

М. В. Маковійчук, Т. М. Даляк, І. П. Шацький

**ВЗАЄМОДІЯ КОНТАКТНОЇ ТРІЩИНИ З КОЛІНЕАРНОЮ ЩІЛИНОЮ
ЗА ЗГИНУ ПОЛОГОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ**

*Лабораторія моделювання демпфуючих систем Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Микитинецька, 3, 76002, Івано-Франківськ, Україна;
e-mail: makoviy@ua.fm; tdalyak@gmail.com; ipshatsky@gmail.com*

Abstract. The problem of elastic and limit equilibrium of a shallow spherical shell, weakened by a pair of rectilinear cuts located along the meridian – a closure-capable crack and a narrow slot with constraints-free edges – is considered in a two-dimensional statement. The interaction of the crack edges under the action of the bending load is described using the contact model along the line on one of the face surfaces of the shell. Numerical solution of the problem is constructed by the method of singular integral equations using the mechanical quadrature algorithm. The regularity of distribution of the contact reaction on the closed edges of the crack is studied. The influence of the shell's curvature and the defects' mutual location on the value of the intensity factors of forces and moments, as well as the value of the destructive load, is studied.

Key words: spherical shell, crack, slot, collinear defects, bending, crack closure.

Вступ.

Інтенсивна експлуатація тонкостінних елементів конструкцій часто призводить до розвитку різного роду пошкоджень, які суттєво знижують рівень функціональної здатності та скорочують термін роботи конструкції загалом. Передчасне руйнування матеріалу може зумовлюватися як наявністю конструктивно передбачених розрізів, так і виникненням тріщин у процесі експлуатації. Природа походження дефектів та способи деформації тонкостінних елементів дає підстави розглядати різні розрахункові схеми: звертати увагу на можливість контактної взаємодії країв цих дефектів або ж не враховувати ефекти закриття тріщин при розрахунках на міцність. Спочатку такі дослідження проводились без урахування контактної взаємодії поверхонь дефектів у зоні напружень стиску [1 – 7, 9, 17]. Проте пізніші роботи [10, 14 – 16, 18 – 22, 26, 28] показали, що врахування явища контакту берегів тріщин є принциповим для усунення кінематичних суперечностей, пов'язаних із взаємним проникненням берегів розрізів під дією навантажень згину, а також для отримання більш якісної оцінки напружено-деформованого стану в околі вершин тріщин та визначення граничних навантажень [21]. Детальний огляд робіт стосовно даної тематики можна знайти у монографіях та оглядових статтях [2 – 7, 18, 27].

На сьогодні відомі окремі дослідження взаємодії дефектів різної природи із крайовими умовами контакту та вільного краю на контурах розрізів під час згину пластин [8, 11 – 13, 23 – 25]. Водночас питання взаємного впливу дефектів різних типів на пружний та граничний стан тонкостінних оболонок залишається актуальною та недостатньо вивченою задачею. Метою даної роботи є дослідити взаємодію двох різнотипних колінеарних дефектів: тріщини, береги якої контактують, та щілини з вільними від контактних напружень краями у пологій сферичній оболонці, а також вивчити їхній вплив на напружено-деформований стан і граничну рівновагу оболонки при згині.

§1. Постановка задачі.

Розглянемо ізотропну полого сферичну оболонку радіуса R і товщини $2h$, послаблену двома прямолінійними наскрізними розрізами довжиною $2l$, розташованими вздовж меридіану на відстані $2d$ між їхніми центрами. На одному з дефектів допускаємо контактну взаємодію берегів, яку описуємо з використанням моделі контакту вздовж лінії [10, 20, 22, 26]. Надалі такий дефект називатимемо контактною тріщиною. На іншому розрізі взаємодію берегів не враховуємо і називатимемо його щілиною [11, 12]. До обох берегів дефектів прикладено самоврівноважені рівномірно розподілені моменти згину $m = \text{const}$. Решта поверхонь оболонки вільні від напружень. Схему додатного навантаження та вигляд у плані пологої сферичної оболонки з дефектами з боку зовнішньої лицьової поверхні зображено на рис. 1. Дослідимо взаємний вплив різнотипних дефектів та кривизни оболонки на її напружено-деформований стан і граничну рівновагу за дії навантажень згину.

