (2.1)$$

$$\tilde{h}(\tilde{r}, \tau) = \tilde{r} \int_0^\tau \left(\frac{\tilde{p}(\tilde{r}, \tau')}{\tilde{P}^*} \right)^\alpha d\tau'; \quad (2.2)$$

$$\tilde{P} = \int_0^{2\pi} \int_{a/b}^1 \tilde{p}(r', \tau) \tilde{r}' d\tilde{r}' d\varphi. \quad (2.3)$$

Невідомими стають безрозмірні функції контактного тиску $\tilde{p}(\tilde{r}, \tau)$, профілю зношеної поверхні $\tilde{h}(\tilde{r}, \tau)$ і осідання штампa $\tilde{D}(\tau)$.

Також доцільно ввести лінійний оператор

$$[Lg](\tilde{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{a/b}^1 \frac{g(\tilde{r}') \tilde{r}' d\tilde{r}' d\varphi}{\Delta(\tilde{r}, \tilde{r}', \varphi)}. \quad (2.4)$$

До розв'язання системи (2.1) – (2.3) застосуємо покроковий за часом метод, запропонований у монографіях [2, 15]. Розбиваємо часовий проміжок на відрізки $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, де $\tau_{k+1} = \tau_k + \Delta\tau$, $\tau_0 = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), визначаючи часовий крок $\Delta\tau$ таким, щоб його зменшення мало впливало на контактні характеристики $\tilde{p}_k(\tilde{r}) = \tilde{p}(\tilde{r}, \tau_k)$, $\tilde{D}_k = \tilde{D}(\tau_k)$, $\tilde{h}_k(\tilde{r}) = \tilde{h}(\tilde{r}, \tau_k)$ у кожен фіксований момент часу τ_k , забезпечуючи визначену точність.

На нульовому кроці при $\tau_0 = 0$ маємо $\tilde{h}_0(\tilde{r}) = \tilde{h}(\tilde{r}, 0)$, тому рівняння (2.1) і (2.3) набувають вигляду

$$[L\tilde{p}_0](\tilde{r}) + \tilde{A}_K \tilde{h}_0(\tilde{r}) \tilde{p}_0^K(\tilde{r}) = \tilde{D}_0 - \tilde{f}(\tilde{r}); \quad (2.5)$$

$$\tilde{P} = \int_0^{2\pi} \int_{a/b}^1 \tilde{p}_0(\tilde{r}') \tilde{r}' d\tilde{r}' d\varphi. \quad (2.6)$$

Для визначення функції профілю $\tilde{h}_1(\tilde{r})$ використовуємо розв'язок системи (2.5), (2.6), та співвідношення (2.2), записане у наближеному вигляді:

$$\tilde{h}_1(\tilde{r}) = \tilde{h}_0(\tilde{r}) - \tilde{r} \left(\frac{\tilde{p}_0(\tilde{r})}{\tilde{p}^*} \right)^\alpha \Delta\tau.$$

На k -ому кроці ($k = 1, 2, \dots$) рівняння (2.1) і (2.3) визначають систему

$$[L\tilde{p}_k](\tilde{r}) + \tilde{A}_k \tilde{h}_k(\tilde{r}) \tilde{p}_k^K(\tilde{r}) + [\tilde{h}_0(\tilde{r}) - \tilde{h}_k(\tilde{r})] = \tilde{D}_k - \tilde{f}(\tilde{r}); \quad (2.7)$$

$$\tilde{P} = \int_0^{2\pi} \int_{a/b}^1 \tilde{p}_k(\tilde{r}') \tilde{r}' d\tilde{r}' d\varphi, \quad (2.8)$$

розв'язок якої дозволяє скористатися наближенням формули (2.2) для обчислення $\tilde{h}_{k+1}(\tilde{r})$

$$\tilde{h}_{k+1}(\tilde{r}) = \tilde{h}_k(\tilde{r}) - \tilde{r} \left(\frac{\tilde{p}_k(\tilde{r})}{\tilde{p}^*} \right)^\alpha \Delta\tau.$$

Таким чином, на кожному кроці $k = 0, 1, 2, \dots$ функцію профілю $\tilde{h}_k(\tilde{r})$ зношеного покриття можна вважати відомою, що дозволяє рівняння (2.5) і (2.7) узагальнити у формі

$$[L\tilde{p}_k](\tilde{r}) + \tilde{A}_k \tilde{h}_k(\tilde{r}) \tilde{p}_k^K(\tilde{r}) = \tilde{D}_k - g_k(\tilde{r}), \quad (2.9)$$

де $g_k(\tilde{r}) = \tilde{f}(\tilde{r}) - [\tilde{h}_0(\tilde{r}) - \tilde{h}_k(\tilde{r})]$.

Рівняння подібного до рівняння (2.9) типу досліджено в монографії [15], де доведено, що його розв'язок є обмеженою функцією, яка не може мати особливостей на кінцях відрізка.

