

Г. П. Марченко, О. П. Дацишин, І. А. Рудавська

**КРАЙОВА ПОХИЛА ТРІЩИНА У ПРУЖНОМУ КРУГОВОМУ ДИСКУ
ПІД ДІЄЮ КОНТАКТНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАНУ,
вул. Наукова, 5, 79060, Львів, Україна; e-mail: o.p.datsyshyn@gmail.com*

Abstract. The two-dimensional elasticity problem for a circular disk with an edge inclined crack, on the finite section of whose the boundary uniformly distributed pressure and tangential forces (frictional forces) are applied, is solved. The contact load is balanced by the concentrated forces and moment applied at the disk center. Contact with friction of the crack faces is allowed. The problem is reduced to solving a system of two complex singular integral equations of the first kind with a Cauchy kernel. The Numerical values of stress intensity factors are obtained depending on the location of the contact load on the disk boundary, as well as the crack length and the coefficients of friction on the section of contact load application and between the crack faces. The solution is illustrated in the example of the railway wheel.

Key words: contact problem, circular disk, edge inclined crack, uniformly distributed pressure, friction, stress intensity factors.

Вступ.

Тіла осесиметричної форми є елементами трибоспрямижень у багатьох сучасних машинах і механізмах, таких як технічна пара колесо – рейка, опорний і робочий валки вальцювальних станів, підшипники, різні фрикційні передачі і т. п. Їх ресурс часто вичерпується в результаті розвитку поверхневих тріщин у зоні контакту співдотичних тіл. Розв'язки задач про напружено-деформований стан кругових дисків, послаблених розрізами (тріщинами), під дією контактної навантаження важливі як фундаментальні в галузі задач математичної теорії тріщин, так і як прикладні, зокрема для прогнозування міцності і довговічності елементів трибоспрямижень.

Розв'язання контактних задач для обмежених кругових областей з тріщинами викликає певні труднощі математичного характеру. Багато таких задач, присвячених обчисленню коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у вершинах тріщин, з'явилося в літературі для випадку стиску кругового диска з центральною тріщиною. Найпростіший випадок дії двох зосереджених сил на краю диска вздовж лінії тріщини вивчали ще в роботах [3, 7]. А тріщину, нахилену до напрямку дії зосереджених сил, дослідили в [8, 11]. У роботах [11, 14] таку тріщину досліджували за дії рівномірно розподіленого тиску на двох протилежних ділянках контуру диска. Випадок стиску диска двома заокругленими штампами було розглянуто в [1].

Щодо задач про стиск диска з крайовою тріщиною, то кількість таких досліджень на сьогодні незначна. Відомі тільки результати для крайової радіальної тріщини у диску під дією системи паралельних ліній тріщини зосереджених сил [12] і коли дві радіальні зосереджені сили діють під кутом до лінії тріщини [15].

У роботі [5] була запропонована інша схема стиску диска, яка дозволяє вивчати проблему контактної взаємодії круглих тіл із врахуванням сил тертя в контакт. Цю

схему навантаження O . Дацишин зі співавторами застосували для випадку диска з розкритою внутрішньою радіальною тріщиною [2, 10]. Зокрема, ними проведено детальний аналіз розкриття тріщини та КІН за різних розташувань контактної навантаження на краю диска.

У продовження цих досліджень у даній роботі методом сингулярних інтегральних рівнянь [4, 6, 9] розв'язано двовимірну задачу теорії пружності для кругового диска з крайовою похилою тріщиною, на скінченній ділянці межі якого діють рівномірно розподілений тиск і дотичні зусилля, що моделюють сили тертя на ділянці контакту. Модельне контактне навантаження зрівноважене зосередженими силами та моментом, прикладеними у центрі диска. В залежності від розташування модельного навантаження розглянуто різні можливі випадки взаємодії берегів тріщини (проковзування, зчеплення, розкриття). Задачу зведено до системи двох комплексних сингулярних інтегральних рівнянь першого роду з ядром Коші, які розв'язано чисельно методом механічних квадратур. Отримано числові значення КІН залежно від розташування контактної навантаження на межі диска, а також від довжини тріщини та величини сил тертя на ділянці контакту і між берегами тріщини.