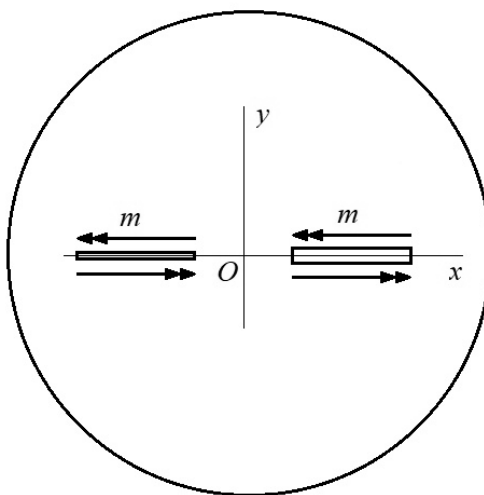


Рис. 1

Вважаючи оболонку в зоні збурення напруженого стану пологою, виберемо систему декартових координат $Oxyz$ з центром, рівновіддаленим від розрізів, та віссю абсцис, спрямованою уздовж лінії їх розташування. Напружено-деформований стан оболонки поза розрізами опишемо класичними рівняннями теорії пологих оболонок:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta w = 0; \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta\varphi = 0 \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2/L.$$

Тут φ – функція напружень; w – прогин оболонки; $B = 2Eh$; $D = 2Eh^3 / (3(1-\nu^2))$; E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона її матеріалу; Δ – оператор Лапласа; L – сукупність розрізів.

Запишемо крайові умови на кожному з дефектів у локальних системах координат $x_n = x - (-1)^n d$, $n = 1, 2$, зміщених вздовж осі Ox до центрів кожного розрізу [11, 12, 23, 24]:

на тріщині задаємо умови однобічного контакту по всій довжині:

$$\begin{aligned} [u_{y_1}](x_1) = h |[\theta_{y_1}](x_1)| > 0; \quad M_{y_1}(x_1, 0) = -m + h N_{y_1}(x_1, 0) \operatorname{sgn}[\theta_{y_1}](x_1); \\ N_{y_1}(x_1, 0) < 0 \quad x_1 \in (-l, l); \end{aligned} \quad (1.1)$$

на щілині задаємо навантаження:

$$N_{y_2}(x_2, 0) = 0; \quad M_{y_2}(x_2, 0) = -m, \quad x_2 \in (-l, l). \quad (1.2)$$

На нескінченності напруження відсутні:

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0; \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0; \quad Q_x^* = Q_y^* = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

У формулах (1.1) – (1.3) $[u_y]$ – розкриття тріщини в серединній поверхні оболонки; $[\theta_y]$ – розрив кута повороту нормалі; N_x , N_{xy} , N_y – мембранні зусилля; M_x , M_{xy} , M_y – моменти; Q_x^* , Q_y^* – узагальнені поперечні сили.

§2. Інтегральні рівняння задачі.

Розв'язок сформульованої задачі побудуємо методом сингулярних інтегральних рівнянь. Запишемо інтегральні подання сил та моментів на розрізах через похідні від стрибків переміщення і кута повороту нормалі [4, 6, 9]:

$$\begin{aligned} N_{y_n}(x_n) &= \frac{B}{4\pi} \left(\int_{-l}^l \{ K_{11}(\xi - x_n) [u_{y_n}]'(\xi) - K_{13}(\xi - x_n) a [\theta_{y_n}]'(\xi) \} d\xi + \right. \\ &+ \left. \int_{-l}^l \{ K_{11}(\xi - x_n + (-1)^k 2d) [u_{y_k}]'(\xi) - K_{13}(\xi - x_n + (-1)^k 2d) a [\theta_{y_k}]'(\xi) \} d\xi \right); \\ M_{y_n}(x_n) &= \frac{Ba}{4\pi} \left(\int_{-l}^l \{ K_{31}(\xi - x_n) [u_{y_n}]'(\xi) - K_{33}(\xi - x_n) a [\theta_{y_n}]'(\xi) \} d\xi + \right. \\ &+ \left. \int_{-l}^l \{ K_{31}(\xi - x_n + (-1)^k 2d) [u_{y_k}]'(\xi) - K_{33}(\xi - x_n + (-1)^k 2d) a [\theta_{y_k}]'(\xi) \} d\xi \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$n, k = 1, 2; n \neq k.$

