

М.С.Слободян, М.І.Шайнога

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ЗА ЗГИНУ
КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З СИСТЕМОЮ ТРІЩИН З УРАХУВАННЯМ
СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна; e-mail: mykola.slobodyan@lnu.edu.ua*

Abstract. The bending problem for a circular plate weakened by a system of through straight cracks is solved within the assumption of crack closure along a region of constant height. Using the complex potentials for the plane problem and classical plate bending problem, the solution of the problem is reduced to a series of linear conjugation problems. The solving the latter led to the system of singular integral equations on the faces of cracks. The boundary conditions on the edge of a circular plate are satisfied analytically. The contact force between the crack faces and moment as well as force intensity factors are numerically analyzed at the various parameters. The corresponding graphs are constructed.

Key words: plate, crack, closure, plane problem, bending, linear conjugation, singular equations, contact force.

Вступ.

Конструктивні пластинчасті елементи широко застосовуються у машинобудуванні та інших галузях техніки. Під час встановлення чи в процесі експлуатації у таких елементах можуть виникати тріщиноподібні дефекти. Важливо знати, як ці дефекти будуть впливати на напружено-деформований стан пластини та на її міцність. У переважній більшості наукових публікацій з дослідженнями напружено-деформованого стану таких пластинчастих елементів та при розрахунку їх на міцність не враховувався контакт берегів тріщиноподібних дефектів. Хоча з фізичних міркувань зрозуміло, що за згину пластини береги тріщин будуть контактувати. Тому розробка методів для визначення напружено-деформованого стану пластин з прямолінійними тріщинами, береги яких контактують, за їх згину є актуальною науково-технічною задачею механіки деформівного твердого тіла як з теоретичної, так і прикладної точки зору.

Задачі згину та розтягу пластин з тріщинами досліджувалися багатьма науковцями. Методи розв'язування таких задач наведено в роботах [3, 5 – 7] та інших. Дослідження напружено-деформованого стану пластини з отворами та вирізами наведено в роботах [14, 15]. Розв'язок задачі про згин пластини з наскрізною тріщиною з урахуванням контакту її берегів на основі теорії Кірхгофа - Лява методом інтегральних рівнянь наведено у [9, 10, 12, 19]. У цих працях припускалось, що береги тріщини контактують по всій її довжині на верхній або нижній основі пластини. В [23] теж вивчено контакт берегів тріщин із використанням класичної теорії згину пластин. У праці [1] експериментально досліджено контакт берегів тріщини за згину пластини та підтверджено наявність мембранної складової поля напружень біля тріщини, що є прямим наслідком контактної взаємодії берегів тріщини при згині пластини. У [22] досліджено задачу згину кусково-однорідної пластини з круговим пружним включенням та двома прямолінійними тріщинами, береги яких контактують по лінії на верхній основі

пластини. В працях [17, 21] розв'язано задачі про згин з розтягом пластини з тріщиною, береги якої контактують або не контактують, з урахуванням утворення пластичних зон на продовженні тріщини.

В [13] вперше розв'язано задачу про згин пластини з наскрізною тріщиною, в якій береги контактують по висоті пластини, а дещо пізніше таку ж задачу іншим методом розв'язано в [4]. Згин пластини з круговим отвором або абсолютно жорсткою шайбою та системою тріщин, береги яких контактують по висоті пластини, розглянуто у роботах [2, 20]. Дослідження напружено-деформованого стану тіл з міжфазними тріщинами з зонами контакту проведено у роботах [8, 11, 16]. Вплив контакту берегів термоізольованої міжфазної тріщини при термомеханічному навантаження на напружено-деформований стан досліджено у [18]. З наведеного вище бачимо, що задачі згину пластин з системою тріщин, береги яких контактують, є актуальними.

§1. Формулювання задачі.

Нехай кругла ізотропна пластини товщиною $2h$ із системою M довільно орієнтованих прямолінійних наскрізних тріщин довжиною $2l_k$ ($k = \overline{1, M}$) згинається рівномірно розподіленими моментами M_0 , прикладеними до її межі. У серединній площині пластини введемо декартову систему координат $Ox\tilde{z}$ таким чином, щоб початок координат співпадав з центром пластини, а вісь $O\tilde{z}$ була перпендикулярна до цієї серединній площини пластини. В площині Oxy виберемо полярну систему координат r і θ так, щоб точка O була її полюсом, а вісь Ox – полярною віссю. Нехай x_{0k}, y_{0k} – координати центрів тріщин O_k у площині Oxy , а α_k – кут нахилу лінії k -тої тріщини до осі Ox ($k = \overline{1, M}$). До точок O_k з координатами x_{0k}, y_{0k} віднесемо початки декартових систем координат $O_kx_ky_k$ так, щоб осі O_kx_k співпадали з лініями k -тих тріщин, відповідно. Область ззовні пластини позначимо через S^+ , а область всередині пластини позначимо через S^- , межу пластини позначимо через L , а лінію, де розміщена k -та тріщина, позначимо через L_k (рис. 1, а).

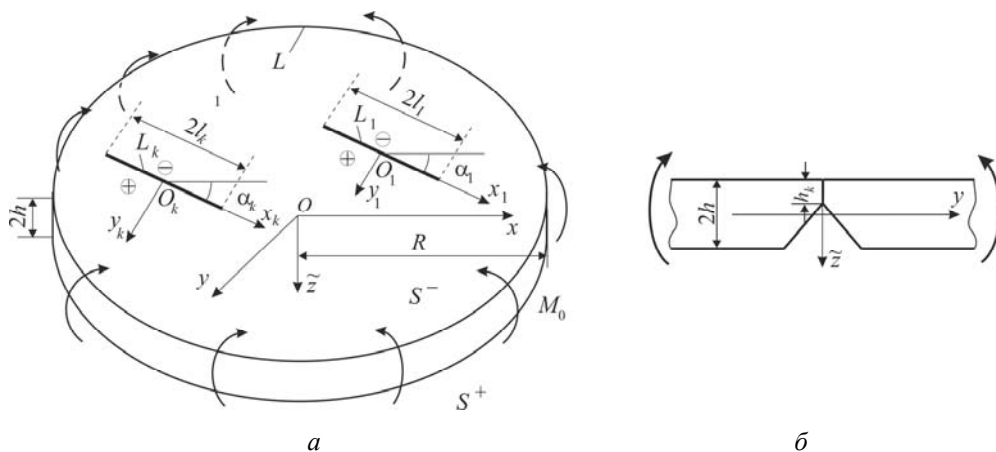


Рис. 1

Згідно формулювання задачі на межі пластини будемо мати такі крайові умови

$$M_r = M_0; \quad P_r = 0 \quad (x, y) \in L \quad (1.1)$$

$$\sigma_{rr} = 0; \quad \tau_{rr\theta} = 0 \quad (x, y) \in L, \quad (1.2)$$

де M_r – згинальний момент; $\sigma_{\Pi r}$ і $\tau_{\Pi r\theta}$ – компоненти тензора напружень у полярній системі координат; P_r – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила.

Припустимо, що за дії зовнішнього згинного навантаження береги тріщин будуть контактувати по області сталої висоти $h_k = \gamma_k h$ (смуговий контакт) по всій довжині тріщин. Схема контакту берегів тріщин при дії зовнішнього згинного навантаження зображена на рис. 1, б.

