

О. Ф. Кривий¹, Ю. О. Морозов²

**ОСОБЛИВОСТІ ПОЛЯ НАПРУЖЕНЬ В ОКОЛІ МІЖФАЗНОГО КРУГОВОГО
ВКЛЮЧЕННЯ ПРИ ЗМІШАНИХ УМОВАХ КОНТАКТУ ІЗ КУСКОВО-
ОДНОРІДНИМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ ПРОСТОРОМ**

¹Національний університет «Одеська Морська Академія»,
вул. Дідріхсона, 8, 65052, Одеса, Україна; e-mail: krivoi-odessa@ukr.net;

²Національний університет «Одеська політехніка»,
просп. Шевченка, 1, 65044, Одеса, Україна; e-mail: morozov@op.edu.ua

Abstract. A non-axisymmetric contact problem for circular interfacial inclusion of arbitrary shape, which is in mixed conditions with a piecewise homogeneous transversal-isotropic space, is considered. One face of inclusion is in conditions of smooth contact (shear stresses are zero), and the other, is coupled with the medium. The problem is reduced to a system of five two-dimensional singular integral equations. For an inclusion, which has an axisymmetric shape under arbitrary loads, the exact solution of the system is written out and its asymptotic properties are determined. Based on the last, a numerical-analytical method for solving the system is offered. The distribution of stresses in the neighborhood of the inclusion is obtained and its features are revealed.

Key words: transversally isotropic piecewise homogeneous space, interfacial inclusion, mixed conditions, stress distribution, singular integral equation.

Вступ.

Дослідження розподілу напружень в околі міжфазних просторових включень, які містяться в області з'єднання пружних матеріалів при різних умовах контактної взаємодії із середовищем, є важливою практичною і складною математичною задачею. Розв'язанню таких задач для різних середовищ і різних типів концентраторів напружень в пружній і термопружній постановці присвячені роботи багатьох авторів. При цьому дослідження, в основному, обмежувались кусково-однорідними ізотропними середовищами та осесиметричними задачами для трансверсально-ізотропних просторів [2, 3, 5, 6, 10, 11, 19 – 22, 26 – 28]. Стосовно задач в більш загальній постановці, зокрема, для анізотропних середовищ, то відомі в основному чисельно-аналітичні і асимптотичні розв'язки [7, 8, 25], які базуються на підході, започаткованому в роботах [29, 30]. Контактні задачі пружних півпросторів за наявності газів і рідин в області контакту розглянуто в роботах [4, 9, 23, 24].

В даній роботі до дослідження полів напружень в околі міжфазного кругового включення, яке знаходиться в змішаних умовах контактної взаємодії із кусково-однорідним трансверсально-ізотропним простором, застосований підхід, який започаткований в роботі [12] і отримав подальший розвиток в роботах [13 – 18] для розв'язання неосесиметричних пружних і термопружних контактних задач для неоднорідних трансверсально-ізотропних просторів. Підхід базується на зведенні проблеми до систем двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) і запропонованому методі їх розв'язання.

§1. Постановка задачі і зведення її до двовимірної системи СІР.

Нехай у площині $z = 0$ з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів розташовано абсолютно жорстке включення, що займає область Ω . До включення прикладено довільне навантаження, дія якого зводиться до рівнодійної сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$, (рис. 1), і головного моменту $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$.

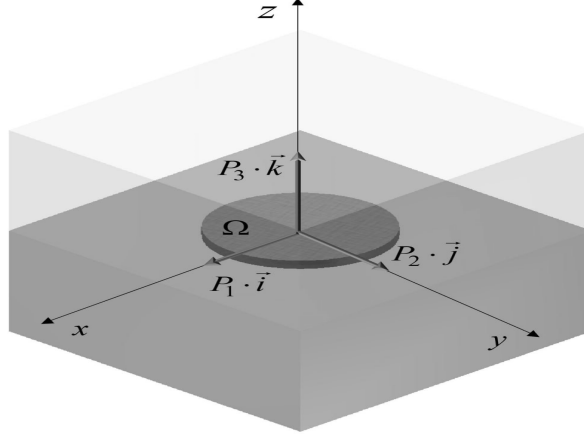


Рис. 1

Напружено-деформований стан простору описується вектором

$$\mathbf{v} = \{v_k\}_{k=1,\dots,9} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}, u, v, w\}. \quad (1.1)$$

Компоненти вектора (1.1) при $(x, y) \notin \Omega$ задовольняють узагальненому закону Гука та диференціальним рівнянням рівноваги, які подамо так

$$\mathbf{D}[z, \partial_1, \partial_2, \partial_3]\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (x, y) \notin \Omega. \quad (1.2)$$