Тут

$$\begin{aligned} K_{11}(\zeta) &= \frac{2}{\zeta} \left(\ker(\gamma|\zeta|) - \gamma|\zeta| \ker'(\gamma|\zeta|) - \frac{2}{\gamma|\zeta|} \text{kei}'(\gamma|\zeta|) \right); \\ K_{13}(\zeta) = K_{31}(\zeta) &= -\frac{2}{\zeta} \left((1-\nu) \left(\frac{2}{\gamma^2 \zeta^2} + \frac{2}{\gamma|\zeta|} \ker'(\gamma|\zeta|) + \text{kei}(\gamma|\zeta|) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \nu \gamma|\zeta| \text{kei}'(\gamma|\zeta|) \right); \\ K_{33}(\zeta) &= \frac{2}{\zeta} \left((1-\nu)^2 \left(\frac{2}{\gamma|\zeta|} \text{kei}'(\gamma|\zeta|) - \ker(\gamma|\zeta|) \right) - (1-\nu^2) \gamma|\zeta| \ker'(\gamma|\zeta|) \right) - \\ &\quad - 2\gamma^2 \int_0^\zeta \text{kei}(\gamma|\zeta|) d\zeta; \\ a &= h / \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad \gamma = 1 / \sqrt{Ra} = (3(1-\nu^2))^{1/4} / \sqrt{Rh}, \end{aligned}$$

$\ker(\dots)$, $\text{kei}(\dots)$ – функції Кельвіна.

Після підстановки інтегральних зображень (2.1) у крайові умови (1.1), (1.2) отримали систему сингулярних інтегральних рівнянь задачі:

$$\begin{aligned}
& [u_{y_1}]'(x_1) = h [\theta_{y_1}]'(x_1) \operatorname{sgn}[\theta_{y_1}](x_1); \\
& \frac{B}{4\pi} \left(\int_{-l}^l \{K_{11}(\xi - x_1)[u_{y_1}]'(\xi) - K_{13}(\xi - x_1)a[\theta_{y_1}]'(\xi)\} d\xi + \right. \\
& \left. + \int_{-l}^l \{K_{11}(\xi - x_1 + 2d)[u_{y_2}]'(\xi) - K_{13}(\xi - x_1 + 2d)a[\theta_{y_2}]'(\xi)\} d\xi \right) \operatorname{sgn}[\theta_{y_1}](x_1) + \\
& + \frac{Ba}{4\pi} \left(\int_{-l}^l \{K_{31}(\xi - x_1)[u_{y_1}]'(\xi) - K_{33}(\xi - x_1)a[\theta_{y_1}]'(\xi)\} d\xi + \right. \\
& \left. + \int_{-l}^l \{K_{31}(\xi - x_1 + 2d)[u_{y_2}]'(\xi) - K_{33}(\xi - x_1 + 2d)a[\theta_{y_2}]'(\xi)\} d\xi \right) = m \quad x_1 \in (-l, l); \\
& \frac{B}{4\pi} \left(\int_{-l}^l \{K_{11}(\xi - x_2)[u_{y_2}]'(\xi) - K_{13}(\xi - x_2)a[\theta_{y_2}]'(\xi)\} d\xi + \right. \\
& \left. + \int_{-l}^l \{K_{11}(\xi - x_2 - 2d)[u_{y_1}]'(\xi) - K_{13}(\xi - x_2 - 2d)a[\theta_{y_1}]'(\xi)\} d\xi \right) = 0; \quad (2.2) \\
& \frac{Ba}{4\pi} \left(\int_{-l}^l \{K_{31}(\xi - x_2)[u_{y_2}]'(\xi) - K_{33}(\xi - x_2)a[\theta_{y_2}]'(\xi)\} d\xi + \right. \\
& \left. + \int_{-l}^l \{K_{31}(\xi - x_2 - 2d)[u_{y_1}]'(\xi) - K_{33}(\xi - x_2 - 2d)a[\theta_{y_1}]'(\xi)\} d\xi \right) = m \quad x_2 \in (-l, l).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що як і в пластині $\operatorname{sgn}[\theta_{y_1}] = -\operatorname{sgn} m$ [11].