Тоді крайові умови смугового контакту берегів тріщин будуть такими [4, 13]

$$M_{y_k}^+ = M_{y_k}^- = \beta_k N_k h; \quad P^+ = P^- = 0 \quad (x_k \in L_k; k = \overline{1, M}); \quad (1.3)$$

$$\tau_{\Pi x_k y_k}^+ = \tau_{\Pi x_k y_k}^- = 0; \quad \sigma_{\Pi y_k y_k}^+ = \sigma_{\Pi y_k y_k}^- = -\frac{N_k}{2h} \quad (x_k \in L_k; k = \overline{1, M}); \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial [v_{\Pi}]}{\partial x_k} + \alpha_k h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial y_k} \right] = 0 \quad (x_k \in L_k; k = \overline{1, M}); \quad (1.5)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \cdot (1 + (1 - \gamma_k)^2); \quad \beta_k = 1 - \gamma_k / 3 \quad (\gamma_k = h_k / h; k = \overline{1, M}),$$

де N_k – контактне зусилля між берегами k -тої тріщини; h_k – висота контакту k -ої тріщини; $[f] = f^+ - f^-$, значками «+» і «-» позначено граничні значення функцій при прямуванні точки площини до k -тої тріщини при $y_k \rightarrow \pm 0$.

§2. Побудова розв'язку плоскої задачі.

За узагальненого плоского напруженого стану компоненти вектора переміщень u_{Π} , v_{Π} і тензора напружень $\sigma_{\Pi x}$, $\sigma_{\Pi y}$, $\tau_{\Pi xy}$ у декартовій системі координат визначаються через два комплексні потенціали $\Phi_{\Pi}(z)$ і $\Psi_{\Pi}(z)$ [3]

$$\sigma_{\Pi x} + \sigma_{\Pi y} = 2 \left\{ \Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Phi_{\Pi}(z)} \right\};$$

$$\sigma_{\Pi y} - i\tau_{\Pi xy} = \Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Phi_{\Pi}(z)} + z\overline{\Phi'_{\Pi}(z)} + \overline{\Psi_{\Pi}(z)}; \quad (2.1)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_{\Pi} + iv_{\Pi}) = \kappa \Phi_{\Pi}(z) - \overline{\Phi_{\Pi}(z)} - z\overline{\Phi'_{\Pi}(z)} - \overline{\Psi_{\Pi}(z)},$$

де $\mu = E/(2(1+\nu))$ – модуль зсуву; $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, x і y – декартові координати точки серединної площини пластини.

Компоненти вектора переміщень $u_{\Pi r}$, $u_{\Pi\theta}$ і тензора напружень $\sigma_{\Pi r}$, $\sigma_{\Pi\theta}$, $\tau_{\Pi r\theta}$ у полярній системі координат визначаються за формулами [3]

$$\sigma_{\Pi r} + \sigma_{\Pi\theta} = 2 \left\{ \Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Phi_{\Pi}(z)} \right\};$$

$$\sigma_{\Pi r} + i\tau_{\Pi r\theta} = \Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Phi_{\Pi}(z)} - \overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi}(z)} - \frac{\overline{z}}{z}\overline{\Psi_{\Pi}(z)}; \quad (2.2)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial \theta} (u_{\Pi r} + iu_{\Pi\theta}) = iz \left\{ \kappa \Phi_{\Pi}(z) - \overline{\Phi_{\Pi}(z)} + \overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi}(z)} + \frac{\overline{z}}{z}\overline{\Psi_{\Pi}(z)} \right\}.$$

Для випадку круглої пластини з системою M наскрізних прямолінійних тріщин комплексні потенціали $\Phi_{II}(z)$ і $\Psi_{II}(z)$ подамо у вигляді

$$\Phi_{II}(z) = \Phi_{IIK}(z) + \sum_{j=1}^M \Phi_{IIj}(z_j);$$

$$\Psi_{II}(z) = \Psi_{IIK}(z) + \sum_{j=1}^M \left\{ \Psi_{IIj}(z_j) e^{-2i\alpha_j} - \bar{z}_{0j} \Phi'_{IIj}(z_j) e^{-i\alpha_j} \right\},$$

де функції $\Phi_{IIK}(z)$ і $\Psi_{IIK}(z)$ голоморфні в області S^- , а функції $\Phi_{IIj}(z)$ і $\Psi_{IIj}(z)$ голоморфні ззовні j -тої тріщини.

Введемо функції [3]

$$\Omega_{IIj}(z_j) = \bar{\Phi}_{IIj}(z_j) + z_j \bar{\Phi}'_{IIj}(z_j) + \bar{\Psi}_{IIj}(z_j) \quad (j = \overline{1, M}),$$

а комплексний потенціал $\Phi_{IIK}(z)$ з області S^- аналітично продовжимо в область S^+ за формулою

$$\Phi_{IIK}(z) = -\bar{\Phi}_{IIK}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'_{IIK}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}_{IIK}\left(\frac{R^2}{z}\right) \quad (z \in S^+),$$

тоді з (2.1) і (2.2) отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_{IIr} + i\tau_{IIr\theta} = & \Phi_{IIK}(z) - \frac{R^2}{r^2} \Phi_{IIK}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left\{ \overline{\Phi_{IIK}(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_{IIK}(z)} \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^M \left\{ \Phi_{IIj}(z_j) + \left(1 + \frac{\bar{z}}{z} e^{2i\alpha_j}\right) \overline{\Phi_{IIj}(z_j)} - \frac{\bar{z}}{z} e^{2i\alpha_j} \left\{ \Omega_{IIj}(z_j) + (z_j - \bar{z}_j) \overline{\Phi'_{IIj}(z_j)} \right\} \right\}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial}{\partial \theta} (u_{IIr} + iu_{II\theta}) = & \kappa \Phi_{IIK}(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_{IIK}\left(\frac{R^2}{z}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left\{ \overline{\Phi_{IIK}(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_{IIK}(z)} \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^M \left\{ \kappa \Phi_{IIj}(z_j) - \left(1 + \frac{\bar{z}}{z} e^{2i\alpha_j}\right) \overline{\Phi_{IIj}(z_j)} + \frac{\bar{z}}{z} e^{2i\alpha_j} \left\{ \Omega_{IIj}(z_j) + (z_j - \bar{z}_j) \overline{\Phi'_{IIj}(z_j)} \right\} \right\}; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{IIy} - i\tau_{IIxy} = & \Phi_{IIm}(z_m) + \Omega_{IIm}(\bar{z}_m) + (z_m - \bar{z}_m) \overline{\Phi'_{IIm}(z_m)} + \Phi_{IIK}(z) + \\ & + \left(1 + \frac{R^2}{z^2} e^{-2i\alpha_m}\right) \overline{\Phi_{IIK}(z)} + z e^{-2i\alpha_m} \overline{\Phi'_{IIK}(z)} + \frac{R^2}{z^2} e^{-2i\alpha_m} \left\{ \Phi_{IIK}\left(\frac{R^2}{z}\right) - \bar{z} \overline{\Phi'_{IIK}(z)} \right\} + \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \left\{ \Phi_{IIj}(z_j) + \overline{\Phi_{IIj}(z_j)} + z_m e^{-i(\alpha_m - \alpha_j)} \overline{\Phi'_{IIj}(z_j)} \right\} + e^{-2i\alpha_m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \left\{ (z_{0m} - z_{0j}) e^{i\alpha_j} \times \right. \\ & \left. \times \overline{\Phi'_{IIj}(z_j)} - e^{2i\alpha_j} \left(\overline{\Phi_{IIj}(z_j)} + \bar{z}_j \overline{\Phi'_{IIj}(z_j)} - \Omega_{IIj}(z_j) \right) \right\} \quad (m = \overline{1, M}); \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
2\mu \frac{\partial}{\partial x}(u_{II} + iv_{II}) &= \kappa \Phi_{II m}(z_m) - \Omega_{II m}(\bar{z}_m) - (z_m - \bar{z}_m) \overline{\Phi'_{II m}(z_m)} + \kappa \Phi_{II K}(z) - \\
&+ \left(1 + \frac{R^2}{\bar{z}^2} e^{-2i\alpha_m}\right) \overline{\Phi_{II K}(z)} + z e^{-2i\alpha_m} \overline{\Phi'_{II K}(z)} + \frac{R^2}{\bar{z}^2} e^{-2i\alpha_m} \left\{ \Phi_{II K}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z} \overline{\Phi'_{II K}(z)} \right\} + \\
&+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \left\{ \kappa \Phi_{II j}(z_j) - \overline{\Phi_{II j}(z_j)} - z_m e^{-i(\alpha_m - \alpha_j)} \overline{\Phi'_{II j}(z_j)} \right\} - e^{-2i\alpha_m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \left\{ (z_{0m} - z_{0j}) e^{i\alpha_j} \times \right. \\
&\times \overline{\Phi'_{II j}(z_j)} - e^{2i\alpha_j} \left(\overline{\Phi_{II j}(z_j)} + \bar{z}_j \overline{\Phi'_{II j}(z_j)} - \Omega_{II j}(z_j) \right) \left. \right\} \quad (m = \overline{1, M}). \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що для функції $\Phi_{II K}(z)$ виконується [3]