Знайдемо умови існування єдиного розв'язку рівняння (2.9) для кожного $k = 0, 1, 2, \dots$. Для цього спочатку дослідимо властивості лінійного оператора L , визначеного співвідношенням (2.4). У праці [4] отримано розклад

$$\int_0^{2\pi} \int_{a/b}^1 \frac{g(\tilde{r}') \tilde{r}' d\tilde{r}' d\varphi}{\Delta(\tilde{r}, \tilde{r}', \varphi)} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 U_{2n}(\tilde{r}); \quad (2.10)$$

$$U_{2n}(\tilde{r}) = \int_{a/b}^{\rho} \left(\frac{\tilde{r}'}{\tilde{r}} \right)^{2n+1} g(\tilde{r}') d\tilde{r}' + \int_{\rho}^1 \left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}'} \right)^{2n} g(\tilde{r}') d\tilde{r}'.$$

Якщо $g(\tilde{r})$ належить простору $C_{[a/b;1]}$ функцій, неперервних на відрізку $[a/b;1]$, то кожна функція $U_{2n}(\tilde{r})$ є неперервною на цьому відрізку як сума інтегралів зі змінною межею. Крім того, ряд (2.10) мажоредується збіжним знакододатним числовим рядом $2\pi \|g(\tilde{r})\| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left(\frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n+2} \right)$, тому є рівномірно збіжним. Отже, його сума є неперервною функцією на відрізку $[a/b;1]$. Таким чином, лінійний оператор L переводить простір $C_{[a/b;1]}$ в себе.

На основі розкладу (2.10) у праці [12] проведено оцінювання норми інтеграла оператора L , звідки випливає, що

$$\|L\| \leq 2 \left(1 - \frac{a}{b} \arcsin \frac{a}{2b} \right). \quad (2.11)$$

Для кожного $k = 0, 1, 2, \dots$ введення заміни

$$\psi_k(\tilde{r}) = \tilde{p}_k^K(\tilde{r}) - (\tilde{D}_k - g_k(\tilde{r}))/2 \quad (2.12)$$

призводить до рівняння Гаммерштейна

$$\psi_k(\tilde{r}) = \left(1 - \frac{\tilde{A}_K \tilde{h}_k(\tilde{r})}{2} \right) \left[\psi_k(\tilde{r}) + \frac{\tilde{D}_k - g_k(\tilde{r})}{2} \right] - \frac{1}{2} L \left[\psi_k(\tilde{r}) + \frac{\tilde{D}_k - g_k(\tilde{r})}{2} \right]^{1/K}, \quad (2.13)$$

а рівняння рівноваги (2.6), (2.8) дозволяє отримати співвідношення для визначення осадки штамп

$$\tilde{D}_k = 2 \left(\frac{\tilde{P}}{T_k} \right)^K; \quad T_k = \int_0^{2\pi} \int_{a/b}^1 \left[\frac{2\psi_k(\tilde{r}') - g_k(\tilde{r}')}{\tilde{D}_k} - \frac{g_k(\tilde{r}')}{\tilde{D}_k} + 1 \right]^{1/K} \tilde{r}' d\tilde{r}' d\varphi. \quad (2.14)$$

Позначимо нелінійний оператор у правій частині (2.13) через $[\Phi_k \psi_k](\tilde{r})$. Спираючись на властивості лінійного оператора L , приходимо до висновку, що нелінійний оператор Φ_k відображає повний метричний простір X невід'ємних неперервних на $[a/b; 1]$ функцій $\psi(\tilde{r})$ в себе.

Дослідимо нелінійний оператор Φ на стиск. Норма неперервної функції в просторі $X \subset C_{[a/b; 1]}$ визначається максимумом модуля цієї функції на відрізку $[a/b; 1]$. Цей максимум досягається в певній точці $\tilde{r}_0 \in [a/b; 1]$, тому матимемо:

$$\begin{aligned} \|\Phi_k \bar{\psi} - \Phi_k \bar{\bar{\psi}}\| &= \left| \left(1 - \frac{1}{2} \tilde{A}_K \tilde{h}_k(\tilde{r}_0) \right) [\bar{\psi}(\tilde{r}_0) - \bar{\bar{\psi}}(\tilde{r}_0)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} L \left(\left[\bar{\psi} + \frac{1}{2} (\tilde{D}_k - g_k) \right]^{1/K} - \left[\bar{\bar{\psi}} + \frac{1}{2} (\tilde{D}_k - g_k) \right]^{1/K} \right) \right|(\tilde{r}_0). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $\bar{\psi}(\tilde{r}_0) - \bar{\bar{\psi}}(\tilde{r}_0) > 0$. Якщо перший доданок різниці правої частини (2.15) більший за другий, то

$$\|\Phi_k \bar{\psi} - \Phi_k \bar{\bar{\psi}}\| \leq \left\| 1 - \frac{1}{2} \tilde{A}_K \tilde{h}_k \right\| \|\bar{\psi} - \bar{\bar{\psi}}\|,$$