§1. Формулювання задачі.

Розглянемо пружний круговий диск радіуса R , обмежений контуром L_0 , з центром у початку основної системи координат xOy (рис. 1). Диск послаблений крайовою похилою тріщиною з контуром L , віднесеною до локальної системи координат $x_1O_1y_1$. Локальна система координат $x_1O_1y_1$ зв'язана з основною співвідношенням $z = z_1 e^{i\alpha} + z_1^0$, де z_1^0 – афікс точки O_1 в основній системі координат xOy ; α – кут нахилу осі O_1x_1 до Ox . В центрі диска також розташуємо полюс полярної системи координат (r, φ) , коли $z = r e^{i\varphi}$.

На ділянці контакту завдовжки $2a$ на межі диска ($|z| = R$) діють рівномірно розподілений тиск інтенсивності p і дотичні зусилля (сили тертя), зв'язані з ним законом Кулона через коефіцієнт тертя f_s . Сили тертя направлені у додатному напрямку відносно полярної системи координат. Контактне навантаження зрівноважується прикладеними у центрі диска зосередженими силами X_0, Y_0 і моментом M_0 . Розташування контактної навантаження відносно тріщини задається кутом φ_0 , що відповідає центру ділянки контакту (ЦДК) і змінюється від 0° до 360° . Кутіві межі ділянки контакту визначаються кутами φ_1 і φ_2 , зв'язаними з ЦДК співвідношенням $\varphi_0 = (\varphi_2 + \varphi_1)/2$.

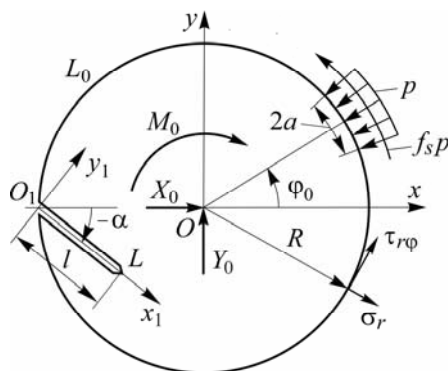


Рис. 1

Таким чином, крайові умови задачі на межі диска матимуть вигляд

$$\sigma_r(t_0) + i\tau_{r\varphi}(t_0) = \begin{cases} (-1 + if_s)p, & \text{якщо } \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]; \\ 0, & \text{якщо } \varphi \notin [\varphi_1, \varphi_2]; \end{cases} \quad t_0 \in R e^{i\varphi}. \quad (1.1)$$

Береги тріщини за певних розташувань контактного навантаження (за певних φ_0) можуть контактувати. Нижче розглянуто загальний випадок їх контакту, а саме: проковзування з тертям та можливість зчеплення. Тоді крайові умови задачі на берегах тріщини будуть такими:

$$N^\pm(t) + iT^\pm(t) = 0 \quad (t \in L_1); \quad (1.2)$$

$$v^+(t) - v^-(t) = 0 \quad (t \in L_2); \quad (1.3)$$

$$T^\pm(t) = f_c \operatorname{sign}[\tilde{T}^\pm(t)] |N^\pm(t)| \quad (t \in L_2); \quad (1.4)$$

$$u^+(t) - u^-(t) + i[v^+(t) - v^-(t)] = 0 \quad (t \in L_3); \quad (1.5)$$

$$N^+(t) - N^-(t) + i[T^+(t) - T^-(t)] = 0 \quad (t \in L_3). \quad (1.6)$$

У формулах (1.2) – (1.6) контур L прямолінійної тріщини складається із сукупності ділянок L_1 – на яких тріщина відкрита, L_2 – на яких береги тріщини проковзують та L_3 – де вони зчеплені. Розміри контактуючих ділянок L_2 і L_3 наперед невідомі та підлягають визначенню. Величина f_c задає коефіцієнт тертя між берегами тріщини. Через N і T , v і u позначено відповідно нормальні і дотичні складові зусиль на берегах тріщини та переміщень їх берегів у локальній системі координат $x_1O_1y_1$. При цьому верхні індекси вказують на граничні значення відповідних величин при підході до верхнього (+) та нижнього (–) берегів тріщини. У формулі (1.4) величина $\tilde{T}^\pm(t)$ необхідна для визначення знаку дотичних контактних напружень, про що буде сказано нижче.