$$\Phi_{II K}(z) = \begin{cases} a'_0 + a'_1 z + \dots, & z \rightarrow 0, \\ b'_0 + b'_1 z + \dots, & z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.7)$$

причому $a'_0 + \bar{b}'_0 = 0$, $b'_1 = 0$.

Якщо підставити крайові умови (1.4) у формули (2.5), тоді одержимо задачі лінійного спряження

$$\left(\Phi_{II m}(t) - \Omega_{II m}(t) \right)^+ - \left(\Phi_{II m}(t) - \Omega_{II m}(t) \right)^- = 0 \quad (t \in L_m; m = \overline{1, M}),$$

розв'язки яких будуть мати вигляд

$$\Phi_{II m}(z) = \Omega_{II m}(z) \quad (m = \overline{1, M}). \quad (2.8)$$

Додамо рівняння (2.5) і (2.6)

$$(1 + \kappa) \left\{ \Phi_{II m}(z_m) + \Phi_{II K}(z) \right\} = \sigma_{II y} - i\tau_{II xy} + 2\mu \frac{\partial(u_{II} + iv_{II})}{\partial x_m} \quad (m = \overline{1, M}).$$

З крайових умов (1.4) з урахуванням попередньої формули отримаємо задачі лінійного спряження

$$(1 + \kappa) \left(\Phi_{II m}^+(t) - \Phi_{II m}^-(t) \right) = 2\mu \left[\frac{\partial(u_{II} + iv_{II})}{\partial x_m} \right] \quad (t \in L_m; m = \overline{1, M}). \quad (2.9)$$

Введемо позначення

$$g'_m(t) = \frac{2\mu}{(1 + \kappa)i} \left[\frac{\partial(u_{II} + iv_{II})}{\partial x_m} \right] \quad (t \in L_m; m = \overline{1, M}).$$

Тепер розв'яжемо задачу лінійного спряження (2.9)

$$\Phi_{II m}(z_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l_m}^{l_m} \frac{g'_m(t) dt}{t - z_m} \quad (m = \overline{1, M}), \quad (2.10)$$

де комплексозначні функції $g'_m(t)$ є невідомими.

З крайових умов (1.2) та формули (2.3) матимемо

$$\begin{aligned}
& \Phi_{\Pi K}^-(s) - \Phi_{\Pi K}^+(s) + \sum_{j=1}^M \Phi_{\Pi j} \left((s - z_{0j}) e^{-i\alpha_j} \right) + \sum_{j=1}^M \left(1 + \frac{R^2 e^{2i\alpha_j}}{s^2} \right) \bar{\Phi}_{\Pi j} \left(\left(\frac{R^2}{s} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) - \\
& - \frac{R^2}{s^2} \sum_{j=1}^M e^{2i\alpha_j} \left\{ \Omega_{\Pi j} \left(\left(\frac{R^2}{s} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) + \left((s - z_{0j}) e^{-i\alpha_j} - \left(\frac{R^2}{s} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \bar{\Phi}'_{\Pi j} \left(\left(\frac{R^2}{s} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) \right\} = 0 \quad (s \in L). \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Введемо функцію

$$\begin{aligned}
& F_{\Pi}(z) = \\
& = \begin{cases} \Phi_{\Pi K}(z) - \sum_{j=1}^M \Phi_{\Pi j} \left((z - z_{0j}) e^{-i\alpha_j} \right) & (z \in S^+); \\ \Phi_{\Pi K}(z) + \sum_{j=1}^M \left(1 + \frac{R^2 e^{2i\alpha_j}}{z^2} \right) \bar{\Phi}_{\Pi j} \left(\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) - \frac{R^2}{z^2} \sum_{j=1}^M e^{2i\alpha_j} \left\{ \Omega_{\Pi j} \left(\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) + \right. \\ \left. + \left((z - z_{0j}) e^{-i\alpha_j} - \left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) \bar{\Phi}'_{\Pi j} \left(\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) \right\} & (z \in S^-). \end{cases} \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Тоді з формули (2.11) запишемо таку задачу лінійного спряження

$$F_{\Pi}^+(s) - F_{\Pi}^-(s) = 0 \quad (s \in L),$$

а її розв'язок буде таким: $F_{\Pi}(z) = b'_0$.

Із (2.12) маємо

$$\Phi_{\Pi K}(z) = b'_0 + \sum_{j=1}^M \Phi_{\Pi j} \left((z - z_{0j}) e^{-i\alpha_j} \right) \quad (z \in S^+); \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{\Pi K}(z) = b'_0 - \sum_{j=1}^M \left(1 + \frac{R^2 e^{2i\alpha_j}}{z^2} \right) \bar{\Phi}_{\Pi j} \left(\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) + \frac{R^2}{z^2} \times \\
& \times \sum_{j=1}^M e^{2i\alpha_j} \left\{ \Omega_{\Pi j} \left(\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) + \left((z - z_{0j}) e^{-i\alpha_j} - \left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \bar{\Phi}'_{\Pi j} \left(\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) \right\} \quad (z \in S^-). \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Для визначення константи b'_0 підставимо (2.13) і (2.14) у (2.7), тоді отримаємо

$$b'_0 = \frac{1}{2\pi R^2} \sum_{j=1}^M \int_{-l_j}^{l_j} \operatorname{tg}'_{j1}(t) dt. \tag{2.15}$$

Підставимо крайові умови (1.4) та співвідношення (2.8) у формули (2.5)

$$\begin{aligned}
& -\frac{N_m}{2h} = \Phi_{\Pi m}^+(x_m) + \Phi_{\Pi m}^-(x_m) + \\
& + \Phi_{\Pi K}(x_m e^{i\alpha_m} + z_{0m}) + \left(1 + \frac{R^2 e^{-2i\alpha_m}}{(x_m e^{-i\alpha_m} + \bar{z}_{0m})^2}\right) \overline{\Phi_{\Pi K}(x_m e^{i\alpha_m} + z_{0m})} + \\
& + e^{-2i\alpha_m} \left(x_m e^{i\alpha_m} + z_{0m} - \frac{R^2}{x_m e^{-i\alpha_m} + \bar{z}_{0m}}\right) \overline{\Phi'_{\Pi K}(x_m e^{i\alpha_m} + z_{0m})} + \frac{R^2 e^{-2i\alpha_m}}{(x_m e^{-i\alpha_m} + \bar{z}_{0m})^2} \times \\
& \times \Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{x_m e^{-i\alpha_m} + \bar{z}_{0m}}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \left\{ \Phi_{\Pi j}(z_j) + \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} + x_m e^{-i(\alpha_m - \alpha_j)} \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} \right\} + \\
& + e^{-2i\alpha_m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \left\{ (z_{0m} - z_{0j}) \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} e^{i\alpha_j} - e^{2i\alpha_j} (\overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} + \bar{z}_j \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} - \Omega_{\Pi j}(z_j)) \right\}, \quad (2.16)
\end{aligned}$$

де $z_j = (z_{0m} - z_{0j} + x_m e^{i\alpha_m}) e^{-i\alpha_j}$, $m = \overline{1, M}$.