у протилежному випадку можна знайти множник $\theta \in (0; 1)$, який відрізняє перший доданок від другого, після чого застосувати формулу Лагранжа за функціональним аргументом і провести оцінювання, враховуючи заміну (2.12) та оцінку (2.11) норми оператора L :

$$\begin{aligned} \|\Phi_k \bar{\psi} - \Phi_k \bar{\bar{\psi}}\| &= \frac{1-\theta}{2} \left[L \left(\frac{1}{K} \left[\hat{\psi} + \frac{1}{2} (\tilde{D}_k - g_k) \right]^{K-1} [\bar{\psi} - \bar{\bar{\psi}}] \right) \right] (\tilde{r}_0) \leq \\ &\leq \frac{1}{2K} \|L\| \|\bar{\psi} - \bar{\bar{\psi}}\| \|\tilde{p}_k\|^{1-K} \leq \frac{1}{K} \left(1 - \frac{a}{b} \arcsin \frac{a}{2b} \right) \|\tilde{p}_k\|^{1-K} \|\bar{\psi} - \bar{\bar{\psi}}\|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Унаслідок (2.15) і (2.16) приходимо до висновку, що оператор $\Phi_k : X \rightarrow X$ задовольняє нерівність

$$\|\Phi_k \bar{\psi} - \Phi_k \bar{\bar{\psi}}\| \leq q_k \|\bar{\psi} - \bar{\bar{\psi}}\|,$$

$$q_k = \max \left\{ \left\| 1 - \frac{1}{2} \tilde{A}_k \tilde{h}_k \right\|; \frac{1}{K} \left(1 - \frac{a}{b} \arcsin \frac{a}{2b} \right) \|\tilde{p}_k\|^{1-K} \right\}.$$

Отже, цей оператор є стискаючим, якщо $0 < q_k < 1$. За виконання зазначеної умови, на кожному часовому кроці рівняння (2.13) має єдиний розв'язок в X , який можна знайти методом послідовних наближень (МПН). Для перевірки зазначеної умови перед реалізацією k -го часового кроку потрібно знати норми функцій $1 - \frac{1}{2} \tilde{A}_k \tilde{h}_k(\tilde{r})$ та $\tilde{p}_k(\tilde{r})$. На k -ому кроці перша з цих функцій є відомою, на відміну від другої, тому норму першої можна знайти точно, а другої – наближено. На нульовому часовому кроці за наближення $\|\tilde{p}_0\|$ обираємо середнє значення $\frac{\tilde{P}}{\pi(1-(a/b)^2)}$ функції $\tilde{p}_0(\tilde{r})$,

отримане з умови рівноваги (2.6), а на k -ому кроці ($k = 1, 2, 3, \dots$) норму $\|\tilde{p}_k\|$ наближаємо значенням $\|\tilde{p}_{k-1}\|$. Чисельний експеримент показав, що для всіх наведених нижче розрахунків умова стискання нелінійного оператора $\Phi_k : X \rightarrow X$ виконується як у попередніх наближених оцінках, так і в фактичних.

На кожному часовому кроці систему (2.8), (2.9) розв'язуємо чисельно. Зафіксуємо $k = 1, 2, 3, \dots$; відрізок $[a/b; 1]$ розбиваємо на N рівних частин $[\xi_{j-1}; \xi_j]$, $j = \overline{1, N}$. На кожному відрізку розбиття до інтегралів у рівняннях застосуємо наближення теореми про середнє

$$\int_0^{2\pi} \int_{a/b}^1 \frac{q(\tilde{r}') \tilde{r}' d\tilde{r}' d\varphi}{\Delta(\tilde{r}, \tilde{r}', \varphi)} \approx \sum_{j=1}^N q(\xi_{j-1/2}) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \frac{\tilde{r}' d\tilde{r}'}{\Delta(\tilde{r}, \tilde{r}', \varphi)};$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{a/b}^1 q(r') \tilde{r}' d\tilde{r}' d\varphi \approx \pi \sum_{j=1}^N q(\xi_{j-1/2}) \left([\xi_j]^2 - [\xi_{j-1}]^2 \right).$$

У результаті систему (2.13), (2.14) замінюємо системою $N+1$ наближених рівнянь

$$\psi_k(\xi_{i-1/2}) = \left(1 - \frac{\tilde{A}_k \tilde{h}_k(\xi_{i-1/2})}{2} \right) \left[\psi_k(\xi_{i-1/2}) + \frac{\tilde{D}_k - g_k(\xi_{i-1/2})}{2} \right] -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\psi_k(\xi_{j-1/2}) + \frac{\tilde{D}_k - g_k(\xi_{j-1/2})}{2} \right]^{1/K} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \frac{\tilde{r}' d\tilde{r}'}{\Delta(\xi_{i-1/2}, \tilde{r}', \varphi)}, \quad i = \overline{1, N}; \quad (2.17)$$

$$\tilde{D}_k = 2 \left(\frac{\tilde{P}}{T_k} \right)^K; \quad T_k = \pi \sum_{j=1}^N \left[\frac{2\psi_k(\xi_{j-1/2}) - g_k(\xi_{j-1/2})}{\tilde{D}_k} + 1 \right]^{1/K} \left([\xi_j]^2 - [\xi_{j-1}]^2 \right)$$

відносно $N+1$ змінних $\{\tilde{D}_k, \tilde{p}_k(\xi_{j-1/2}), j = \overline{1, N}\}$. У рівнянні (2.17) внутрішній інтеграл обчислюємо аналітично, а зовнішній – чисельно.

§3. Аналіз результатів числових досліджень.