Розв'язки системи рівнянь (2.2) слід ще підпорядкувати додатковим умовам на кінцях розрізів:

$$u_{y_n}(\pm l) = 0; \quad [\theta_{y_n}](\pm l) = 0 \quad (n = 1, 2). \quad (2.3)$$

§3. Аналіз результатів.

Числові розв'язки задачі (2.2), (2.3) отримали методом квадратур [7] при $\nu = 0,3$. Для контактної тріщини за знайденим розв'язком обчислювали контактну реакцію (2.1) на зімкнутих берегах.

Коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів у внутрішніх та зовнішніх вершинах дефектів обчислювали за формулами:

$$\begin{aligned}
K_N^\pm &= \mp \frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x_n \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x_n^2} [u_y]'(x_n); \\
K_M^\pm &= \pm(3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4\sqrt{l}} \lim_{x_n \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x_n^2} [\theta_y]'(x_n) \quad (n = 1, 2).
\end{aligned}$$

На основі енергетичного критерію руйнування за умов комбінованого розтягу та згину [4, 5]

$$\frac{\pi}{4h^2E} \left\{ K_N^2 + \frac{3(1+\nu)}{3+\nu} \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right\} = 2\gamma_*,$$

де γ_* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу, знайшли граничні навантаження m_* , при яких починається розповсюдження дефектів.

Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль $\tilde{K}_N = hK_N/(|m|\sqrt{l})$ та моментів $\tilde{K}_M = K_M/(m\sqrt{l})$ (рис. 2) і руйнівного навантаження $\tilde{m}_* = |m_*|/m^0$, де $m^0 = 2h^2\sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$ (рис. 3) від параметра взаємного розташування дефектів $\rho = l/d$ будували при фіксованих значеннях параметра кривизни оболонки $\lambda = \gamma l = (3(1-\nu^2))^{1/4} l/\sqrt{Rh}$.