Підставимо (2.10), (2.13) – (2.15) у формули (2.16) і отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $g'_m(t) = M_0 G_m(l_m \eta) / h^2$ ($m = \overline{1, M}$), яка в безрозмірних змінних буде мати вигляд

$$\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\eta, \xi) G_j(\eta) + S_{mj}(\eta, \xi) \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta = -\frac{h N_m(\xi)}{2M_0} \quad (\xi \in [-1, 1], m = \overline{1, M}), \quad (2.17)$$

де

$$R_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} 1/(\pi(\eta - \xi)) + \tilde{R}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{R}_{mj}(\eta, \xi) + R_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j; \end{cases} \quad S_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} \tilde{S}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{S}_{mj}(\eta, \xi) + S_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{mj}(\eta, \xi) = & \frac{\lambda_j}{2\pi} \left\{ e^{-i\alpha_j} \left(\frac{\bar{W}_{mj} - T_j}{(T_j \bar{X}_m - 1)^2} + T_j \right) + \frac{e^{i\alpha_j} (\bar{T}_j - \bar{X}_m)}{\bar{T}_j X_m - 1} + \frac{2e^{-2i\alpha_m + i\alpha_j}}{(T_j \bar{X}_m - 1)} \left(T_j + \frac{X_m - T_j}{T_j \bar{X}_m - 1} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{T_j e^{-2i\alpha_m - i\alpha_j}}{(T_j \bar{X}_m - 1)^2} \left(T_j^2 - \bar{W}_{mj} T_j - \frac{2(X_m \bar{W}_{mj} + X_m T_j + \bar{W}_{mj} T_j - T_j^2)}{T_j \bar{X}_m - 1} \right) \right\};
\end{aligned}$$

$$\tilde{L}_{mj}(\eta, \xi) = \frac{\lambda_j}{2\pi} \frac{e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1} \left\{ T_j - X_m + \frac{e^{2i\alpha_j} (W_{mj} - \bar{T}_j) + T_j^2 e^{-2i\alpha_m} (T_j - X_m)}{\bar{T}_j X_m - 1} \right\} - \frac{\lambda_j T_j e^{-i\alpha_j}}{2\pi};$$

$$R_{mj}^V(\eta, \xi) = \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{2\pi} \left(\frac{1}{T_j - X_m} + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \right); \quad S_{mj}^V(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \left(1 - \frac{T_j - X_m}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} e^{-2i\alpha_m} \right);$$

$$T_j = Z_{0j} + \lambda_j \eta e^{i\alpha_j}; \quad X_j = Z_{0j} + \lambda_j \xi e^{i\alpha_j}; \quad W_{mj} = X_m e^{-2i\alpha_j} - Z_{0j} e^{-2i\alpha_j} + \bar{Z}_{0j}; \quad \lambda_j = \frac{l_j}{R};$$

$$Z_{0j} = \frac{z_{0j}}{R} = \frac{x_{0j}}{R} + i \frac{y_{0j}}{R}; \quad g'_m(t) = M_0 G_m(l_m \eta) / h^2; \quad G_m(\eta) = G_{m1}(\eta) + i G_{m2}(\eta),$$

де $G_{m1}(\eta)$, $G_{m2}(\eta)$ – дійсні функції; $\xi = \frac{x_j}{l_j}$, $\eta = \frac{t_j}{l_j}$ – безрозмірні змінні.

§3. Побудова розв'язку задачі згину пластини.

Для розв'язку задачі згину пластини введемо функції комплексної змінної $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ та запишемо формули для визначення напружено-деформованого стану пластини у вигляді [6]

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} = \frac{\partial g}{\partial x}; \quad (3.1)$$

$$\tilde{\kappa} \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z \overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} = f; \quad (3.2)$$

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)} - \frac{\bar{z}}{z} \overline{\Psi(z)} = \tilde{g}; \quad (3.3)$$

$$\tilde{\kappa} \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + \bar{z} \overline{\Phi'(z)} + \frac{\bar{z}}{z} \overline{\Psi(z)} = \tilde{f}. \quad (3.4)$$

Тут

$$g = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}; \quad f = -\frac{1}{D(1-\nu)} \left\{ M_y + i \tilde{c}' + i H_{xy} + i \int_{l_k}^t N_y(\tau) d\tau \right\}; \quad \left(\tilde{\kappa} = \frac{3+\nu}{1-\nu} \right);$$

$$\tilde{g} = \frac{1}{iz} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] e^{i\theta} \right\}; \quad \tilde{f} = -\frac{1}{D(1-\nu)} \left\{ M_r + i \tilde{c}'_0 + i H_{r\theta} + i \int_0^s N_r(\tau) d\tau \right\},$$

де M_y і H_{xy} – відповідно згинальний та крутний моменти в декартовій системі координат; N_y – перерізувальна сила; w – прогин пластини; $D = 2Eh^3 / \{3(1-\nu^2)\}$ – циліндрична жорсткість; E – модуль пружності матеріалу пластини, а ν – коефіцієнт Пуассона; M_r і $H_{r\theta}$ – згинальний та крутний момент в полярній системі координат; \tilde{c}' і \tilde{c}'_0 – дійсні сталі.

Для круглої пластини з системою тріщин комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ подамо у вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_K(z) + \sum_{j=1}^M \Phi_j(z); \quad \Psi(z) = \Psi_K(z) + \sum_{j=1}^M \Psi_j(z), \quad (3.5)$$

де функції $\Phi_K(z)$ та $\Psi_K(z)$ голоморфні в області S^- , а функції $\Phi_j(z)$ та $\Psi_j(z)$ є голоморфними ззовні j -тої тріщини.

Якщо ввести функції [6]

$$\Omega_j(z_j) = -\bar{\Phi}_j(z_j) - z_j \bar{\Phi}'_j(z_j) - \bar{\Psi}_j(z_j) \quad (j = \overline{1, M}),$$

а комплексний потенціал $\Phi_{IK}(z)$ з області S^- аналітично продовжимо в область S^+ за формулою

$$\Phi_K(z) = -\bar{\Phi}_K\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'_K\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}_K\left(\frac{R^2}{z}\right) \quad (z \in S^+),$$

