

О.Л.Кіпніс

**КОНТАКТ З ВІДРИВОМ ДВОХ ПРУЖНИХ СМУГ НА
НАПІВНЕСКІНЧЕННОМУ ПРОМІЖКУ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Несเตอร์ова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: a.l.kipnis@gmail.com*

Abstract. A plane static problem of the theory of elasticity of a smooth receding contact of two elastic strips is considered. The upper strip is under the constant loading distributed on the semi-infinite interval is considered, while the another strip is rigidly clamped on its lower face. Using the Wiener – Hopf method in combination with the apparatus of the integral Fourier transform, an exact solution of the problem is constructed. The contact stresses and the distance from the projection of the application point of the end of loading the upper strip on its opposite face to the beginning point of the tearing-off of this face from the lower strip is determined.

Key words: receding contact, elastic strip, contact stress, Wiener – Hopf method.

Вступ.

При дослідженні задач контактної механіки про взаємодію двох пружних тіл (або пружного та жорсткого тіла) може виникнути ситуація, коли контактні напруження, які мають бути напруженнями стиску, на деякій частині області контакту змінюють знак, тобто стають напруженнями розтягу. Останнє свідчить про те, що отриманий розв'язок втрачає фізичний сенс, а відповідна контактна задача має розв'язуватись в уточненій постановці з урахуванням наявності на спільній межі контактуючих тіл області, на якій поверхні контактуючих тіл відходять одна від одної. В контактній механіці явище, при якому область контакту зменшується під дією навантаження, носить назву контакту з відривом [1].

На практиці подібна ситуація є типовою для конструкцій, що спираються на фундаменти, які не можуть розтягуватись, і при певних умовах навантаження між конструкцією та фундаментом виникають безконтактні зони. Основна задача, яка виникає при розгляді основ, що реагують лише на стиск, полягає в умовах виникнення відриву і розрахунку положення безконтактних зон.

В роботах [2, 16] з використанням методу механічних квадратур побудовано розв'язки задач про дію відповідно зосередженої сили та штампа на пружну смугу, що лежить на пружній півплощині. В досліджуваних задачах з обох боків поза скінченим інтервалом контакту спостерігається відрив смуги від півплощини. У [2] також розглянуто осесиметричну задачу про контакт з відривом пружного шару та півпростору і круговою областю контакту між ними.

В статті [13] досліджено контакт жорсткого кругового диска і пружної смуги, яка спирається на дві опори. Відрив смуги від диску відбувається в середній частині області контакту.

В роботі [3] на основі методу Вінера – Гопфа побудовано точний розв'язок задач про контакт з відривом пружної смуги та жорсткої основи при дії на смугу розподіленого на напівнескінченному проміжку навантаження сталої інтенсивності.

В [14, 15] розглянуто симетричні задачі про фрикційний контакт з відривом пружної смуги та пружної півплощини з ідентичними пружними сталими. В роботі [14] навантаження рівномірно розподілене в усіх точках верхньої межі смуги окрім інтервалу скінченної довжини. В роботі [15] смуга перебуває під дією навантаження, розподіленого на скінченному інтервалі; розглядаються три різні типи геометрії навантаження.

В [11] розглянуто осесиметричну задачу про фрикційний контакт з відривом пружного напівнескінченного шару від такого ж пружного півпростору під дією на шар зосередженої сили, в [12] – під дією навантаження, що рівномірно розподілене всюди, крім диску скінченного радіусу, в [10] – під дією навантаження, що рівномірно розподілене всередині диску скінченного радіусу.

Далі із застосуванням методу Вінера – Гопфа побудовано точний аналітичний розв'язок плоскої статичної задачі теорії пружності про гладкий контакт з відривом двох різних пружних смуг при дії на верхню смугу розподіленого на напівнескінченному проміжку навантаження сталої інтенсивності, тоді як інша смуга жорстко защемлена на своїй нижній межі. Вивчено розподіл контактних напружень та визначено відстань від проекції точки кінця прикладання навантаження до верхньої смуги на її протилежну межу до точки початку відриву цієї межі від нижньої смуги.

§1. Постановка задачі.