Тут введено позначення

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{D}_0^T \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F}^T = \|-P_1, -P_2, -P_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0\|;$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{Bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{S}_1 = \begin{Bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{11} & s_{13} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{S}_2 = \begin{Bmatrix} s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{Bmatrix};$$

$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$; $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$; $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$; $s_{kj} = \theta(z)s_{kj}^+ + \theta(-z)s_{kj}^-$; s_{kj}^\pm – коефіцієнти узагальненого закону Гука відповідно для верхнього $z > 0$ і нижнього $z < 0$ півпросторів; $\mathbf{O}_{3 \times 3}$ – нульова матриця розмірності 3×3 .

Розташування граней включення після деформації описують функції

$$\zeta_6^\pm = \zeta_6^0 + \mathcal{G}_0^\pm(x, y); \quad \zeta_k^\pm = \zeta_k^0, \quad k = 4, 5, \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$\zeta_4^0 = \delta_1 - \phi_z y; \quad \zeta_5^0 = \delta_2 - \phi_z x; \quad \zeta_6^0 = \delta_3 + \phi_x y + \phi_y x, \quad (1.3)$$

$\mathcal{G}_0^\pm(x, y)$ – задають форму включення відповідно при $z = \pm 0$; δ_k , $k = 1, 2, 3$; ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z – поступальні переміщення включення та кути повороту включення навколо відповідних осей.

Для подання граничних умов на включенні, введемо позначення

$$\xi_k^\pm(x, y) = w_k(x, y, \pm 0); \quad \mathbf{w} = \{w_k(x, y, z)\}_{k=\overline{1,6}} = \{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w\}.$$

Верхня грань включення зчеплена з півпростором $z > 0$. При цьому заданими вважаються переміщення $\xi_6^+(x, y) = \zeta_6^0 + \mathcal{G}_0^+(x, y)$, $\xi_5^+(x, y) = \zeta_5^0$, $\xi_4^+(x, y) = \zeta_4^0$, невідомими – напруження $\xi_k^+(x, y)$, $k=1, 2, 3$, $(x, y) \in \Omega$. Нижня грань включення знаходиться в умовах гладкого контакту з півпростором $z < 0$. В цьому випадку дотичні напруження дорівнюють нулю $\xi_2^-(x, y) = \xi_3^-(x, y) = 0$, а нормальні переміщення $\xi_6^-(x, y) = \zeta_6^0 + \mathcal{G}_0^-(x, y)$ вважаються заданими. Невідомими є нормальні напруження $\xi_1^-(x, y)$ і дотичні переміщення $\xi_4^-(x, y)$, $\xi_5^-(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$. Поза включенням вважаються виконаними умови ідеального контакту: $\xi_k^-(x, y) = \xi_k^+(x, y)$, $(x, y) \notin \Omega$, $k = \overline{1; 6}$.

Стрибки і суми $\bar{\chi}^\pm$ компонент вектора \mathbf{w} в площині $z = 0$ позначимо так:

$$\bar{\chi}^\pm = \{\chi_k^\pm(x, y)\}_{k=\overline{1,6}}; \quad \chi_k^\pm(x, y) = \langle w_k(x, y) \rangle^\pm = \xi_k^+(x, y) \pm \xi_k^-(x, y), \quad k = \overline{1, 6},$$

тоді умови ідеального контакту різних трансверсально-ізотропних півпросторів поза областю Ω запишемо у вигляді

$$\chi_k^-(x, y) = 0, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (x, y) \notin \Omega, \quad (1.4)$$

а стрибки та суми нормальних переміщень подамо так:

$$\chi_6^\pm(x_1, x_2) = \mathcal{G}^\pm(x_1, x_2) + (1 \pm 1)\zeta_6^0; \quad \mathcal{G}^\pm = \mathcal{G}_0^\pm(x, y) \pm \mathcal{G}_0^-, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1.5)$$

Параметри переміщення включення в середовищі: δ_k , $k=1, 2, 3$, ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z , визначимо із шести рівнянь рівноваги:

$$\iint_{\Omega} \chi_k^-(x, y) dx dy = P_{4-k}, \quad k=1, 2, 3; \quad (1.6)$$

$$\iint_{\Omega} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \chi_k^-(x, y) dx dy = \begin{pmatrix} M_2 \\ M_1 \end{pmatrix}; \quad \iint_{\Omega} (x\chi_2^-(x, y) - y\chi_3^-(x, y)) dx dy = M_3. \quad (1.7)$$