Крім того, на ділянках зчеплення берегів тріщини L_3 має виконуватися умова

$$|T^\pm(t)| < f_c |N^\pm(t)| \quad (t \in L_3). \quad (1.7)$$

Рівняння рівноваги диска мають вигляд

$$X_0 + iY_0 - i \int_{L_0} (\sigma_r + i\tau_{r\varphi}) dt_0 = 0; \quad (1.8)$$

$$M_0 - \operatorname{Re} \int_{L_0} (\sigma_r + i\tau_{r\varphi}) \bar{t}_0 dt_0 = 0. \quad (1.9)$$

§2. Сингулярні інтегральні рівняння задачі.

Скориставшись методом суперпозиції, комплексні потенціали Колосова – Мухелішвілі для сформульованої задачі запишемо у вигляді

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \left[\frac{1}{T-z} + \frac{\bar{T}}{z\bar{T}-R^2} \right] g'(t) e^{i\alpha} dt + \frac{z(T\bar{T}-R^2)(z\bar{T}-2R^2)}{R^2(z\bar{T}-R^2)^2} \overline{g'(t) e^{-i\alpha} d\bar{t}} \right\} + \Phi_0(z); \quad (2.1)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \left[\frac{\bar{T}^3}{(z\bar{T}-R^2)^2} + \frac{\bar{T}}{(T-z)^2} \right] g'(t) e^{i\alpha} dt + \right. \quad (2.2)$$

$$\left. + \left[\frac{1}{T-z} + \frac{\bar{T}}{z\bar{T}-R^2} + \frac{\bar{T}(z\bar{T}-3R^2)(T\bar{T}-R^2)}{(z\bar{T}-R^2)^3} \right] \overline{g'(t) e^{-i\alpha} d\bar{t}} \right\} + \Psi_0(z),$$

де $T = te^{ia} - R$. Перші доданки у правих частинах формул (2.1), (2.2) визначають збурений стан диска, зумовлений тріщиною [6], а другі (функції $\Phi_0(z)$ і $\Psi_0(z)$) описують напружений стан у суцільному диску без тріщини під дією заданого зовнішнього навантаження і знаходяться як [2, 5]

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) = & \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\sigma_r(t_0) + i\tau_{r\varphi}(t_0)}{t_0 - z} dt_0 + \frac{X_0 - iY_0}{\pi R^2(1+\kappa)} z - \frac{X_0 + iY_0}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z} + \frac{iM_0}{2\pi R^2} - \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{\sigma_r(t_0)}{t_0} dt_0; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Psi_0(z) = \frac{R^2}{\pi z^2} \int_{L_0} \frac{\tau_{r\varphi}(t_0)}{t_0 - z} dt_0 - \frac{X_0 - iY_0}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z} + \frac{iM_0}{2\pi z^2} - \frac{R^2}{2\pi iz} \int_{L_0} \frac{\sigma_r(t_0) + i\tau_{r\varphi}(t_0)}{(t_0 - z)^2} dt_0. \quad (2.4)$$

У співвідношеннях (2.3), (2.4) для узагальненого плоского напруженого стану (тонкий диск) $\kappa = (3-\mu)/(1+\mu)$, де μ – коефіцієнт Пуассона. Відомі на контурі диска функції $\sigma_r(t_0)$ і $\tau_{r\varphi}(t_0)$ визначаються крайовою умовою (1.1), а значення зосереджених сил X_0 , Y_0 та моменту M_0 знаходимо з умов рівноваги (1.8), (1.9) у вигляді

$$\begin{aligned} X_0 &= Rp(\sin \varphi - f \cos \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}; \quad Y_0 = Rp(-\cos \varphi - f \sin \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}; \\ M_0 &= -R^2 f_s p(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Вважатимемо у потенціалах (2.1) і (2.2) функцію $g'(t)$ невідомою. Подамо її у вигляді суми двох функцій [6]

$$\begin{aligned} g'(t) &= g'_1(t) + g'_2(t) \quad (t \in L); \\ g_1(t) &= \frac{2G}{1+\kappa} [v^+(t) - v^-(t)]; \quad g_2(t) = -\frac{2iG}{1+\kappa} [u^+(t) - u^-(t)], \end{aligned}$$

які визначають похідні від стрибків, відповідно, нормальних і дотичних переміщень на контурі тріщини.