В умовах плоскої деформації розглянемо пружну смугу $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y \leq h_1$, верхня межа якої перебуває під дією розподіленого на напівнескінченному проміжку навантаження сталої інтенсивності, а нижня межа гладко контактує з іншою пружною смугою, $-h_2 \leq y \leq 0$.

Припустимо, що на проміжку $0 < x < \infty$ нижньої межі $y = 0$ верхньої смуги, віддаленому на відстань l_1 від проекції $x = -l_1$ точки кінця прикладання навантаження, відбувається відрив смуги від основи (рис. 1). Розмір l_1 наперед невідомий і підлягає визначенню. Нижня межа другої смуги жорстко закріплена.

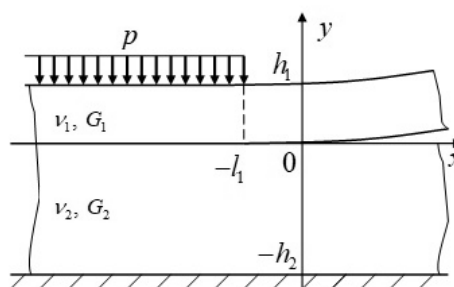


Рис. 1

Математичне формулювання граничних умов наступне:

$$\sigma_y^{(1)} \Big|_{y=h_1} = \begin{cases} -p, & x \leq -l_1; \\ 0, & x > -l_1; \end{cases} \quad \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0, h_1} = 0; \quad -\infty < x < \infty; \quad (1.1)$$

$$u_y^{(1)} \Big|_{y=0} = u_y^{(2)} \Big|_{y=0}; \quad -\infty < x \leq 0; \quad \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = \sigma_y^{(2)} \Big|_{y=0}; \quad -\infty < x \leq 0;$$

$$\sigma_y^{(1,2)} \Big|_{y=0} = 0; \quad 0 < x < \infty; \quad \tau_{xy}^{(2)} \Big|_{y=0} = 0; \quad -\infty < x < \infty;$$

$$u_y^{(2)} \Big|_{y=-h_2} = 0; \quad u_x^{(2)} \Big|_{y=-h_2} = 0; \quad -\infty < x < \infty,$$

де верхній індекс «1» відповідає верхній, а індекс «2» – нижній смузі.

§2 Інтегральне рівняння Вінера – Гопфа.

Зведемо крайову задачу до інтегрального рівняння Вінера – Гопфа. Для цього розглянемо дві змішані задачі теорії пружності: для верхньої смуги з крайовими умовами

$$\sigma_y|_{y=h_1} = \begin{cases} -p, & x \leq -l_1; \\ 0, & x > -l_1; \end{cases} \quad -\infty < x < \infty; \quad (2.1)$$

$$\tau_{xy}|_{y=h_1} = 0; \quad -\infty < x < \infty; \quad u_y|_{y=0} = u_1(x); \quad -\infty < x < \infty; \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0; \quad -\infty < x < \infty$$

та для нижньої смуги з крайовими умовами

$$u_y|_{y=0} = u_2(x); \quad -\infty < x < \infty; \quad (2.2)$$

$$\tau_{xy}|_{y=0} = 0; \quad -\infty < x < \infty; \quad u_y|_{y=-h_2} = 0; \quad -\infty < x < \infty; \quad u_x|_{y=-h_2} = 0; \quad -\infty < x < \infty.$$

Тут $u_1(x)$, $u_2(x)$ – деякі задані функції. Розв'язавши задачі з крайовими умовами (2.1) і (2.2) методом інтегрального перетворення Фур'є [7, 8], отримуємо вирази для трансформант нормального напруження на нижній межі верхньої смуги (за умов (2.1)) та на верхній межі нижньої смуги (за умов (2.2)):

$$\frac{\overline{\sigma_y^{(1)}}}{2G_1} \Big|_{y=0} = \frac{1}{(1-\nu_1)} \frac{\mu\lambda(\mu h_1)}{\Delta(\mu h_1)} \cdot \overline{u_1(\mu)} + \frac{2\lambda_1(\mu h_1)}{\Delta(\mu h_1)} \cdot \frac{\overline{p(\mu)}}{2G_1}; \quad (2.3)$$

$$\lambda(\tau) = \text{sh}^2 \tau - \tau^2; \quad \lambda_1(\tau) = \text{sh} \tau + \tau \text{ch} \tau; \quad \Delta(\tau) = \text{sh} 2\tau + 2\tau;$$

$$\frac{\overline{\sigma_y^{(2)}}}{2G_2} \Big|_{y=0} = \frac{\mu \left[(3-4\nu_2)(\text{ch} 2\mu h_2 - 1) + 2(\mu h_2)^2 + 8(1-\nu_2)^2 \right]}{2(1-\nu_2) \left[(3-4\nu_2) \text{sh} 2\mu h_2 - 2\mu h_2 \right]} \cdot \overline{u_2(\mu)}. \quad (2.4)$$