та врахувати (3.5), тоді формули (3.1) – (3.4) будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} & \Phi_K(z) - \frac{R^2}{r^2} \Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left\{ \overline{\Phi_K(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \sum_{j=1}^M \Phi_j(z_j) + \\ & + \sum_{j=1}^M \left(1 + \frac{\bar{z}}{z} e^{2i\alpha_j}\right) \overline{\Phi_j(z_j)} + \frac{\bar{z}}{z} \sum_{j=1}^M \left\{ \Omega_j(z_j) - (z_j - \bar{z}_j) \overline{\Phi'_j(z_j)} \right\} e^{2i\alpha_j} = \tilde{g}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\kappa} \Phi_K(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left\{ \overline{\Phi_K(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \tilde{\kappa} \sum_{j=1}^M \Phi_j(z_j) - \\ & - \sum_{j=1}^M \left(1 + \frac{\bar{z}}{z} e^{2i\alpha_j}\right) \overline{\Phi_j(z_j)} - \frac{\bar{z}}{z} \sum_{j=1}^M \left\{ \Omega_j(z_j) - (z_j - \bar{z}_j) \overline{\Phi'_j(z_j)} \right\} e^{2i\alpha_j} = \tilde{f}; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_m(z_m) - \Omega_m(\bar{z}_m) + (z_m - \bar{z}_m) \overline{\Phi'_m(z_m)} + \Phi_K(z) + \left(1 + \frac{R^2 e^{-2i\alpha_m}}{\bar{z}^2}\right) \overline{\Phi_K(z)} + z e^{-2i\alpha_m} \overline{\Phi'_K(z)} + \\ & + \frac{R^2 e^{-2i\alpha_m}}{\bar{z}^2} \left\{ \Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z} \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \left\{ \Phi_j(z_j) + \overline{\Phi_j(z_j)} + z_m e^{-i(\alpha_m - \alpha_j)} \overline{\Phi'_j(z_j)} \right\} + e^{-2i\alpha_m} \times \\ & \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \left(e^{i\alpha_j} (z_{0m} - z_{0j}) \overline{\Phi'_j(z_j)} - e^{2i\alpha_j} \left\{ \overline{\Phi_j(z_j)} + \bar{z}_j \overline{\Phi'_j(z_j)} + \Omega_j(z_j) \right\} \right) = \frac{\partial g}{\partial x_m}; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\kappa} \Phi_m(z_m) + \Omega_m(\bar{z}_m) - (z_m - \bar{z}_m) \overline{\Phi'_m(z_m)} + \tilde{\kappa} \Phi_K(z) - \left(1 + \frac{R^2 e^{-2i\alpha_m}}{\bar{z}^2}\right) \overline{\Phi_K(z)} - \\ & - z e^{-2i\alpha_m} \overline{\Phi'_K(z)} - \frac{R^2 e^{-2i\alpha_m}}{\bar{z}^2} \left\{ \Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z} \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \left\{ \tilde{\kappa} \Phi_j(z_j) - \overline{\Phi_j(z_j)} - \right. \\ & \left. - z_m e^{-i(\alpha_m - \alpha_j)} \overline{\Phi'_j(z_j)} \right\} - e^{-2i\alpha_m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \left(e^{i\alpha_j} (z_{0m} - z_{0j}) \overline{\Phi'_j(z_j)} - \right. \\ & \left. - e^{2i\alpha_j} \left\{ \overline{\Phi_j(z_j)} + \bar{z}_j \overline{\Phi'_j(z_j)} + \Omega_j(z_j) \right\} \right) = f_m \quad (m = \overline{1, M}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Зауважимо, що для функції $\Phi_K(z)$ виконується співвідношення [6]

$$\Phi_K(z) = \begin{cases} A'_0 + A'_1 z + \dots, & z \rightarrow 0, \\ B'_0 + B'_1 z + \dots, & z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.10)$$

причому $A'_0 + \bar{B}'_0 = 0$, $B'_1 = 0$.

З формул (3.6) – (3.9) та крайових умов (1.1) і (1.3), врахувавши (3.10), аналогічним підходом як у плоскій задачі, отримаємо

$$\Omega_m(z_m) = \tilde{\kappa} \Phi_m(z_m) \quad (m = \overline{1, M}); \quad (3.11)$$

$$\Phi_m(z_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l_m}^{l_m} \frac{y_m(t)}{t - z_m} dt \quad (m = \overline{1, M}); \quad (3.12)$$

$$\Phi_K(z) = B'_0 - \tilde{\kappa} \sum_{j=1}^M \Phi_j \left((z - z_{0j}) e^{-i\alpha_j} \right) \quad (z \in S^+); \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Phi_K(z) = & \frac{1}{\tilde{\kappa}} \left\{ -B'_0 + \frac{M_0}{D(1-\nu)} + \sum_{j=1}^M \left(1 + \frac{R^2 e^{2i\alpha_j}}{z^2} \right) \bar{\Phi}_j \left(\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) + \right. \\ & + \frac{R^2}{z^2} \sum_{j=1}^M \left\{ e^{2i\alpha_j} \left(\Omega_j \left(\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) - \left\{ (z - z_{0j}) e^{-i\alpha_j} - \left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right\} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \bar{\Phi}'_j \left(\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_{0j} \right) e^{i\alpha_j} \right) \right) \right\} \right\} \quad (z \in S^-); \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$B'_0 = -\frac{1}{(1-\tilde{\kappa})} \frac{M_0}{D(1-\nu)} - \frac{1}{2\pi R^2} \sum_{j=1}^M \int_{-l_j}^{l_j} t y_{j2}(t) dt,$$

де $y_m(t)$ – невідомі комплекснозначні функції.

Підставимо крайові умови (1.3) у формули (3.9), врахуємо співвідношення (3.11) – (3.14) і отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $y_m(t) = M_0 Y_m(\eta) / (Eh^3)$ ($m = \overline{1, M}$), яка в безрозмірних змінних буде мати вигляд

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \left\{ K_{mj}(\eta, \xi) Y_j(\eta) + L_{mj}(\eta, \xi) \overline{Y_j(\eta)} \right\} d\eta = \\ & = i\tilde{c}'_m + q\beta_m \frac{hN_m(\xi)}{M_0} + \tilde{P}_m(\xi) \quad (\xi \in [-1, 1], m = \overline{1, M}), \quad (3.15) \end{aligned}$$

де

$$K_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} \frac{\tilde{\kappa}}{\pi i(\eta - \xi)} + \tilde{K}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{K}_{mj}(\eta, \xi) + K_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j; \end{cases} \quad L_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} \tilde{L}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{L}_{mj}(\eta, \xi) + L_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{mj}(\eta, \xi) &= \frac{\lambda_j}{2\pi i} \left\{ e^{-i\alpha_j} \left(\frac{\bar{W}_{mj} - T_j}{\tilde{\kappa}(T_j \bar{X}_m - 1)^2} - T_j \right) + \frac{\tilde{\kappa} e^{i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1} (\bar{T}_j - \tilde{\kappa}^2 \bar{X}_m) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-2i\alpha_m + i\alpha_j}}{\tilde{\kappa}(T_j \bar{X}_m - 1)} \left(\tilde{\kappa}^2 T_j + T_j + \frac{2X_m - 2T_j}{T_j \bar{X}_m - 1} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{T_j e^{-2i\alpha_m - i\alpha_j}}{\tilde{\kappa}(T_j \bar{X}_m - 1)^2} \left(T_j^2 - \bar{W}_{mj} T_j - \frac{2(X_m \bar{W}_{mj} + X_m T_j + \bar{W}_{mj} T_j - T_j^2)}{T_j \bar{X}_m - 1} \right) \right\}; \\
\tilde{L}_{mj}(\eta, \xi) &= \frac{\lambda_j}{2\pi i} \frac{e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1} \left\{ T_j - X_m + \frac{e^{2i\alpha_j} (W_{mj} - \bar{T}_j) + T_j^2 e^{-2i\alpha_m} (T_j - X_m)}{\bar{T}_j X_m - 1} \right\} - \frac{\lambda_j \bar{T}_j e^{i\alpha_j}}{2\pi i \tilde{\kappa}}; \\
K_{mj}^V(\eta, \xi) &= \frac{\tilde{\kappa} \lambda_j e^{i\alpha_j}}{2\pi i} \left(\frac{1}{T_j - X_m} + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \right); \quad L_{mj}^V(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \left(1 - \frac{T_j - X_m}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} e^{-2i\alpha_m} \right);
\end{aligned}$$

$$\tilde{P}_m(\xi) = 1, 5(1 + \nu); \quad q = -\frac{3}{2}(1 + \nu); \quad Y_m(\eta) = Y_{m1}(\eta) + iY_{m2}(\eta),$$

де $Y_{m1}(\eta)$, $Y_{m2}(\eta)$ – дійсні функції.