Задовольняючи тепер за допомогою комплексних потенціалів (2.1), (2.2) крайові умови задачі (1.2) – (1.6) на берегах тріщини, в результаті отримаємо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) першого роду з ядром Коші відносно невідомих $g'_1(t)$ і $g'_2(t)$:

$$\operatorname{Re} D(\tau) = \pi \operatorname{Re} P(\tau) \quad (\tau \in L_1); \quad (2.5)$$

$$\operatorname{Im} D(\tau) + n \operatorname{Re} D(\tau) = \pi [\operatorname{Im} P(\tau) + n \operatorname{Re} P(\tau)] \quad (\tau \in L_1 \cup L_2). \quad (2.6)$$

У лівих частинах рівнянь функція

$$D(\tau) = I\{L_1\} g'_1(\tau) + I\{L_1 \cup L_2\} g'_2(\tau),$$

де сингулярний оператор $I\{\Lambda\}$ по контуру Λ визначається формулою

$$I\{\Lambda\}\psi(\tau) = \int_{\Lambda} [R(t, \tau)\psi(t) + S(t, \tau)\overline{\psi(t)}] dt,$$

а коефіцієнт n у формулі (2.6) набуває значень

$$n = \begin{cases} 0 & (\tau \in L_1); \\ -f_c \operatorname{sign}[\operatorname{Im}(P(\tau))] & (\tau \in L_2). \end{cases}$$

Ядра $R(t, \tau)$ і $S(t, \tau)$ інтегральних рівнянь (2.5), (2.6) визначаються так:

$$R(t, \tau) = K(t, \tau) - \frac{e^{i\alpha}}{2} \left[\frac{H\bar{T}^2}{R^2(R^2 - H\bar{T})} + \frac{\bar{H}^2 T^2 - 2R^2 \bar{H} + R^2 \bar{T}}{(R^2 - T\bar{H})^2} + \right. \\ \left. + e^{-2i\alpha} \frac{2R^2 H(T\bar{T} - R^2) + T^2(\bar{H} + \bar{T})(\bar{H}T - 3R^2) + 4R^4 T}{(R^2 - T\bar{H})^3} \right]; \\ S(t, \tau) = L(t, \tau) - \frac{e^{i\alpha}}{2} \left[\frac{T^2 \bar{H}}{R^2(R^2 - T\bar{H})} + \frac{H^2 \bar{T} - 2R^2 H + R^2 T}{(R^2 - H\bar{T})^2} + \frac{T^2(H - T)e^{-2i\alpha}}{(R^2 - T\bar{H})^2} \right],$$

де $H = \tau e^{i\alpha} - R$;

$$K(t, \tau) = \frac{e^{i\alpha}}{2} \left(\frac{1}{T - H} + \frac{e^{-2i\alpha}}{\bar{T} - \bar{H}} \right); \quad L(t, \tau) = \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left(\frac{1}{\bar{T} - \bar{H}} + \frac{T - H}{(\bar{T} - \bar{H})^2} e^{-2i\alpha} \right).$$

Праві частини рівнянь (2.5), (2.6) визначають діюче на диск зовнішнє навантаження через функцію

$$P(\tau) = - \left\{ \Phi_0(H) + \overline{\Phi_0(H)} + e^{-2i\alpha} \left[H \overline{\Phi_0'(H)} + \overline{\Psi_0(H)} \right] \right\}. \quad (2.7)$$

Підставивши в (2.7) величини комплексних потенціалів $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ з формул (2.3), (2.4), остаточно отримаємо

$$P(\tau) = - \frac{1}{\pi} \left\{ \operatorname{Re} \Omega(H) + \frac{p}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) + e^{-2i\alpha} \left[\frac{Rp(1 + if_s)}{2i} \overline{a(H)} \left(H - \frac{R^2}{H} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{X_0 + iY_0}{1 + \kappa} \left(\frac{H}{R^2} - \frac{1}{2H} \right) + \frac{X_0 - iY_0}{1 + \kappa} \frac{H}{2\bar{H}^2} + R^2 f_s p \overline{b(H)} \frac{1}{\bar{H}^2} - \frac{iM_0}{2} \frac{1}{\bar{H}^2} \right] \right\}.$$