У формулах (2.3), (2.4) рискою зверху позначено трансформанту відповідної функції, що отримана в результаті перетворення Фур'є $\overline{f}(\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{i\mu x} dx$.

$G_{1,2}$ – модулі зсуву; $\nu_{1,2}$ – коефіцієнти Пуассона верхньої та нижньої смуг, відповідно.

У виразах (2.3), (2.4) трансформанта нормального напруження на верхній межі верхньої смуги є відомою функцією

$$\overline{p(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-l} (-p) e^{i\mu x} dx = -p \left[\pi \delta(\mu) - \frac{i}{\mu} e^{-i\mu l} \right]$$

($\delta(x)$ – дельта-функція Дірака), а трансформанти переміщень $\overline{u_{1,2}(x)}$ – невідомі функції.

Введемо нову невідому функцію $s(x) = u_y^{(1)}|_{y=0} - u_y^{(2)}|_{y=0}$ як різницю нормальних переміщень нижньої межі верхньої смуги та верхньої межі нижньої смуги. Згідно граничних умов, в області контакту $s(x) = 0$, $x < l_1$.

Прирівнюючи нормальні напруження із розв'язків змішаних задач (2.3), (2.4), виконаємо умову рівності цих напружень на спільній межі двох смуг в області контакту. Після застосування формули обернення, отримуємо наступне представлення для нормального напруження в указаній області:

$$\frac{\sigma_y^{(1)}}{2G_1} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-\mu}{1-\nu_1} \frac{\lambda^*(2\mu h_1)}{\Delta^*(2\mu h_1)} \overline{s(\mu)} + \frac{2\lambda_1^*(2\mu h_1)}{\Delta(2\mu h_1)} \frac{\overline{p(\mu)}}{2G_1} \right) e^{-i\mu x} d\mu; \quad (2.5)$$

$$\lambda^*(\tau) = (\text{sh}^2 \tau - \tau^2) \Delta_1(\tau); \quad \lambda_1^*(\tau) = (\text{sh} \tau + \tau \text{ch} \tau) \Delta_1(\tau);$$

$$\Delta_1(\tau) = (3 - 4\nu_2)(\text{ch} 2\alpha\tau - 1) + 2(\alpha\tau)^2 + 8(1 - \nu_2)^2;$$

$$\Delta^*(\tau) = (\text{sh} 2\tau + 2\tau) \Delta_1(\tau) + 2 \frac{1 - \nu_2}{1 - \nu_1} \frac{G_1}{G_2} [(3 - 4\nu_2) \text{sh} 2\alpha\tau - 2\alpha\tau] (\text{sh}^2 \tau - \tau^2);$$

$$s(x) = u_y^{(1)} \Big|_{y=0} - u_y^{(2)} \Big|_{y=0}; \quad \alpha = h_2 / h_1.$$

Представлення (2.5) задовольняє усім крайовим умовам задачі (1.1), окрім умови $\sigma_y^{(1,2)} \Big|_{y=0} = 0$, $0 < x < \infty$. Для задоволення цієї умови, перейдемо від функції $s(x)$ до її другої похідної

$$\bar{s}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(r) e^{i\mu r} dr = -\frac{1}{\mu^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s''(r) e^{i\mu r} dr.$$

Після введення безрозмірних змінних

$$\tau = h_1 \mu; \quad \xi = \frac{x}{h_1}; \quad a^* = \frac{l_1}{h_1}; \quad \eta = \frac{r}{h_1}$$

відносно нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = s''(2h_1\eta) \quad (\eta > 0)$$

приходимо до інтегрального рівняння задачі:

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (\xi > 0); \quad (2.6)$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau; \quad K(\tau) = \frac{\lambda^*(\tau)}{\tau \Delta^*(\tau)};$$

$$f(\xi) = \frac{p}{2G_1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_1^*(\tau)}{\tau \Delta^*(\tau)} e^{-i\tau(\xi + a^*)} d\tau \right).$$

Застосувавши до правої частини (2.6) теорему про лишки [4], отримаємо представлення

$$f(\xi) = -\frac{p}{G_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^*(s_k^*)}{s_k \Delta^*(s_k^*)} e^{-is_k^*(\xi + a^*)},$$

де s_k^* , $k = 1, 2, \dots$, корені рівняння $\Delta^*(\tau) = 0$ з півплощини $\text{Im } s < 0$.

Рівняння (2.6) – інтегральне рівняння першого роду з різницеvim ядром. Його ядром

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, \quad \xi > 0$$

є мероморфна функція комплексної змінної $K(z)$, яка має нуль другого порядку в точці $z = 0$, а її інші нулі та полюси є простими і знаходяться поза смугою $c_1^+ < \text{Im } z < c_1^-$ ($c_1^+ < 0$, $c_1^- > 0$).

§3 Розв'язання інтегрального рівняння.

Зведемо інтегральне рівняння (2.6) до функціонального рівняння Вінера – Гопфа [5]. Покладаючи $\varphi(\eta) = 0$, $\eta < 0$, продовжимо рівняння на усю числову вісь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta - \begin{cases} 0, & \xi > 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta, & \xi \leq 0; \end{cases} = \begin{cases} f(\xi), & \xi > 0; \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Застосувавши до співвідношення (3.1) інтегральне перетворення Фур'є

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi)e^{iz\xi} d\xi, \quad (3.2)$$

введемо до розгляду невідомі функції комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\eta)e^{iz\eta} d\eta; \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta, \quad (3.3)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c_2^+$ і $\text{Im } z < c_2^-$ ($c_2^+ < 0$, $c_2^- > 0$).

За теоремою про згортку для інтегрального перетворення Фур'є, перший доданок в (3.2) прийме вигляд

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta = K(z)\Phi^+(z). \quad (3.4)$$

Права частина рівняння

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi)e^{iz\xi} d\xi = \frac{-p}{G_1} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^*(s_k^*)}{s_k^* \Delta^*(s_k^*)} \frac{e^{-is_k^* a}}{z - s_k^*} \quad (3.5)$$

являє собою аналітичну в півплощині $\text{Im } z > c_3^+$ ($c_3^+ < 0$) функцію.

Виходячи з представлень (3.3) – (3.5), рівняння (3.2) запишеться у наступному вигляді

$$K(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z), \quad (-\infty < \text{Re } z < \infty, c^+ < \text{Im } z < c^-), \quad (3.6)$$

де $c^+ = \max(c_1^+, c_2^+, c_3^+)$, $c^- = \max(c_1^-, c_2^-)$.

Коефіцієнт рівняння $K(z)$ факторизується у нескінченні добутки [6]

$$K(z) = \frac{z^2}{12} K^+(z)K^-(z), \quad (3.7)$$

$$K^+(z) \equiv K^-(-z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\zeta_n^*} \right) \left(1 - \frac{z}{s_n^*} \right)^{-1},$$

де $K^{\pm}(z)$ – функції, аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$; ζ_n^* , $n = 1, 2, \dots$, – корені рівняння $\lambda^*(s) = 0$ із півплощини $\text{Im } s < 0$.

Асимптотична поведінка функцій $K^+(z)$, $K^-(z)$ на нескінченності є наступною

$$K^+(z) \equiv K^-(-z) \sim \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{1-v_2}{1-v_1} \frac{G_1}{G_2} \right)}} z^{3/2}, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Виходячи з представлення (3.7), рівняння (3.6) запишеться у такому вигляді:

$$\frac{z^2}{12} K^+(z) \Phi^+(z) - \frac{\Phi^-(z)}{K^-(z)} = \frac{F^+(z)}{K^-(z)} \quad (-\infty < \operatorname{Re} z < \infty, c^+ < \operatorname{Im} z < c). \quad (3.8)$$