Для отримання числових результатів значення безрозмірних величин обираємо такі самі, як в монографії [15]: $H_0 = 3 \cdot 10^{-2}$; $\tilde{P} = 9 \cdot 10^{-3}$; $\tilde{p}^* = 0,26$; $n = E_1^*/E_2^* = 0,1$; $\alpha = 1,4$. Порівняльний аналіз показав, що при виборі $N = 25$ і $N = 40$ відхилення між числовими результатами становить до 1% в обох випадках узгодженого контакту, в діапазоні розрахункових параметрів роботи. Тому переважно при обчисленнях обиралося $N = 25$. Числовий експеримент показав, що часовий крок можна вибрати рівним $\Delta\tau = 0,01$, щоб контактні характеристики мало змінювалися при зменшенні значення $\Delta\tau$. Так, відхилення в значеннях контактних характеристик при $\Delta\tau = 0,05$ та $\Delta\tau = 0,01$ становило менше 0,1%.

Розглянемо спочатку штамп з плоскою основою, тобто $f(r) = 0$. На рис. 2 побудовано графіки функцій контактної тиску під кільцевим штампом з розмірами $a/b = 0,8$ – лінії 1, 2; $a/b = 0,5$ – лінії 3 – 5; $a/b = 0,3$ – лінії 6 – 8; $a/b = 0,1$ – лінії 9 – 11; $a/b = 0,001$ – лінії 12 – 15. При цьому, лінії 1, 3, 6, 9, 12 відповідають функціям контактної тиску в задачі без зношування та покриття [9]; а інші – зносостатичного тиску в задачі з покриттям, що деформується за степеневим законом з показником $K = 0,4$. Вигляд функцій тиску в різні моменти часу зношування описується лініями 4, 7, 10, 13 – при $\tau = 0$; лінією 2 – при $\tau = 1$; лінією 14 – при $\tau = 2$; лініями 5, 8, 11, 15 – $\tau = 4$.

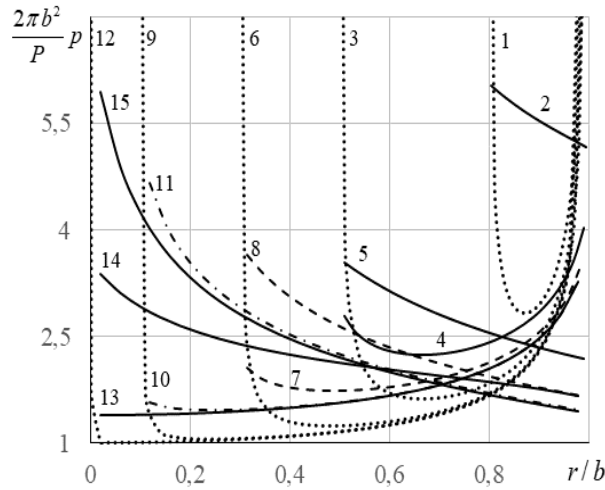


Рис. 2

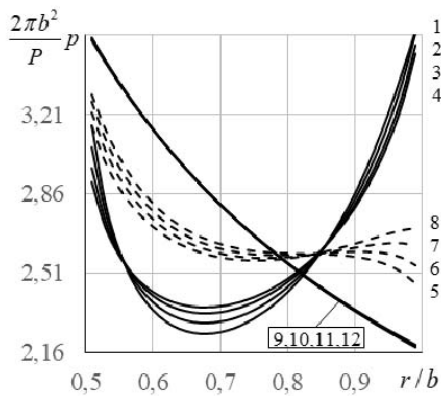


Рис. 3

На рис. 3 зображено графіки функцій зносостатичного тиску для різних значень K (за параметра кільця $a/b = 0,5$). Відповідно до показників $K = 1; 0,8; 0,6; 0,4$ суцільні лінії 1 – 4 визначаються часом $\tau = 0,16$; штрихові 5 – 8 – часом $\tau = 0,64$; суцільні лінії 9 – 12, що візуально близькі, – часом $\tau = 4$.

На рис. 4, а зображено функції профілю зношеного покриття, що деформується за степеневим законом з показником $K = 0,4$, під кільцевими штампамі тих самих розмірів, що й на рис. 2.

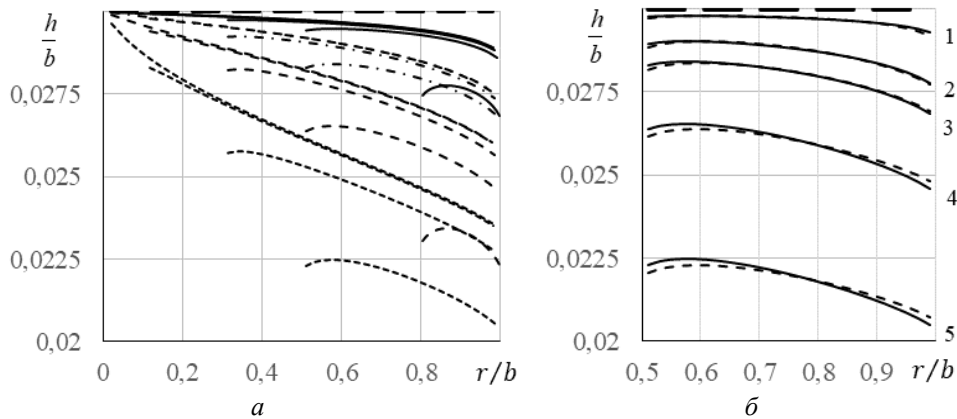


Рис. 4

Суцільні криві на рис. 4, *a* відповідають $\tau = 0,36$, штрихпунктирні – $\tau = 1$, штрихові – $\tau = 2$, пунктирні – $\tau = 4$. На рис. 4, *b* суцільні криві відповідають показнику $K = 0,4$, штрихові – $K = 1$, де пари ліній 1 – 5 визначаються часом $\tau = 0,16; 0,64; 1; 2; 4$, відповідно.