§4. Система сингулярних інтегральних рівнянь задачі.

Візьмемо дійсну і уявну частини від рівнянь (2.17) і (3.15) та врахуємо, що $Y_j(\eta) = Y_{j1}(\eta) + iY_{j2}(\eta)$; $G_j(\eta) = G_{j1}(\eta) + iG_{j2}(\eta)$, тоді отримаємо

$$\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \left\{ Y_{j1}(\eta) (\operatorname{Im} K_{mj}(\eta, \xi) + \operatorname{Im} L_{mj}(\eta, \xi)) + Y_{j2}(\eta) (\operatorname{Re} K_{mj}(\eta, \xi) - \operatorname{Re} L_{mj}(\eta, \xi)) \right\} d\eta = \tilde{c}'_m \quad (\xi \in [-1, 1], \quad m = \overline{1, M}); \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \left\{ Y_{j1}(\eta) (\operatorname{Re} K_{mj}(\eta, \xi) + \operatorname{Re} L_{mj}(\eta, \xi)) + Y_{j2}(\eta) (-\operatorname{Im} K_{mj}(\eta, \xi) + \operatorname{Im} L_{mj}(\eta, \xi)) \right\} d\eta + \\
&\quad + \frac{q\beta_m}{2} \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \left\{ G_{j1}(\eta) (\operatorname{Re} R_{mj}(\eta, \xi) + \operatorname{Re} S_{mj}(\eta, \xi)) + \right. \\
&\quad \left. + G_{j2}(\eta) (-\operatorname{Im} R_{mj}(\eta, \xi) + \operatorname{Im} S_{mj}(\eta, \xi)) \right\} d\eta = \tilde{P}_m(\xi) \quad (\xi \in [-1, 1], \quad m = \overline{1, M}); \quad (4.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \left\{ G_{j1}(\eta) (\operatorname{Im} R_{mj}(\eta, \xi) + \operatorname{Im} S_{mj}(\eta, \xi)) + \right. \\
&\quad \left. + G_{j2}(\eta) (\operatorname{Re} R_{mj}(\eta, \xi) - \operatorname{Re} S_{mj}(\eta, \xi)) \right\} d\eta = 0 \quad (\xi \in [-1, 1], \quad m = \overline{1, M}). \quad (4.3)
\end{aligned}$$

З крайової умови (1.5) отримаємо

$$G_{m1}(\eta) + \frac{\alpha_m(1 + \tilde{\kappa})}{(1 + \kappa)(1 + \nu)} Y_{m2}(\eta) = 0 \quad (\eta \in [-1, 1], \quad m = \overline{1, M}). \quad (4.4)$$

До системи сингулярних інтегральних рівнянь (4.1) – (4.4) додаємо додаткові умови

$$\int_{-1}^1 Y_{m1}(\eta) d\eta = 0; \quad \int_{-1}^1 Y_{m2}(\eta) d\eta = 0; \quad \int_{-1}^1 \eta Y_{m1}(\eta) d\eta = 0 \quad (m = \overline{1, M}), \quad (4.5)$$

які виражають собою, відповідно, однозначність кутів повороту (перші два рівняння) та прогину пластини (третє рівняння) при обході контурів тріщин.

З умови однозначності переміщень при обході контурів тріщин матимемо

$$\int_{-1}^1 G_{m1}(\eta) d\eta = 0; \quad \int_{-1}^1 G_{m2}(\eta) d\eta = 0 \quad (m = \overline{1, M}). \quad (4.6)$$

Отже, отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь (4.1) – (4.6) для визначення невідомих дійсних функцій $Y_{m1}(\eta)$, $Y_{m2}(\eta)$, $G_{m1}(\eta)$, $G_{m2}(\eta)$ ($m = \overline{1, M}$).

§5. Числовий аналіз задачі.

Щоб числово розв'язати систему сингулярних інтегральних рівнянь (4.1) – (4.6) використаємо метод механічних квадратур [5, 7]. Зробимо заміну

$$Y_{j1}(t) = \frac{u_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}; \quad Y_{j2}(t) = \frac{u_{M+j}(t)}{\sqrt{1-t^2}}; \quad G_{j1}(t) = \frac{u_{2M+j}(t)}{\sqrt{1-t^2}}; \quad G_{j2}(t) = \frac{u_{3M+j}(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (5.1)$$

де $u_j(t)$ – неперервні дійсні функції на відрізку $[-1, 1]$, $j = \overline{1, M}$.

Для обчислення сингулярних інтегралів використаємо квадратурні формули Гауса – Чебишева [5]

$$\int_{-1}^1 K(t, x_r) \frac{u_j(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \frac{\pi}{F} \sum_{k=1}^F K(t_k, x_r) u_j(t_k) \quad (j = \overline{1, M}, r = \overline{1, F-1}), \quad (5.2)$$

де

$$t_k = \cos \frac{2k-1}{2F} \pi; \quad k = \overline{1, F}; \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{F} \quad (r = \overline{1, F-1}).$$

Якщо буде відомо значення функцій $u_j(t_k)$ у точках t_k , тоді значення функцій $u_j(x)$ у будь-якій точці можна визначити з формули [5, 7]

$$u_j(x) = \frac{2}{F} \sum_{m=1}^F u_j(t_m) \sum_{k=0}^{F-1} T_k(t_m) T_k(x) - \frac{1}{F} \sum_{m=1}^F u_j(t_m) \quad (j = \overline{1, 4M}),$$

де $T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos x)$ – многочлени Чебишева першого роду.

Якщо підставити заміну (5.1) у систему сингулярних інтегральних рівнянь (4.1) – (4.6), відповідні інтеграли обчислити за формулами (5.2), тоді отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку будемо розв'язувати методом Гауса. Збіжність числового розв'язку системи проводимо порівнянням розв'язків при $F = K$ і $F = 2K$, відповідно, де число K задається.

Коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль визначимо за формулами [5, 7]

$$K_{jM}^{*\pm} = K_1^{*j} - iK_2^{*j} = \mp \frac{2i}{3} \frac{3+\nu}{1-\nu^2} \{u_j(\pm 1) + iu_{M+j}(\pm 1)\} \quad (j = \overline{1, M}); \quad (5.3)$$

$$K_{jN}^{*\pm} = k_1^{*j} - ik_2^{*j} = \mp \{u_{2M+j}(\pm 1) + iu_{3M+j}(\pm 1)\} \quad (j = \overline{1, M}), \quad (5.4)$$

де

$$u_j(1) = \frac{1}{F} \sum_{m=1}^F (-1)^{m+1} u_j(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4F} \pi \quad (j = \overline{1, 4M});$$

$$u_j(-1) = \frac{1}{F} \sum_{m=1}^F (-1)^{m+F} u_j(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4F} \pi \quad (j = \overline{1, 4M}).$$

Розрахунки проведено при $\nu = 0,3$; $F = 200$, а параметр $\gamma_1 = h_1/h = 0,13$.