Права частина рівняння (3.8), яка не є функцією аналітичною у нижній або верхній півплощині, подається через різницю двох аналітичних функцій:

$$\frac{F^+(z)}{K^-(z)} = f^+(z) - f^-(z); \quad f^+(z) = \frac{-p}{G_1} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^*(s_k^*)}{s_k^* \Delta^{*'}(s_k^*)} \frac{e^{-is_k^* a^*}}{K^-(s_k^*) (z - s_k^*)};$$

$$f^-(z) = \frac{-p}{G_1} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^*(s_k^*)}{s_k^* \Delta^{*'}(s_k^*)} \frac{(K^-(s_k^*) - K^-(z)) e^{-is_k^* a^*}}{K^-(s_k^*) K^-(z) (z - s_k^*)}.$$

Таким чином, рівняння (3.8) прийме вигляд

$$\frac{z^2}{12} K^+(z) \Phi^+(z) - f^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{K^-(z)} - f^-(z) \quad (-\infty < \operatorname{Re} z < \infty, c^+ < \operatorname{Im} z < c^-).$$

Функції, що являють собою праву і ліву частину останнього рівняння, аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і є однією цілою функцією. Із умов на нескінченності

$$K^{\pm}(z) = O(z^{-3/2}); \quad \Phi^{\pm}(z) = o(1); \quad f^{\pm}(z) = O(z^{-1}) \quad (|z| \rightarrow \infty)$$

за теоремою Ліувілля випливає, що ця ціла функція є деякою константою C^* . Звідки

$$\Phi^+(z) = \frac{12(f^+(z) + C^*)}{z^2 K^+(z)}.$$

Оскільки функція $\Phi^+(z)$ має бути аналітичною в півплощині $\operatorname{Im} z > c_2^+, c_2^+ < 0$, то вона має бути аналітичною і в точці $z = 0$. Для цього необхідне виконання двох наступних умов:

$$(f^+(z) + C^*) \Big|_{z=0} = 0; \quad (3.9)$$

$$\frac{df^+(z)}{dz} \Big|_{z=0} = 0.$$

Перша із умов (3.9) служить для визначення константи C^* :

$$C^* = -f^+(0),$$

а друга, яка подається у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^*(s_k^*) e^{-is_k^* a^*}}{s_k^{*3} \Delta^{*'}(s_k^*) K^-(s_k^*)} = 0, \quad (3.10)$$

дозволяє встановити значення невідомого розміру $l_1 = h_1 a^*$.

З умови (3.10) випливає, що відстань від абсциси точки кінця прикладання навантаження до точки початку відриву не залежить від величини навантаження, що характерно для задач про контакт з відривом.

§4. Аналіз одержаних результатів.

Виходячи з представлення (2.5), з врахуванням попередніх викладок отримаємо наступний вираз для контактних напружень на спільній межі двох пружних смуг

$$\left. \frac{\sigma_y^{(1)}}{2G_1} \right|_{y=0} = f(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\tau) K(\tau) e^{-i\tau\xi} d\tau. \quad (4.1)$$

Розвиваючи інтеграл в правій частині (4.1) в ряд за лишками, отримуємо нормальні напруження в області контакту $x < 0$:

$$\sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = \begin{cases} p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{s_k^* \Delta^*(s_k^*)} \left[\lambda_1^*(s_k^*) e^{-is_k^*(\xi+a)} - i \Phi^+(-s_k^*) \lambda^*(s_k^*) e^{is_k^*\xi} \right], & -a^* \leq \xi < 0; \\ p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{s_k^* \Delta^*(s_k^*)} \left[-\lambda_1^*(s_k^*) e^{is_k^*(\xi+a)} - i \Phi^+(-s_k^*) \lambda^*(s_k^*) e^{is_k^*\xi} \right] - p, & \xi < -a^*. \end{cases} \quad (4.2)$$

Застосовуючи до рівності (4.2) зворотне перетворення Фур'є, за допомогою леми Ватсона [9] пересвідчуємося, що нормальні напруження на краю області гладкого контакту мають характерну кореневу поведінку: $\sigma_y \Big|_{y=-h} = O(\sqrt{-x})$, $x \rightarrow -0$. При підході з боку, вільного від контакту, нормальні переміщення точок нижньої межі верхньої смуги мають поведінку $u_y \Big|_{y=0} = O(x^{3/2})$, $x \rightarrow +0$.