Тут введено позначення:

$$\Omega(H) = - \frac{p(1 - if_s)}{i} b(H) + \frac{2(X_0 - iY_0)}{(1 + \kappa)R^2} H - \frac{X_0 + iY_0}{1 + \kappa} \frac{1}{H}; \\ a(H) = \frac{e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_1}}{(H - R e^{i\varphi_2})(H - R e^{i\varphi_1})}; \quad b(H) = \ln \frac{H - R e^{i\varphi_2}}{H - R e^{i\varphi_1}}.$$

Систему СІР (2.5), (2.6) розв'язували чисельно методом механічних квадратур [4, 6]. Зауважимо, що на відміну від розв'язку задачі для внутрішньої тріщини, який має кореневу особливість на її кінцях, шуканий розв'язок для крайової тріщини має бути обмежений у точці виходу тріщини на край диска. Порядок цієї особливості встановлюється на основі аналізу СІР [6]. А щоб обминути цю складність, застосовували інший (спрощений) спосіб чисельного розв'язування СІР задач з крайовими тріщинами [4, с. 184 – 185].

КІН у вершині тріщини ($z_1 = l$) шукаємо на основі розв'язку системи (2.5), (2.6) за формулою [6]

$$K_I - i K_{II} = - \lim_{t \rightarrow l} \left[\sqrt{2\pi |t - l|} (g_1'(t) + g_2'(t)) \right].$$

Слід зауважити, що ділянки контакту берегів тріщини визначаються одночасно з розв'язуванням інтегральних рівнянь задачі з додаткових умов рівності нулю нормаль-

них контактних напружень на їх кінцях, а зони зчеплення і проковзування самих ділянок контакту встановлюються на основі додаткової умови (1.7). При цьому розв'язок задачі будується методом послідовних наближень.

Крім того, величина $\tilde{T}^{\pm}(t) = T_k(t)$ у формулі (1.4) задіяна в ітераційному процесі, коли $k = 0, 1, 2, \dots$. За нульове наближення $T_0(t)$ ($k = 0$) вибираємо дотичні напруження в суцільному диску на лінії тріщини під дією зовнішнього навантаження, а наступні наближення $T_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) вже відповідають значенням дотичних контактних напружень на берегах тріщини.

§3. Числові результати та їх обговорення.

Розрахунки проводили на прикладі локомотивного колеса діаметром $2R=1050$ мм у технічній парі колесо – рейка. Довжину ділянки контакту колеса з рейкою $2a$ прийняли рівною 13 мм. Коефіцієнти тертя f_s і f_c дорівнюють 0,3. Розглянуто три фіксовані довжини тріщини: $l=1$ мм, $l=5$ мм та $l=10$ мм. Кут орієнтації тріщини вибрали рівним $\alpha = -60^\circ$, що відповідає характерному пологому куту поширення поверхневих тріщин у тілах кочення [13].

В результаті проведених розрахунків виявлено кінетику взаємодії (закриття – розкриття) берегів тріщини за переміщення контактного навантаження ($0^\circ \leq \varphi_0 \leq 360^\circ$), яку схематично представлено на діаграмі (рис. 2). Ці дані свідчать про те, що коли ділянка контакту знаходиться у першому квадранті координатної площини xOy , то тріщина за заданих довжин закрита. З наближенням контактного навантаження до гирла тріщини – коли ЦДК у другому квадранті – тріщина починає швидко розкриватися з гирла до її повного розкриття. Вона розкрита до тих пір, поки ЦДК перебуває у третьому квадранті, а також частково заходить у четвертий.