Розглянемо круглу пластину з прямолінійною тріщиною при $\alpha_1 = 0^\circ$, яка розміщена на осі Ox . На рис. 2, 3 показано графіки залежностей зведеного контактної зусилля $N^* = hN/M_0$, яке визначається за формулою (2.17), між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$ при різних параметрах задачі.

Рис. 2 відповідає випадку, коли $Y_0 = y_0/R = 0$; $\lambda = l/R = 0,5$. Крива 1 побудована при $X_0 = x_0/R = 0$; крива 2 – при $X_0 = 0,2$; крива 3 – при $X_0 = 0,3$; крива 4 – при $X_0 = 0,4$. На основі рисунка можна зробити висновок, що N^* у точці a ($\xi = -1$) зростає із збільшенням безрозмірної координати X_0 центру тріщини, а у точці b ($\xi = 1$) спочатку спадає, а потім зростає. Мінімальне значення N^* при $X_0 = 0$ набуває у точці $\xi = 0$ і при збільшенні X_0 переміщується в сторону точки $\xi = 1$. Крім того, при збільшенні X_0 контактне зусилля N^* на частині тріщини зростає, а на іншій – спадає.

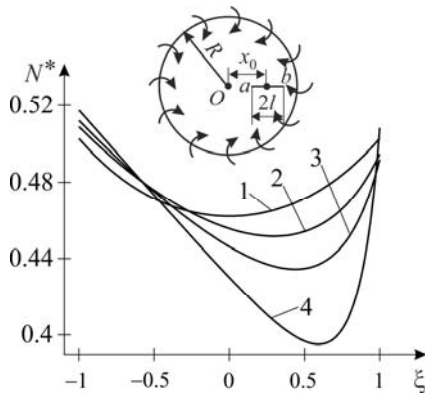


Рис. 2

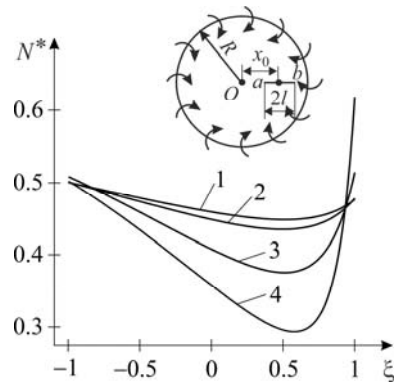
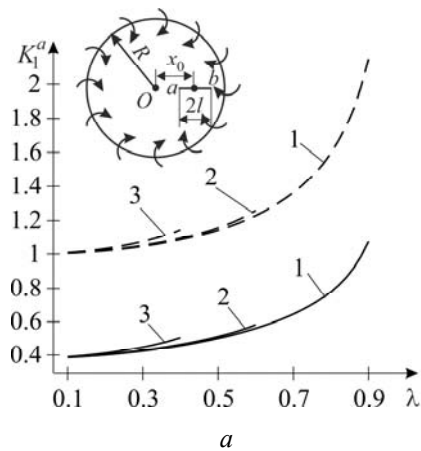
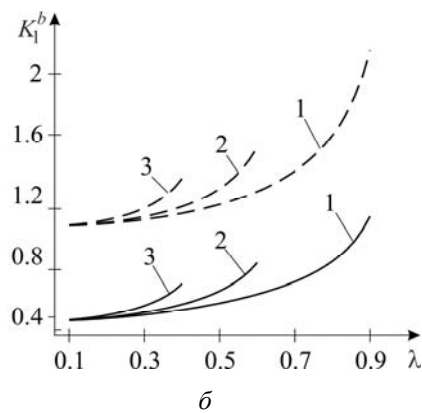


Рис. 3



а



б

Рис. 4

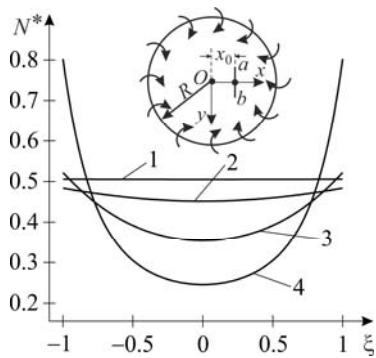


Рис. 5

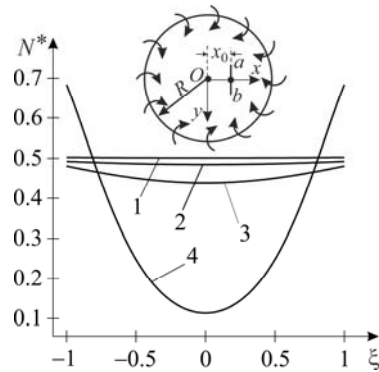
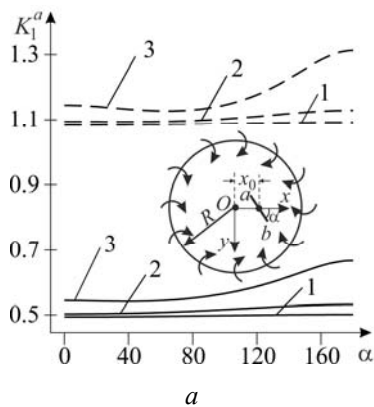
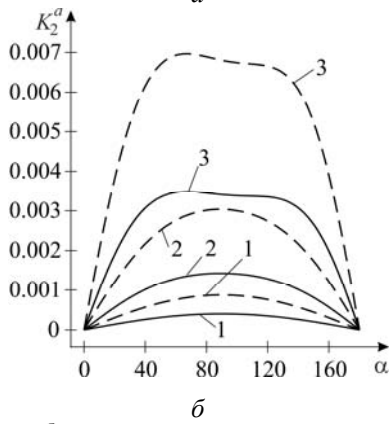


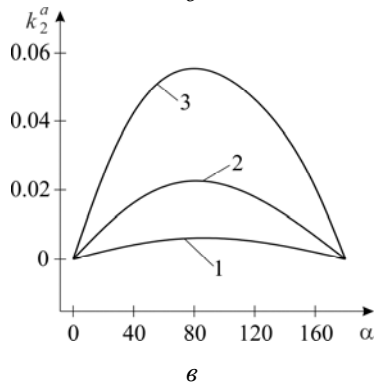
Рис. 6



a



б



в

Рис. 7

На рис. 3 зображено відповідні залежності при $\lambda = l/R = 0,4$; $X_0 = 0,4$, де крива 1 отримана при $Y_0 = 0$; крива 2 – при $Y_0 = 0,2$, крива 3 – при $Y_0 = 0,4$; крива 4 – при $Y_0 = 0,5$. З цього рисунка бачимо, що контактне зусилля N^* у точках a і b збільшується, а мінімальне значення N^* зменшується із збільшенням безрозмірної координати Y_0 центру тріщини.

На рис. 4 показано графіки залежностей коефіцієнтів інтенсивності моментів (КІМ) $K_M^* = K_M / (M_0 \sqrt{l}) = K_1$ від відносної довжини тріщини, визначені за формулою (5.3) у точках a (рис. 4, а) і b (рис. 4, б) при $Y_0 = 0$. Суцільним лініям відповідають криві, отримані з урахуванням контакту берегів тріщини, а штриховим – без урахування контакту її берегів. Причому криві 1 побудовано при $X_0 = 0$; криві 2 – при $X_0 = 0,3$; криві 3 – при $X_0 = 0,5$. Як бачимо з рисунка, КІМ у точках a і b зростають зі збільшенням відносної довжини тріщини $\lambda = l/R$, причому при збільшенні X_0 вони теж збільшуються.