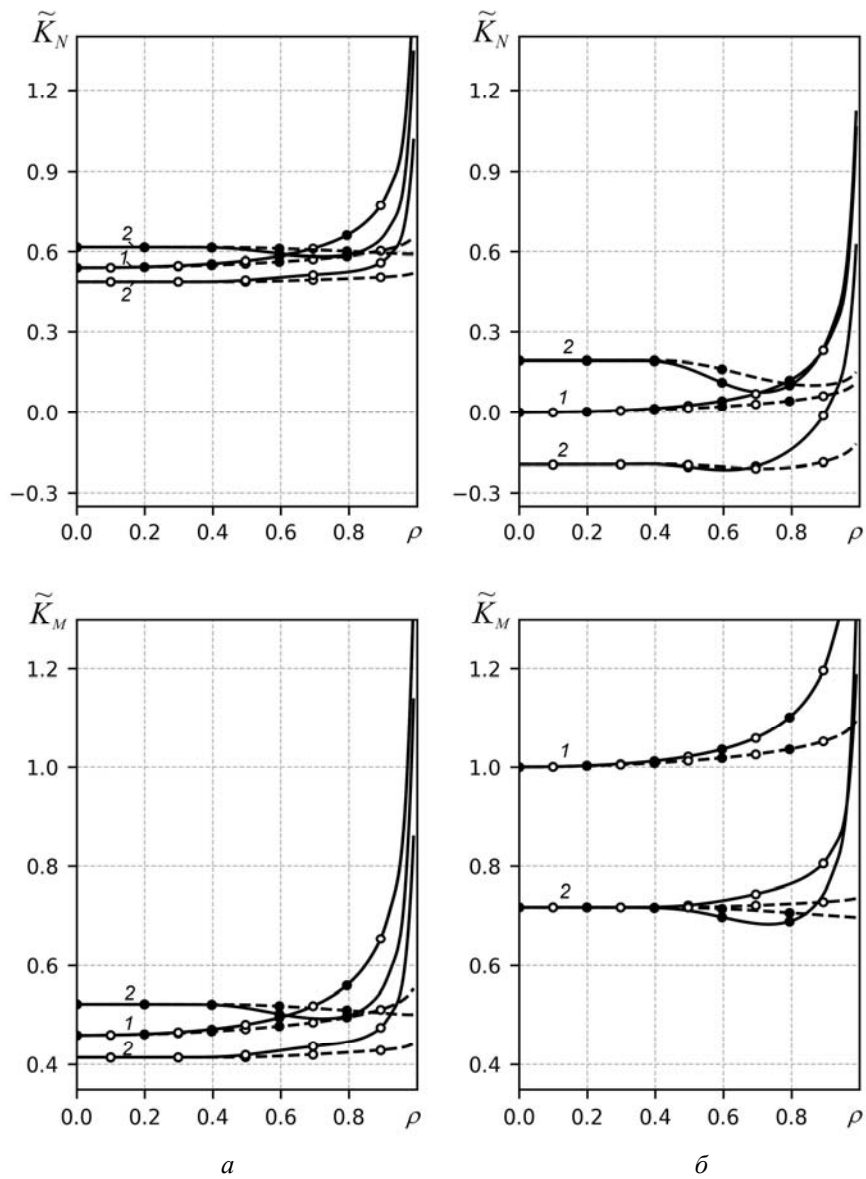


Рис. 2

Криві 1 та 2 стосуються значень параметра кривизни $\lambda = 0$ та $\lambda = 2$, відповідно. На рисунках ліворуч (а) подано результати для контактної тріщини, а праворуч (б) – аналогічні результати для щілини. Суцільними лініями зображено результати для внутрішніх (ближніх) вершин дефектів, а штриховими – для зовнішніх (дальніх). Знак або напрямок навантаження згину визначає, в котрій із двох лицьових поверхонь оболонки відбуватиметься контакт берегів тріщини. Темними маркерами позначено результати, отримані для $m > 0$, коли береги дотикаються у внутрішній поверхні сферичної оболонки, а світлими маркерами – при $m < 0$, коли береги контактують у зовнішній лицьовій поверхні. У випадку нульової кривизни оболонки при $\lambda = 0$ маємо пластину, для якої результати за протилежних знаків навантаження збігаються (див. криві 1).

Як видно з рис. 2, врахування контакту берегів призводить до збільшення коефіцієнтів інтенсивності зусиль K_N та зменшення коефіцієнтів інтенсивності моментів K_M у вершинах тріщини для будь-яких значень параметра кривизни оболонки λ і для всього діапазону значень параметра розташування дефектів ρ порівняно з щілиною. Також, відсутність контактної взаємодії берегів щілини практично не впливає на рівень інтенсивності напружень на контактній тріщині, який залишається таким же, як і у випадку взаємодії двох тріщин, здатних до закриття, під час згину сферичної оболонки [14, 21]. Кривизна оболонки ($\lambda \neq 0$) залежно від того, в якій поверхні відбувається контакт берегів, дає більший при $m > 0$ (криві 2 з темними маркерами) або менший при $m < 0$ (криві 2 зі світлими маркерами) рівень напружень в околі тріщини порівняно з пластиною. Для щілини, внаслідок неврахування контакту її берегів, антисиметрія напруженого стану щодо знаку навантаження згину не порушується аж до початку ефекту взаємодії з тріщиною при зближенні дефектів (криві 2, рис. 2, б).