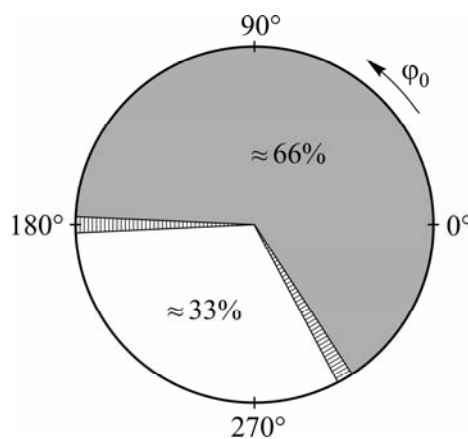


Рис. 2

І наприкінці переміщення контактного навантаження (починаючи з кута $\varphi_0 \approx 300^\circ$) тріщина знову швидко закривається, починаючи з гирла. Важливо те, що за заданих вище геометричних і силових факторів тріщина найдовше ($\approx 66\%$) повністю закрита, близько 33% часу вона розкрита і зовсім недовго (при переході від стану закриття в стан розкриття і навпаки) її береги частково контактують.

На рис. 3 і 4 зображено залежність відносних КІН K_I/p і K_{II}/p у вершині тріщини від розташування контактного навантаження (кута φ_0), коли тріщина розкрита, а ЦДК знаходиться у третьому квадранті недалеко від її гирла. Криві 1, 2, 3 відповідають трьом різним довжинам тріщини, а саме $l=1$ мм, $l=5$ мм, $l=10$ мм. Бачимо, що КІН K_I і K_{II} інтенсивно змінюються, коли ЦДК перебуває недалеко від гирла тріщини, а з наближенням ЦДК до гирла досягають своїх найбільших значень: додатних за величиною для K_I і від'ємних – для K_{II} . При цьому чим менша довжина розкритої тріщини, тим ці значення більші. З віддаленням ЦДК від гирла КІН спадають (для K_{II} за модулем), тому що тоді вершина тріщини починає виходити із зони впливу контактного навантаження.

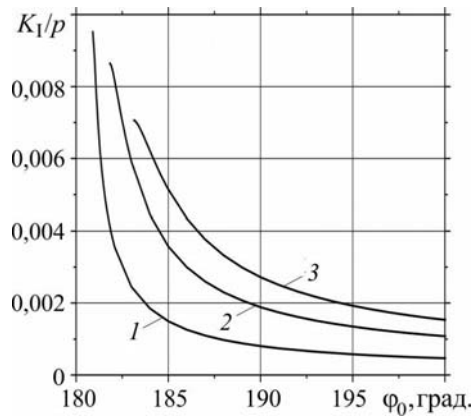


Рис. 3

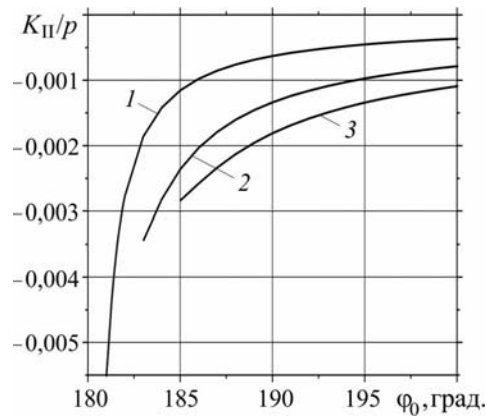


Рис. 4

За переміщення контактної навантаження вершина тріщини перебуває переважно у зоні стиску. Очевидно, що розкриття тріщини, необхідне для її розвитку розривом, відбувається за рахунок дії на ділянці контакту дотичних зусиль (сил тертя). А саме, коли ЦДК минає гирло тріщини, залишаючи його трохи позаду себе, сили тертя відразу ж вступають в дію і миттєво розкривають тріщину, яка стає небезпечною на розрив. Їх вплив, судячи з рис. 3, максимальний за умови якомога ближчого розташування ЦДК до гирла тріщини. Потім – з віддаленням ЦДК від гирла тріщини – вплив сил тертя поступово згасає, повністю зникаючи за достатньої віддалі від гирла (коли $\varphi_0 \approx 300^\circ$).

Проаналізовано і випадок, коли тріщина недалеко від ділянки контакту повністю закрита. Зрозуміло, що для тріщини із зімкнутими у вершині берегами коефіцієнт інтенсивності K_I з фізичних міркувань нульовий. На рис. 5 зображено зміну відносного коефіцієнта K_{II}/p , коли ділянка контакту починає «наїжджати» на гирло тріщини, а потім минає його. Цей процес теж досліджували для різних довжин тріщини: $a-l=1\text{мм}$; $b-l=5\text{мм}$; $v-l=10\text{мм}$.