Дослідимо круглу пластину з прямолінійною тріщиною при $\alpha_1 = 90^\circ$, яка є паралельною до осі Oy , а її центр розміщений на осі Ox . На рис. 5, 6 показано графіки залежностей зведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_0$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$.

Рис. 5 побудовано при $Y_0 = 0$; $X_0 = 0,5$ та $\lambda = l/R = 0,1$ (крива 1); $\lambda = 0,3$ (крива 2); $\lambda = 0,5$ (крива 3); $\lambda = 0,7$ (крива 4). Бачимо, що контактне зусилля N^* набуває свого максимального значення на кінцях тріщини, а мінімального – по її середині при $\xi = 0$.

Рис. 6 отримано при $Y_0 = 0$; $\lambda = 0,2$, де крива 1 побудована при $X_0 = 0,1$; крива 2 – при $X_0 = 0,5$; крива 3 – при $X_0 = 0,7$; крива 4 – при $X_0 = 0,9$. Числовий аналіз показав, що на кінцях тріщини контактне зусилля N^* при $X_0 < 0,72$ зменшується, а при $X_0 > 0,72$ збільшується при збільшенні X_0 .

Розглянемо круглу ізотропну пластину з довільно розташованою прямолінійною тріщиною при $Y_0 = 0$. На рис. 7 показано графіки залежностей КІМ K_1 (рис. 7, а), K_2 (рис. 7, б) і коефіцієнту інтенсивності зусиль (КІЗ) k_2 (рис. 7, в), визначені за формулою (5.4), у точці a при $\lambda = l/R = 0,4$ від кута α . Криві 1 побудовані при $X_0 = 0,1$; криві 2 – при $X_0 = 0,3$; криві 3 – при $X_0 = 0,5$. Штрихові лінії отримані без урахування контакту берегів тріщини, суцільні – з урахуванням контакту її берегів. Бачимо, що КІМ з урахуванням контакту берегів тріщини є меншими ніж без урахування контакту її берегів.

Висновок.

У статті сформульовано та розв'язано задачу про згин круглої пластини, яка містить систему довільно розташованих наскрізних прямолінійних тріщин, береги яких контактують по смузі сталої висоти. За рахунок контакту берегів тріщин розв'язок сформульованої задачі розбивається на розв'язок двох задач: плоску задачу теорії пружності та задачу згину пластини (класична теорія) із взаємозв'язаними крайовими умовами на берегах тріщин. Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та класичної теорії згину пластин розв'язки задач були зведені до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих похідних від стрибків переміщень на берегах тріщин у плоскій задачі та кутів повороту у задачі згину пластини. Встановлено, що урахування контакту берегів тріщини призводить до зменшення коефіцієнту інтенсивності моментів K_1 у порівнянні з аналогічною задачею без урахування контакту берегів тріщини та до появи коефіцієнту інтенсивності зусиль k_1 .

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу про згин круглої пластини з системою наскрізних прямолінійних тріщин, береги яких контактують в області сталої висоти. Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі та задачі згину пластини (класична теорія згину пластини) розв'язання сформульованої задачі зведено до задач лінійного спряження. Отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь на берегах тріщин. Крайові умови на межі круглої пластини задовольняються аналітично. Чисельно проаналізовано зміну контактного зусилля між берегами тріщин та коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль при різних параметрах задачі, на основі чого побудовано відповідні графіки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: пластина, тріщина, контакт, плоска задача, задача згину, задача лінійного спряження, сингулярні рівняння, контактне зусилля.

1. Кальтгоф Дж.Ф., Шацький І.П., Бюргель А. Експериментальне підтвердження контакту берегів тріщини при згині пластини. В кн.: Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (Під ред. В.В. Панасюка): в 3-х томах. – Львів: Каменяр, 1999. – Т.1. – С. 72 – 74.
2. Контактна механіка. Шорсткість, розширення і зношування поверхонь (за заг. ред. Мартиняка Р.М.). – Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022 – 392 с.
3. Мухелішвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
4. Опанасович В.К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наук. нотатки Луцького техніч. ун-ту. – 2007. – 20, № 2. – С. 123 – 127.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 442 с.
6. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск: БГУ, 1975. – 256 с.

7. Саврук М.П., Зеленьак В.М. Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: РАСТР, 2009. – 212 с.
8. Харун І.В., Лобода В.В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **45**, № 2. – С. 103 – 113.
9. Шацький І.П. Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине // Теор. и прикл. механика. – 2000. – № 31. – С. 91 – 97.
10. Шацький І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-матем. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49 – 51.
11. Adlucky V.J., Loboda V.V. Finite-element analysis of the elastoplastic state of a plane with elliptic inclusion in the presence of interface crack // J. of Mathem. Sci. – 2023. – **270**. – P. 76 – 86.
12. Dalyak T.M., Shatskyi I.P. Interference of closable cracks and narrow slits in an elastic plate under bending // J. Serbian Soc. for Computational Mechanics. – 2020. – **14**, N 2. – P. 51 – 68.
13. Dempsey J.P., Shekman I.I., Slepyan L.L. Closure of a through crack in a plate under bending // Int. J. Solids and Struct. – 1998. – **35**. – P. 4077 – 4089.
14. Kuz I., Kuz O., Sulym H. Stress-strain state of elastic plate with an arbitrary smooth notch // Acta Mechanica et Automatica. – 2015. – **9**, N 4(34). – P. 241 – 244.
15. Kuz' I.S., Moroz O.I., Kuz' O.N. Strength of elastoplastic plates containing square holes (inclusions) and cuts (thin inclusions) under uniaxial tension // Material Sci. – 2019. – **54**, N 4. – P. 603 – 609.
16. Loboda V., Sheveleva A., Mykhail O. A slipping zone model for a conducting interface crack in a piezoelectric biomaterial. In: Mechanics and Physics of Struct. Media: Asymptotic and Integral Equations Methods of Leonid Filshinsky. – 2022. – P. 253 – 269.
17. Opanasovych V.K., Nykolyshyn M.M., Slobodian M.S., Alfavit'ska S.O., Bilash O.K. Combined action of bending and tension of an isotropic plate with through crack in the absence of contact between the faces and with regard for the plastic zones and hardening of material at the tips // J. of Mathem. Sci. – 2021. – **254**, N 1. – P. 117 – 128.
18. Serednytska K.I., Martynyak R.M. Contact of the faces of an interface thermally insulated crack under thermomechanical loading // Materials Sci. – 2021. – **57**, N 2. – P. 173 – 179.
19. Shatskyi I., Dalyak T. Interaction of contact cracks and narrow slits in plate bending // Procedia Structural Integrity. – 2018. – **13**. – P. 1476 – 1481.
20. Slobodian M.S., Bilash O.V., Seliverstov R.H., Kurotchyn L.R. Bending of a plate with circular rigid inclusion and system of cracks on the assumption of strip crack face contact // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering (28.09.2022 – 21.10.2022 Lviv, Ukraine) – 2023. – 1277 012006.
21. Sulym H., Opanasovych V., Slobodian M., Bilash O. Combined bending with tension of isotropic plate with crack considering crack banks contact and plastic zones at its tops // Acta Mechanica et Automatica. – 2018. – **12**, N 2. – P. 91 - 95.
22. Sulym H., Opanasovych V., Zvizlo I., Seliverstov R., Bilash O. A circular inclusion and two radial coaxial cracks with contacting faces in a piecewise homogeneous isotropic plate under bending // Acta Mechanica et Automatica. – 2020. – **14**, N 1. – P. 16 – 21.
23. Young M., Sun C. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates // Int. J. Fract. – 1992. – **55**. – P. 81 – 93.

Надійшла 14.08.2023

Затверджена до друку 12.12.2023