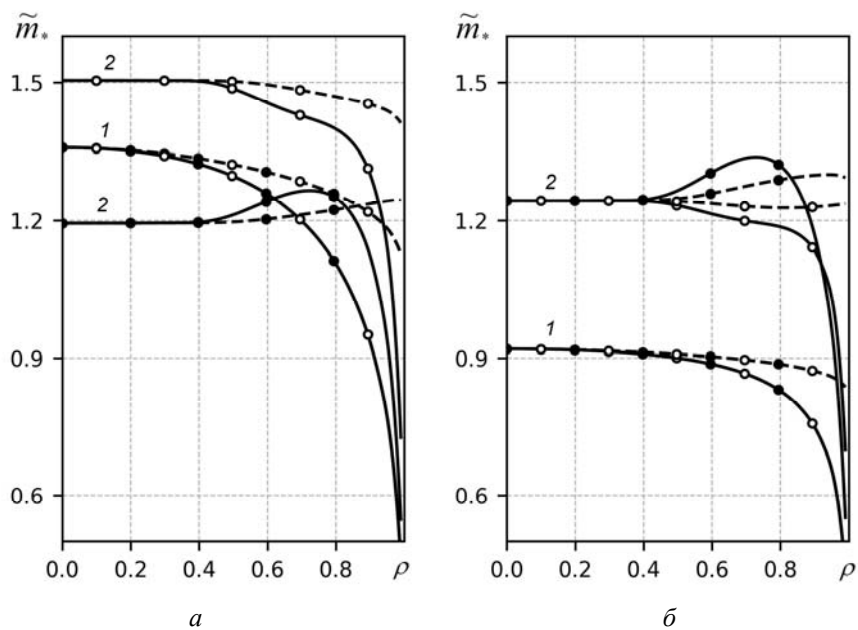


Рис. 3

З рис. 3 бачимо, що руйнівне навантаження загалом змінюється немонотонно як стосовно розташування колінеарних дефектів, так і стосовно кривизни оболонки. За наявності кривизни принциповим стає те, в якій з лицьових поверхонь, внутрішній чи зовнішній, відбуватиметься закриття тріщини. Якщо для щілини із зростанням кривизни оболонки λ область безпечних навантажень завжди розширюється, то для тріщини

ни, у разі змикання її берегів у внутрішній поверхні ($m > 0$) і за відсутності взаємодії дефектів при малих ρ , отримали меншу утримувальну здатність оболонки, ніж у аналогічно навантаженій пластині. Крім того, для $m > 0$ під час зближення дефектів проявляється діапазон значень параметра віддалі ρ , де більш небезпечними стають дальні вершини (штрихові лінії з темними маркерами лежать нижче відповідних суцільних).

Результати обчислення розподілу безрозмірного контактної зусилля $\tilde{N}_y = hN_y/|m|$ вздовж зімкнутих берегів тріщини зображено на рис. 4. Криві 1, отримані для $\lambda = 0$ та $\rho = 0,9$, відповідають контактному зусиллю на тріщині з близько розташованою щілиною у пластині [11, 12]. Криві 2, побудовані для $\lambda = 2$ та $\rho = 0$, описують результати для поодинокі тріщини в сферичній оболонці [19], а криві 3 – для $\lambda = 2$, $\rho = 0,9$ та показують перерозподіл контактної зусилля на тріщині в сферичній оболонці внаслідок впливу близько розташованої колінеарної щілини. Як видно з рисунка, якщо кривизна оболонки загалом призводить до послаблення контактної зусилля, особливо посередині тріщини, то вплив близько розташованої щілини сильно порушує симетрію розподілу контактної зусилля відносно середини тріщини і у внутрішній вершині тріщини призводить до протилежного ефекту підсилення контактної взаємодії.