На рис. 5 побудовано графіки залежностей осадки штампa від часу. Різним значенням $K = 0,4; 0,6; 0,8; 1$ при фіксованому $a/b = 0,5$ відповідають лінії 1 – 4. Різним $a/b = 0,1; 0,3; 0,5; 0,8$ при фіксованому $K = 0,4$ – лінії 5, 6, 1, 7.

Унаслідок того, що шорсткість півпростору часто асоціюють з покриттям Вінклерівського типу, отримані результати зносоконтактної задачі при $\tau = 0$ можна порівнювати з результатами праці [12]. Спостерігаємо якісну узгодженість функцій контактного тиску в двох задачах. Крім того, якщо коефіцієнт шорсткості близький до нуля, то контактні характеристики наближаються до характеристик класичної задачі (без шорсткості), наприклад, наведених в статті [9]. На рис. 2 побудовано точкові лінії графіків відповідних функції тиску.

Відомо [15] про наявність двох стадій зношування – стадії припрацювання і стадії усталеного зносу. Аналіз показує, що на початковому етапі стадії припрацювання найбільше значення контактного тиску досягається на зовнішній межі площадки контакту, а найменше – ближче до внутрішньої. Подальший процес зношування на стадії припрацювання призводить до поступового пересування точки максимального тиску в бік $r = a$, а мінімального – в бік $r = b$. На стадії усталеного зносу функція тиску стабілізується, залишаючись незмінною за часом, при цьому, найбільше значення досягається при $r = a$, а найменше – при $r = b$. Час, коли спостерігається перехід до стадії усталеного зносу, відрізняється для різних розмірів кільця. Так, для розглянутих вхідних даних, якщо $a/b = 0,8$, то ця стадія настає при $\tau \approx 1$, а якщо $a/b = 0,5$ – при $\tau \approx 4$ (рис. 2).

На стадії припрацювання форма зношеного покриття змінюється, проте, на стадії усталеного зносу вона залишається стабільною (рис. 4).

Аналізуючи вплив розмірів кільця на контактні характеристики (рис. 2, рис. 4, *a*), доходимо висновку, що у кожний фіксований момент часу в точках з рівними абсци-

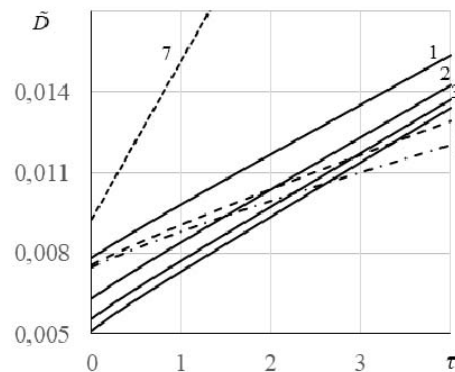


Рис. 5

сами r/b більшому розміру кільця відповідають менші значення як тиску, так і зносу (зміни профілю зношеного шару).

У процесі зношування осадка штампа збільшується на всіх стадіях. У будь-який фіксований момент часу штамп, що має вужче в плані кільце, отримує більшу осадку (рис. 5).

У монографії [15] зазначено, що при обертанні кругового в плані штампа, знос в центрі площадки контакту дорівнює нулю, внаслідок чого тиск в цій точці прямує до нескінченності у процесі зношування. У роботі [24] для штампа у формі кулі отримано нульове значення зносу в центрі площадки контакту. За результатами розрахунків, для штампа з внутрішнім радіусом, близьким до 0, при $a/b = 0,001$, знос в точці $r/b \approx 0,001$ є малим (оскільки профіль зношеної поверхні майже не змінюється), а тиск в цій точці суттєво зростає з часом (рис. 4, a і рис. 2).

У монографії [15] наведено результати для осесиметричної контактної задачі за лінійного закону зношування ($\alpha = 1$) з кільцевим у плані плоским штампом при $a/b = 0,8$ і півпростором без покриття на стадії усталеного зносу. Функція тиску, подана лінією 2 на рис. 2, має значну узгодженість з результатами [15]. З одного боку, це свідчить про достовірність результатів, а з іншого – констатує той факт, що на стадії усталеного зносу наявність покриття чи закон його деформування, так само як і закон зношування, не мають впливати на функцію контактного тиску.

Вищезазначені висновки мають загальний характер незалежно від закону деформування шару-покриття.

Проведемо аналіз впливу показника K степеневого закону деформування покриття на контактні характеристики. Як показують розрахунки, на стадії усталеного зносу функція контактного тиску залишається незмінною, а відхилення між їхніми значеннями для різних K не перевищує 3% (рис. 3, лінії 9 – 12). Проте на стадії припрацювання показник K має більш суттєвий вплив на функцію тиску.