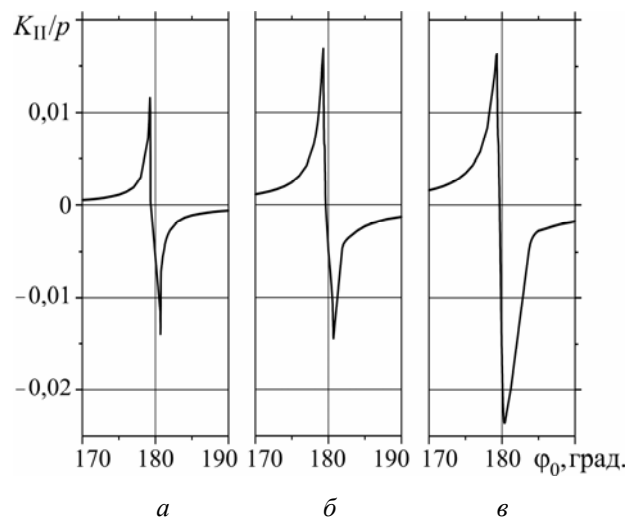


Рис. 5

Як видно, КІН K_{II} найбільші, коли ЦДК розташований поблизу гирла тріщини. Причому вони максимальні (додатні), коли ЦДК перебуває справа від гирла, і мініма-

льні (від'ємні) – коли зліва, а їх числові значення наведено в табл. 1. Із ростом довжини тріщини різниця між цими значеннями тільки збільшується. Слід також додати, що оскільки для закритої тріщини $K_I=0$, то за заданих довжин вона буде рости вздовж свого продовження.

Таблиця 1

l , мм	$K_{II,max}/p$	$K_{II,min}/p$
1	0,011 $\varphi_0 \approx 179,2^\circ$	- 0,014 $\varphi_0 \approx 180,7^\circ$
5	0,017 $\varphi_0 \approx 179,3^\circ$	- 0,015 $\varphi_0 \approx 180,7^\circ$
10	0,016 $\varphi_0 \approx 179,3^\circ$	- 0,023 $\varphi_0 \approx 180,3^\circ$

В табл. 2 подано числові значення відносних КІН K_{II}/p для різних довжин тріщини l , коли контактне навантаження знаходиться на значній віддалі від тріщини. Бачимо, що всі вони дуже малі і на цілий порядок менші від значень, коли ЦДК є поблизу гирла.

Таблиця 2

l , мм	φ_0 , град.				
	0	30	90	120	270
K_{II}/p					
1	$0,110 \times 10^{-3}$	$0,125 \times 10^{-3}$	$0,084 \times 10^{-3}$	$0,062 \times 10^{-3}$	$0,10 \times 10^{-3}$
5	$0,245 \times 10^{-3}$	$0,280 \times 10^{-3}$	$0,190 \times 10^{-3}$	$0,141 \times 10^{-3}$	$0,22 \times 10^{-3}$
10	$0,345 \times 10^{-3}$	$0,398 \times 10^{-3}$	$0,272 \times 10^{-3}$	$0,206 \times 10^{-3}$	$0,32 \times 10^{-3}$

Підсумовуючи вищесказане, констатуємо, що основний вплив контактного навантаження на тріщину реалізується, коли воно діє біля тріщини. І саме тоді тріщина стає особливо небезпечною як на розрив, так і на зсув.

Висновки.

Методом сингулярних інтегральних рівнянь з використанням комплексних потенціалів Колосова – Мухелішвілі розв'язано двовимірну задачу теорії пружності для кругового диска з крайовою похилою тріщиною під дією рівномірно розподіленого тиску і сил тертя на скінченній ділянці межі диска, коли в центрі диска прикладені зрівноважувальні зосереджені сили і момент. Враховано можливий контакт берегів тріщини від дії зовнішнього навантаження. Обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень здійснені для локомотивного колеса діаметром 1050 мм.