Числові розрахунки проведемо для випадку, коли пружна смуга спирається на більш жорстку основу ($G_1 < G_2$). Дослідження рівняння (3.10) показує, що відстань між абсцисами точки кінця прикладання навантаження та точки початку відриву межі верхньої смуги від пружної основи зменшується зі збільшенням зсувного модуля нижньої смуги G_2 по відношенню до зсувного модуля верхньої смуги G_1 і прямує до значення $l_1/h_1 = 0,39$, такого самого, що одержано при розв'язанні задачі про контакт з відривом пружної смуги та жорсткої основи [3], незалежного від відношення ширини першої смуги до ширини другої. В таблиці наведено залежність значення безрозмірних відстаней l_1/h_1 від значень відношення зсувних модулів матеріалів смуг ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h_2/h_1 = 2$).

Таблиця

G_1/G_2	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01
l_1/h_1	0,53	0,51	0,50	0,49	0,47	0,46	0,45	0,44	0,42	0,40	0,39

На графіку (рис. 2) наведено залежність безрозмірних контактних напружень $\tilde{\sigma} = \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} / p$ від безрозмірної координати $\xi = x/h_1$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h_2/h_1 = 2$), обчислених на підставі формули (4.2) для значень відношення модулів зсуву матеріалів смуг $G_1/G_2 = 1; 0,5; 0,3; 0,2; 0,01$.

Аналіз числових розрахунків показує, що контактні напруження при віддаленні від точки початку відриву верхньої смуги спочатку зменшуються, а потім збільшуються, асимптотично наближаючись до значення $-p$, такого самого, як задані значення нормальних напружень на проміжку $x \leq -l_1$ верхньої межі верхньої смуги. Відстань від абсциси точки початку відриву до абсциси точки максимальної концентрації контакт-

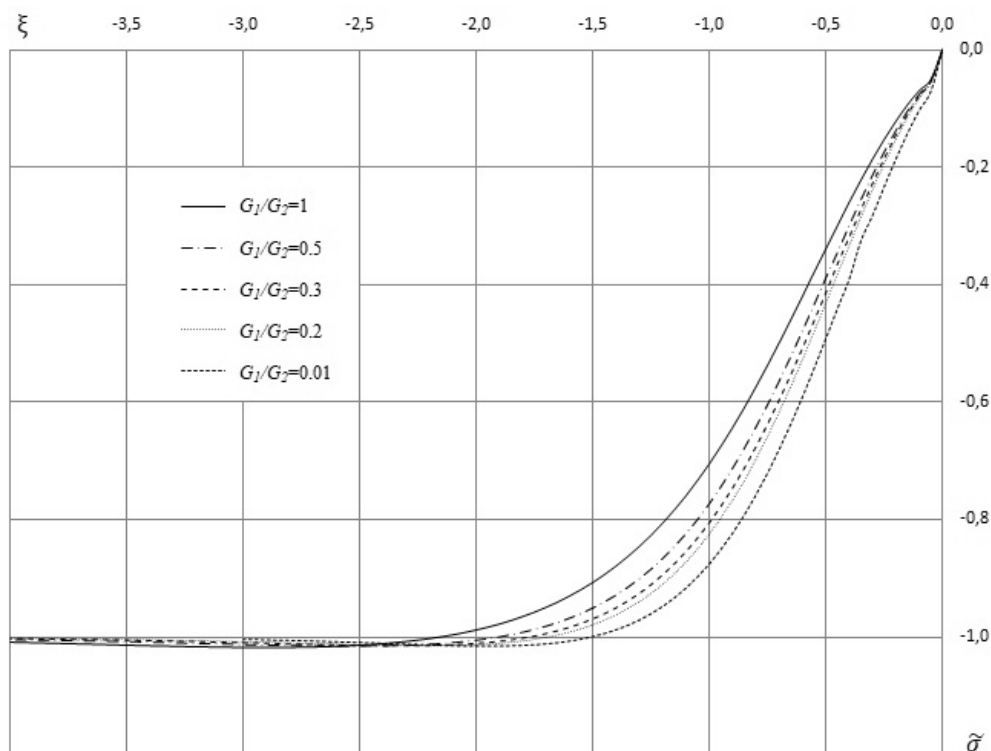


Рис. 2

них напружень зменшується за збільшенням жорсткості нижньої смуги по відношенню до жорсткості верхньої; при цьому максимальне відхилення модуля контактних напружень від значення p не перевищує 2% для всіх значень G_1/G_2 .