Розглянемо початковий етап стадії припрацювання. Спочатку зазначимо загальну закономірність: на цьому етапі максимальне значення тиску досягається при $\tilde{r} = 1$, причому за лінійного закону це значення найбільше. На початковому етапі залежно від розмірів кільця мінімальне значення контактного тиску досягається або у внутрішній точці $\tilde{r}_0(\tau) \in (a/b; 1)$ площадки контакту або на внутрішній межі $\tilde{r} = a/b$ (рис. 2); причому у фіксований момент часу ця точка однакова для всіх K (рис. 3). Значення тиску в точці $\tilde{r}_0(\tau)$ тим менше, чим більше показник K , і за лінійного закону ($K = 1$) воно є найменшим. З часом точка $\tilde{r}_0(\tau)$ пересувається до зовнішньої межі $\tilde{r} = 1$.

Розглянемо серединний час стадії припрацювання. Для всіх a/b функція тиску може мати дві внутрішні точки локального екстремуму (рис. 3); така властивість найкраще характеризує функції тиску для показників K , близьких до 1. При наближенні часу до стадії усталеного зносу внутрішні точки локальних екстремумів зникають, і тиск набуває мінімального значення на зовнішній межі площадки контакту, а максимального – на внутрішній.

На стадії припрацювання, за фіксованого часу, найкраща згладженість функції тиску відповідає показникові, який визначає найбільше відхилення від лінійного закону деформування покриття (для наведених результатів – це показник $K = 0,4$). Така згладжена функція отримує найменший перепад між максимальним та мінімальним значеннями тиску. До того ж у кожен момент часу найменше значення максимального тиску відповідає саме зазначеному закону.

Розглянемо профілі зношеної поверхні. На стадії припрацювання спостерігаємо незначне відхилення між профілями для різних показників K . На стадії усталеного зносу відхилення стає більшим, проте його значення, як і форма профілю залишаються незмінними. Крім того, найбільше значення зносу (зміна профілю зношеної поверхні покриття) відповідає $K = 0,4$, яке досягається на зовнішній межі площадки контакту.

Зазначимо також, що у будь-який фіксований момент часу спостерігається ефект «інверсії» впливу показника K на величину як зносоконтактного тиску, так і зносу покриття.

За фіксованого часу τ , чим меншим є значення показника K степеневому закону, тим більшою є осадка штамп $\tilde{D}(\tau)$.

Розглянемо випадок узгодженого контакту, визначеного квадратною функцією

$$f(r) = -\frac{C_0 h_0}{4} + C_0 h_0 \left(\frac{2r - b - a}{2(b - a)} \right)^2.$$

За лінійного закону деформування шару на рис. 6 побудовано графіки функцій зносоконтактного тиску (рис. 6, а) та графіки функції профілю зношеного шару (рис. 6, б). Точкові лінії на рис. 6 відповідають $C_0 = 0$ (штамп з плоскою основою); штрихові – $C_0 = 0,05$; штрихпунктирні – $C_0 = 0,1$; суцільні – $C_0 = 0,15$. На рис. 6, а група ліній 1 визначається часом $\tau = 0$; ліній 2 – $\tau = 1$; ліній 3, що візуально зливаються, – $\tau = 2$. На рис. 6, б група ліній 1 відповідає $\tau = 0$; ліній 2 – $\tau = 0,16$; ліній 3 – $\tau = 0,64$; ліній 4 – $\tau = 1$; ліній 5 – $\tau = 2$; також додано лінію профілю б за степеневому закону деформування шару з показником $K = 0,4$ при $\tau = 2$, $C_0 = 0,1$.

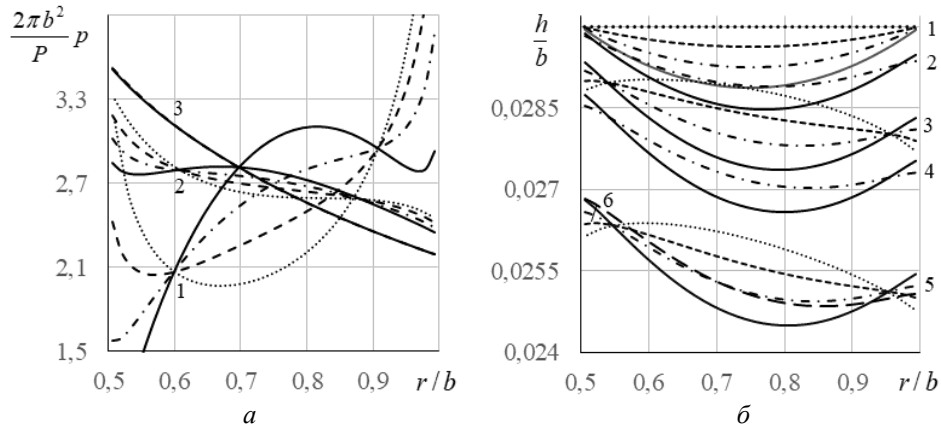


Рис. 6

На рис. 7 побудовано графіки функцій тиску за лінійного та нелінійного законів деформування покриття при $C_0 = 0,1$: за параметра кільця $a/b = 0,5$ суцільні лінії визначаються часом $\tau = 0$; штрихові – $\tau = 1$; штрихпунктирні (візуально близькі) – $\tau = 4$. Лінії 1, 5, 9, відповідають показникові $K = 1$; лінії 2, 6, 10 – $K = 0,8$; лінії 3, 7, 11 – $K = 0,6$; лінії 4, 8, 12 – $K = 0,4$.