Встановлено, що за заданих геометричних і силових факторів (малі пологі тріщини, близькі до реальних коефіцієнти тертя $f_s = f_c = 0,3$) з пересуванням контактного навантаження вздовж межі диска, коли кут φ_0 змінюється від 0° до 360° (рис. 2), найдовше ($\approx 66\%$ часу обходу контуру диска) тріщина повністю закрита, близько 33% часу вона розкрита і зовсім недовго (при переході від стану закриття в стан розкриття і навпаки) її береги частково контактують.

Показано, що основний вплив контактного навантаження на тріщину відбувається, коли воно діє біля гирла тріщини, і саме тоді тріщина стає найбільш схильною до поширення як за механізмом розриву, так і зсувом.

РЕЗЮМЕ. Розв'язано двовимірну задачу теорії пружності для кругового диска з крайовою похилою тріщиною, на скінченній ділянці межі якого прикладені рівномірно розподілений тиск і дотичні зусилля (сили тертя). Контактне навантаження зрівноважене зосередженими силами та моментом, прикладеними у центрі диска. Допускається контакт з тертям берегів тріщини. Задачу зведено до розв'язання системи двох комплексних сингулярних інтегральних рівнянь першого роду з ядром Коші. Отримано числові значення коефіцієнтів інтенсивності напружень залежно від розташування контактної навантаження на межі диска, а також від довжини тріщини та коефіцієнтів тертя на ділянці прикладання контактної навантаження і між берегами тріщини. Розв'язок проілюстровано на прикладі залізничного колеса.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: контактна задача, круговий диск, крайова похила тріщина, рівномірно розподілений тиск, тертя, коефіцієнти інтенсивності напружень.

1. *Авадзи Х., Сато С.* Измерение трещиностойкости при комбинированном разрушении с помощью испытанной дисковых образцов // Тр. амер. о-ва инженеров-механиков: Теорет. основы инж. расчетов. – 1978. – **100**, № 2. – С. 67 – 75.
2. *Дацьшин О.П., Рудавська І.А.* Круговий диск з радіальною внутрішньою тріщиною під дією модельного контактної навантаження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2021. – **57**, № 2. – С. 5 – 15.
3. *Либацикий Л.Л., Ковчик С.Е.* О разрушении дисков с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1967. – **3**, № 4. – С. 458 – 464.
4. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
5. *Панасюк В.В., Теплий М.Й.* Деякі контактні задачі теорії пружності. – Київ: Наук. думка, 1975. – 196 с.
6. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
7. *Ярема С.Я., Крестин Г.С.* Предельное равновесие диска с диаметральной трещиной // Прикл. механика. – 1968. – **4**, № 7. – С. 90 – 96.
8. *Atkinson C., Smelser R., Sanchez J.* Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test // Int. J. Fract. – 1982. – **18**, N 4. – P. 279 – 291.
9. *Datsyshyn O., Panasyuk V.* Structural Integrity Assessment of Engineering Components under Cyclic Contact. – Cham: Springer, 2020. – 314 p.
10. *Datsyshyn O.P., Rudavs'ka I.A., Glazov A.Yu., Kravchuk O.A.* Subsurface radial cracks in the contact area in a circular disk // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 6. – P. 706 – 714.
11. *Dong Sh., Wang Y., Xia Y.* Stress intensity factors for central cracked circular disk subjected to compression // Eng. Fract. Mech. – 2004. – **71**, N 7. – P. 1135 – 1148.
12. *Isida M., Imai R., Tsuru N.* Symmetric plane problems of arbitrary shaped plates with an edge crack // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. – 1979. – **A45**, N 395. – P. 743 – 749.
13. *Keer L.M., Bryant M.D.* A pitting model for rolling contact fatigue // Trans. ASME: J. Lubric. Technol. – 1983. – **105**, N 2. – P. 198 – 205.
14. *Markides Ch.F., Pazis D.N., Kourkoulis S.K.* Stress intensity factors for the Brazilian disc with a short central crack: Opening versus closing cracks // Appl. Math. Model. – 2011. – **35**, N 12. – P. 5636 – 5651.
15. *Xiao W.S., Zhu H.P.* Radial edge crack problem of a circular disk under circumference load // AIP Conf. Proc. – 2013. – **1542**. – P. 911 – 914.

Надійшла 15.08.2023

Затверджена до друку 12.12.2023