Висновок.

Роботу присвячено дослідженню гладкої контактної взаємодії двох пружних смуг. Верхня межа верхньої смуги знаходиться під дією рівномірно розподіленого на напівнескінченному проміжку навантаження, нижня межа нижньої смуги жорстко защемлена. На деякій відстані від проекції точки кінця прикладання навантаження на спільну межу пружних смуг відбувається відрив однієї смуги від іншої. На основі точного розв'язку відповідної плоскої статичної задачі теорії пружності, побудованого методом Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Фур'є, визначено указану відстань, яка не залежить від величини інтенсивності навантаження та досліджено її залежність від пружних сталей матеріалів смуг. Показано, що зі збільшенням жорсткості нижньої смуги по відношенню до жорсткості верхньої ця відстань зменшується і прямує до значення, отриманого при розв'язанні задачі про контакт пружної смуги та жорсткої основи. Вивчено розподіл контактних напружень в області контакту.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто плоску статичну задачу теорії пружності про гладкий контакт з відривом двох пружних смуг. Верхня смуга перебуває під дією розподіленого на напівнескінченному проміжку навантаження сталої інтенсивності, тоді як інша смуга жорстко защемлена на своїй нижній межі. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Фур'є побудовано точний аналітичний розв'язок задачі. Визначено контактні напруження та відстань від проекції точки кінця прикладання навантаження до верхньої смуги на її протилежну межу до точки початку відриву цієї межі від нижньої смуги.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: контакт з відривом, пружна смуга, контактні напруження, метод Вінера – Гопфа.

1. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
2. *Кир Л.М., Дандерс Дж., Цай К.Ц.* Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве // Прикл. механика. Тр. амер. об-ва инженеров-механиков. – 1972. – **39**, № 4. – С. 260 – 266.
3. *Кіпніс О.Л., Острик В.І.* Контакт з відривом на півнескінченному проміжку пружної смуги та жорсткої півплощини // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2011. – № 4. – С. 75 – 78.
4. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. – Москва: Гостехтеориздат, 1950 – 703 с.
5. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
6. *Острик В.И., Улитко А.Ф.* Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Київ: Наук. думка, 2006. – 328 с.
7. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – Москва: Изд-во иностранной лит-ры, 1955. – 668 с.
8. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
9. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
10. *Lopes J.P., Hills D.A.* An idealised description of the frictional receding contact behaviour of a bolted joint // Eur. J. Mech. A Solid. – 2020. – **83** (935). – 104022.
11. *Lopes J.P., Hills D.A.* The axisymmetric frictional receding contact of a layer pressed against a half-space by a point force // Int. J. Solids Struct. – 2019. – **171**, N 15. – P. 47 – 53.
12. *Lopes J.P., Hills D.A.* The axisymmetric frictional receding contact of a layer pressed against a half-space by pressure outside a disk // Eur. J. Mech. A Solid. – 2019. – **77**. – 103787.
13. *Morhunov M.O., Ostryk V.I., Ulitko A.F.* Contact with break-off under bending of an elastic strip with a rigid disk // J. Math. Sci. – 2010. – **171**. – P. 649 – 661.
14. *Parel K.S., Hills D.A.* Frictional receding contact analysis of a layer on a half-plane subjected to semi-infinite surface pressure // Int. J. Mech. Sci. – 2016. – **108 – 109**. – P. 137 – 143.
15. *Parel K.S.* Plane frictional receding contact of a thin layer pressed onto a substrate by finite pressure distributions // Eur. J. Mech. A Solid. – 2021. – **90**. – 104309.
16. *Ratwani M., Erdogan F.* On the plane contact problem for frictionless elastic layer // Int. J. Solids Struct. – 1973. – **43**. – P. 921 – 936.

Надійшла 12.09.2023

Затверджена до друку 12.12.2023