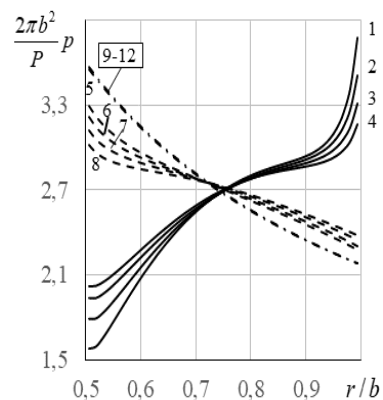


Рис. 7

Спочатку зазначимо, що група ліній 1 на рис. 6, б фактично ілюструє форму поверхонь, що визначають узгоджений контакт. Проаналізуємо вплив функцій узгодженого контакту на функцію тиску на стадії припрацювання. Якщо для контакту, визначеного плоскими поверхнями, максимальне значення тиску досягалося в точці, близькій до однієї з меж площадки контакту, то для неплоских контактуючих поверхонь розглянутої форми ця точка може лежати всередині площадки контакту. Причому, максимальний тиск набуває меншого значення для контакту, визначеного неплоскими поверхнями

(рис. 6, а). У процесі припрацювання відхилення між функціями тиску для різних значень C_0 зменшуються так, що на стадії усталеного зносу вони не перевищують 2% (рис. 6, а, лінії 3).

Функції профілю зношеної поверхні при узгодженому контакті не зменшують взаємних відхилень з часом, оскільки жорсткий штамп має незмінну поверхню (рис. 6, б).

Розглядаючи вплив закону деформування покриття (рис. 3 і рис. 7) на характеристики узгодженого контакту, значною мірою виявляємо аналогічні закономірності за контакту, що визначається як плоскими поверхнями, так і неплоскими. До таких закономірностей відносяться зазначені вище властивості згладженості функції тиску, взаємного відхилення між цими функціями, відмінності в найбільших значеннях.

Форма поверхні узгодженого контакту за певних параметрів функції, що визначає цей контакт, може вплинути на місце найбільшого зносу (рис. 6, б). Якщо для плоских поверхонь найбільший знос досягається в точці зовнішньої межі площадки контакту, то для неплоских може виявитися всередині цієї площадки. В останньому випадку під впливом степеневому закону деформування покриття з показником $K = 0,4$ ця точка може зміститися в бік зовнішньої межі, а значення зносу в цій точці може отримати несуттєве збільшення у порівнянні з лінійним законом ($K = 1$).

Достовірність результатів роботи підтверджується зіставленням їх з результатами, отриманими для асоційованих задач іншими методами [12, 15], граничною узгодженістю з розв'язком класичної задачі [9], а також узгодженістю до 1% з результатами розрахунків [14] у випадку лінійного закону деформування покриття, отриманими з використанням інших підходів до розв'язання.

Висновок.

Розглянуто узгоджений контакт для двох типів узгоджених поверхонь – плоских та неплоских, визначених функцією квадратичного типу. Виявлено загальні закономірності поведінки зносоконтактних характеристик за різних законів деформування покриття в обох випадках узгодженого контакту.

Продемонстровано, що на стадії припрацювання функції контактного тиску та профілі зношеної поверхні суттєво змінюються. На стадії усталеного зносу функції тиску залишаються незмінними і стають близькими за значеннями для різних показників степеневому закону. Проте, хоча на цій стадії форми профілів зношеної поверхні не змінюються, за різних показників зазначеного закону профілі мають стабільні взаємні відхилення.

Виявлено, що степеневому закону деформування покриття, котрий найбільше відрізняється від лінійного, відповідають менші значення максимального тиску на стадії припрацювання, проте більші значення максимального зносу на усталеній стадії.

Для штампів, внутрішній радіус яких наближається до нуля, підтверджено наявність ефекту значного збільшення контактного тиску протягом процесу зношування у точках, близьких до центру.

Порівняльний аналіз показав, що у випадку узгодженого контакту, визначеного функцією квадратичного типу, максимальний тиск на стадії припрацювання виявляється меншим, ніж у випадку контакту тіл, визначених плоскими поверхнями.

Зазначені ефекти слід враховувати при розрахунках на міцність та надійність машин та механізмів.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто осесиметричну задачу про зношування тонкого шару-покриття кільцевим у плані штампом при його обертанні навколо своєї осі. Підшва штампа узгоджена з поверхнею покриття. Задачу розв'язано покроковим за часом методом. Степеневий закон деформування покриття визначає інтегральне рівняння на кожному часовому кроці, яке зводиться до рівняння Гаммерштейна. Знайдено умови існування єдиного розв'язку рівняння методом послідовних наближень. Проаналізовано вплив розмірів кільця, закону деформування покриття і функції узгодженого контакту на характеристики контактної взаємодії на різних стадіях процесу зношування. Виявлено закономірності поступової зміни за часом функції тиску. Досліджено поведінку контактних характеристик при наближенні до нуля внутрішнього радіуса кільця.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: осесиметрична зносоконтактна задача, кільцевий у плані штамп, узгоджений контакт, степеневий закон деформування покриття.