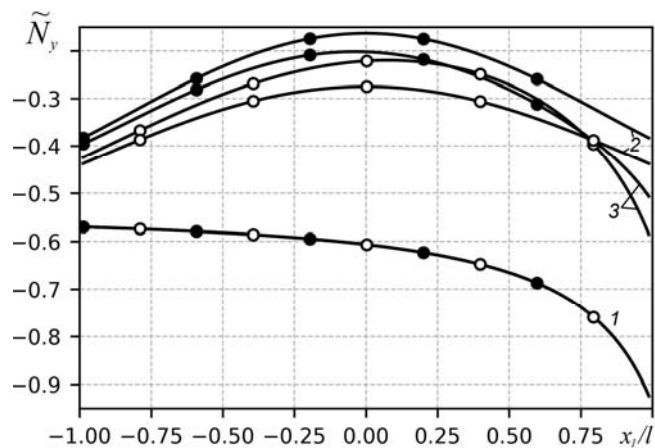


Рис. 4

У граничних випадках подані тут результати збігаються з отриманими раніше. Так, при $\rho = 0$ отримуємо окремі результати для згину пологої сферичної оболонки з поодинокими дефектами типу контактної тріщини [19] або вільної від напружень щілини [3, 4, 17], а при $\lambda = 0$ – розв'язок задачі згину пластини з тріщиною та колінеарною щілиною [11, 12, 24].

Висновок.

Запропоновано підхід до двовимірного моделювання взаємовпливу різнотипних дефектів (контактної тріщини та вузької щілини) за згину пологої сферичної оболонки. Застосовано класичну теорію оболонок Кірхгофа – Лява та модель контакту берегів тріщини по лінії.

При аналізі числового розв'язку сингулярних інтегральних рівнянь встановлено залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів і руйнівного навантаження від взаємного розташування тріщини та щілини в сферичній оболонці та від її кривизни, які загалом є немонотонні.

Якщо для щілини із зростанням кривизни оболонки область безпечних навантажень завжди розширюється, то для контактної тріщини, у разі змикання її берегів у внутрішній поверхні оболонки і відсутності впливу щілини, отримали меншу утримувальну здатність оболонки, ніж в пластині. Крім того, у разі закриття тріщини у внутрішній поверхні при зближенні дефектів більш небезпечними можуть ставати і їх дальні вершини.

Із збільшенням параметра кривизни оболонки контактне зусилля на зімкнутих берегах тріщини послаблюється. Порівняно з пластиною в оболонці зменшується вплив колінеарної щілини на зростання абсолютної величини реакції поблизу вершини тріщини, ближчої до щілини.

У запропонованій розрахунковій схемі рівень навантаження згину припускається таким, що щілина не закривається за жодних умов. Часткове змикання берегів вузької щілини під час згину можна також урахувати, комбінуючи на щілині умови вільного краю та контакту вздовж лінії. Конструктивно нелінійні мішані задачі такого сорту – предмет майбутніх досліджень.

РЕЗЮМЕ. У двовимірній постановці розглянуто задачу про пружну та граничну рівноваги пологої сферичної оболонки, послабленої парою розташованих вздовж меридіана прямолінійних розрізів. Один вважається контактною тріщиною, здатною до закриття, інший – вузькою щілиною з вільними від в'язей берегами. Контактну взаємодію берегів тріщини за дії навантаження згину описано з використанням моделі контакту вздовж лінії у лицьовій поверхні оболонки. Числовий розв'язок задачі побудовано методом сингулярних інтегральних рівнянь з використанням алгоритму механічних квадратур. Вивчено закономірності розподілу контактної реакції на зімкнутих берегах тріщини. Досліджено вплив кривизни оболонки та взаємного розташування дефектів на величину коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів та на значення руйнівного навантаження.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: сферична оболонка, тріщина, щілина, колінеарні дефекти, згин, закриття тріщини.