1. Александров В.М., Мхинарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Физматгиз, 1983. – 488 с.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
3. Дмитрів К.М., Д'яченко Н.М. Порівняльний аналіз конформних плоских контактних задач про зношування за степеневим законом при фіксованій площадці контакту // Computer Sci. and Appl. Mathem. – 2021. – № 2. – С. 14 – 24.
4. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. – Москва: Физматгиз, 1961. – 288 с.
5. Козачок О.Р., Мартиняк Р.М. Локальне зношування пружних півпросторів з виступами. В кн.: Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: за заг. ред. Р.М.Мартиняка. – Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022 – С. 211 – 234.
6. Кубенко В.Д., Гавриленко В.В., Жук Я.А. Нестационарная контактная задача теории упругости (согласованные и несогласованные поверхности) // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – 10. – С. 162 – 178.
7. Кульчицький-Жигайло Р., Роговський Г. Осесиметрична контактна задача про втискування абсолютно жорсткої кулі в пружний півпростір з неоднорідним покритвом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – 45, №6. – С. 82 – 92.
8. Онишкевич В.М., Сулим Г.Т. Урахування зношування при плоскому контакті прямокутного штампа з пружною півплощиною // Вісник Київськ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2019. – № 1. – С. 138 – 141.
9. Ройтман А.Б., Шишканова С.Ф. Решение задачи о кольцевом штампе с использованием рекуррентных соотношений // Прикл. механика. – 1973. – 9, № 7. – С. 37 – 42.
10. Сачук Ю.В., Максимук О.В., Саланда І.П. Аналітико-числове обчислення ітераційними методами областей контакту для задачі про зношування пружної півплощини канонічними штампами // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2019. – 20. – С. 70 – 78.
11. Солдатенков И.А. Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. – Москва: Физматкнига, 2010. – 160 с.
12. Шашкова Е.В., Дьяченко Н.Н. Решение задачи контакта кольцевого штампа с шероховатым полупространством при нелинейном законе деформирования шероховатости // Вісник Дніпропетровськ. ун-ту. Сер.: механіка. – 2004. – 1(8), № 6. – С. 187 – 194.
13. Argatov I.I., Chai Y.S. Wear contact problem with friction: Steady-state regime and wearing-in period // Int. J. Solids Struct. – 2020. – 193 – 194, 1 June 2020. – P. 213 – 221.
14. Dmytriv K., Dyachenko N. Study of an axisymmetric wear-contact problem with a constant contact area at different stages of wear // Scientific Collection «InterConf» (146): with the Proc. of the 2nd Int. Scientific and Practical Conf. «Progressive Science and Achievements». (Doha, Qatar, 16-18 March 2023). – Katara, 2023. – N 146. – P. 353 – 357.
15. Goryacheva I.G. Contact Mechanics in Tribology / Part of the Book Series: Solid Mechanics and Its Applications (SMA, volume 61) (Series Editor: G.M.L. Gladwell). – Dordrecht: Springer Science & Business Media, 1998. – 346 p.
16. Han D., Han W., Jureczka M., Ochal A. Numerical analysis of a contact problem with wear // Comput. Math. Appl. – 2020. – 79. – P. 2942 – 2951.
17. Hu J., Gao F., Liu X., Wei Y. An elasto-plastic contact model for conformal contacts between cylinders // Proc/ of the Institution of Mechanical Engineers: Part J – Journal of Engineering Tribology. – 2020. – 234, N 12. – P. 1837 – 1845.
18. Jureczka M., Ochal A. Numerical analysis and simulations of contact problem with wear // Comput. Math. Appl. – 2019. – 77. – P. 2980 – 2988.
19. Kazakov K.E., Manzhirrov A.V. Conformal contact between layered foundations and punches // Mechanics of Solids. – 2008. – 43, N 3. – P. 512 – 524.
20. Manzhirrov A.V., Kazakov K.E. Axisymmetric problem of fretting wear for a foundation with a nonuniform coating and rough punch // AIP Conf. Proceedings. – 2018. – 1959. – P. 070023-1–070023-6.
21. Menga N., Ciavarella M. A Winkler solution for the axisymmetric Hertzian contact problem with wear and finite element method comparison // J. Strain Analysis. – 2015. – 50, N 3. – P. 156 – 162.
22. Voitov A.V. Modeling the processes of friction and wear under dynamic influences on the tribosystem // Problems of Tribology. – 2020. – 25, N 3/97. – P. 45 – 49.
23. Xuan H., Cheng X. Numerical Analysis and Simulation of a Frictional Contact Problem with Wear, Damage and Long Memory // East Asian J. on Appl. Math. – 2020. – 10, N 4. – P. 659 – 678.
24. Zhang X., Shen H., Liu J., Deng S., Li X., Cai Z., Zhu M. An efficient numerical model for predicting the torsional fretting wear considering real rough surface // Wear. – 2015. – 344 – 345. – P. 32 – 45.

Надійшла 07.08.2023

Затверджена до друку 12.12.2023