1. Довбня Е.Н. О корректности постановки симметричных задач механики пологих оболочек с разрезами // Теоретическая и прикладная механика. – 1988. – Вып. 19. – С. 98 – 100.
2. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
3. Механика композитов (под общей ред. Гузя А.Н.): в 12-и томах. Т. 7. Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др. Концентрация напряжений. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с.
4. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
5. Осадчук В.А., Подстригач Я.С. Напряженное состояние и предельное равновесие оболочек с трещинами // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. – Москва: ВИНТИ, 1986. – 18. – С. 3 – 52.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
7. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
8. Сулим Г., Опанасович В., Яцик І. Двобічний згин пластини Рейсснера зі співвісними наскрізними щілиною та тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів // Вісник Тернопільського нац. техн. ун-ту. – 2015. – № 3. – С. 7 – 18.
9. Хижняк В.К., Шевченко В.П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. – Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1980. – 126 с.
10. Хлуднев А.М. Контактная задача для пологой оболочки с трещиной // Прикл. математика и механика. – 1995. – 59, № 2. – С. 318 – 326.
11. Шацький І.П., Далак Т.М. Взаємодія тріщини з колінеарною щілиною за згину пластини // Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2015. – Вип. 1. – С. 211 – 218.
12. Delyak T.M., Shatskyi I.P. Interference of closable cracks and narrow slits in an elastic plate under bending // J. of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2020. – 14, N 2. – P. 51 – 68.

13. *Delyavskyy M., Opanasovych V., Seliverstov R., Bilash O.* A symmetric three-layer plate with two coaxial cracks under pure bending // *Appl. Sci.* – 2021. – **11**, N 6. – Art. number 2859.
14. *Dovbnya K.M., Hryhorchuk Yu.V.* Stressed state of a shell of double curvature with two collinear cracks under bending // *J. of Mathematical Sci.* – 2016. – **212**, N 1. – P. 98 – 105.
15. *Dovbnya K.M., Shevtsova N.A.* Studies on the stress state of an orthotropic shell of arbitrary curvature with the through crack under bending loading // *Strength of Materials.* – 2014. – **46**, N 3. – P. 45 – 349.
16. *Dovbnya K.M., Shevtsova N.A.* Two collinear cracks with contacting lips in an orthotropic shell of any curvature under the conditions of bending // *Materials Sci.* – 2014. – **49**, N 6. – P. 743 – 748.
17. *Erdogan F.E.* Cylindrical and spherical shells with cracks // *Int. J. Fract. Mech.* – 1969. – **5**, N 3. – P. 229 – 237.
18. *Khudnev A.M., Kovtunen V.A.* Analysis of Cracks in Solids. – Boston: WIT-Press, 2000. – 386 p.
19. *Liu R., Wang C.H., Bathgate R.G.* Crack closure in spherical shells // *Int. J. Fract.* – 1999. – **99**, N 4. – P. 307 – 323.
20. *Shatskii I.P.* Model for contact of crack boundaries in a bending plate // *J. of Mathematical Sci.* – 2001. – **103**. – P. 357 – 362.
21. *Shatskii I.P., Makoviichuk N.V.* Effect of closure of collinear cracks on the stress-strain state and the limiting equilibrium of bent shallow shells // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics.* – 2011. – **52**. – P. 464 – 470.
22. *Shatsky I.P.* Bending of the plate weakened by the crack with contacting edges // *Dopovidi Akademii Nauk Ukrainskoi RSR. Ser. A – Fiziko-Matematichni ta Technichni Nauki.* – 1988. – N 7. – P. 49 – 51.
23. *Shats'kyi I.P., Dalyak T.M.* Closure of cracks merged with slots in bent plates // *Materials Sci.* – 2002. – **38**. N 1, – P. 24 – 33.
24. *Shatskyi I., Dalyak T.* Interaction of contact cracks and narrow slits in plate bending // *Procedia Structural Integrity.* – 2018. – **13**, N 5. – P. 1476 – 1481.
25. *Opanasovych V.K., Seliverstov R.H.* Bending of a plate with two identical collinear rectilinear cracks according to the theory of Reissner // *Mater. Sci.* – 2001. – **37**. – P. 59 – 64.
26. *Young M.J., Sun C.T.* Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution // *Int. J. Fract.* – 1992. – **55**. – P. 81 – 93.
27. *Zehnder A.T., Viz M.J.* Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending and twisting loads // *Applied Mechanics Reviews.* – 2005. – **58**. – P. 37 – 48.
28. *Zhao J., Liu R., Wu X.J.* Effects of partial crack–face contact for the bending of thin shell structures // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* – 2008. – **49**, N 1. – P. 128 – 150.

Надійшла 23.08.2023

Затверджена до друку 12.12.2023