Відносно невідомих функцій $\{\eta_k(x, y)\}_{k=\overline{1,5}} = \{\chi_1^-, \xi_2^+, \xi_3^+, \xi_4^-, \xi_5^-\}$, із врахуванням умов (1.4) і формул (1.5), за допомогою останніх п'яти співвідношень (25) [12], в роботі [13] отримано систему п'яти двовимірних СІР. Ввівши невідомі вектор-функції $\chi^- = \{\eta_k(x, y)\}_{k=1,2,3}$, $\chi^* = \{\eta_k(x, y)\}_{k=4,5}$, подамо вказану систему у матричному вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left(\frac{q_{23}}{r_0^3} \chi^* + \mathbf{H}(x-t, y-\tau) \chi^- + \mathbf{H}_*(x-t, y-\tau) \chi^* \right) dt d\tau + (q_{22}^+ - 1) \chi^- = \mathbf{F}_1; \\ \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{M}}{r_0} \chi^- - \mathbf{K}(x-t, y-\tau) \chi^- + \mathbf{K}_*(x-t, y-\tau) \chi^* \right) dt d\tau - \mathbf{M}_* \chi^* = \mathbf{F}_2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

де $r_0 = \sqrt{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}$;

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} q_{41} & 0 & 0 \\ 0 & q_{32} & 0 \\ 0 & 0 & q_{32} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_* = \begin{pmatrix} (1+q_{33}^+) & 0 \\ 0 & (1+q_{33}^+) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H}_* = \begin{pmatrix} q_{23}^-\partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} & -q_{23}^-\partial_1^2 \frac{1}{r_0} \\ -q_{23}^-\partial_2^2 \frac{1}{r_0} & q_{23}^-\partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & q_{42} \frac{y-\tau}{r_0^2} & q_{42} \frac{x-t}{r_0^2} \\ -q_{31} \frac{y-\tau}{r_0^2} & -q_{32}^-\partial_1 \frac{x-t}{r_0} & q_{32}^-\partial_1 \frac{y-\tau}{r_0} \\ -q_{31} \frac{x-t}{r_0^2} & q_{32}^-\partial_2 \frac{x-t}{r_0} & -q_{32}^-\partial_2 \frac{y-\tau}{r_0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}_* = \begin{pmatrix} q_{23}^-\partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} & -q_{23}^-\partial_1^2 \frac{1}{r_0} \\ -q_{23}^-\partial_2^2 \frac{1}{r_0} & q_{23}^-\partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} \\ -q_{43}^-\partial_1 \frac{1}{r_0} & -q_{43}^-\partial_2 \frac{1}{r_0} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} q_{21}^-\partial_2 \frac{1}{r_0} & -[q_{22}^-\partial_1 \frac{x-t}{r_0^2} + \tilde{q}_{11}^-\partial_2 \frac{y-\tau}{r_0^2}] & -q_{22}^-\partial_1 \frac{y-\tau}{r_0^2} \\ q_{21}^-\partial_1 \frac{1}{r_0} & q_{22}^-\partial_1 \frac{y-\tau}{r_0^2} & -[q_{22}^-\partial_2 \frac{y-\tau}{r_0^2} + \tilde{q}_{11}^-\partial_1 \frac{x-t}{r_0^2}] \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_1 = \{q_{23}^- \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \zeta_{j+3}^0 \partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} dt d\tau + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \zeta_{6-j}^0 [q_{23}^- \frac{1}{r_0^3} - q_{23}^- \partial_j^2 \frac{1}{r_0}] dt d\tau + q_{24}^- \partial_{3-j} \mathcal{G}^+\}_{j=1,2};$$

$$\mathbf{F}_2(x, y) = \{f_j^{(2)}\}_{j=1,2,3}; \quad f_j^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \zeta_{j+3}^0 [q_{33}^- \partial_{3-j} \frac{y-\tau}{r_0^2} + \tilde{q}_{22}^- \partial_j \frac{x-t}{r_0^2}] dt d\tau +$$

$$+ (1 - q_{33}^+) \zeta_{j+3}^0 - q_{33}^- \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \zeta_{6-j}^0 \partial_{3-j} \frac{y-\tau}{r_0^2} dt d\tau - q_{34}^- \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \mathcal{G}^+ \partial_1 \frac{1}{r_0} dt d\tau, \quad j=1,2;$$

$$f_3^{(2)} = (1 - q_{44}^-) \mathcal{G}^+(x, y) + 2\zeta_6^0 + q_{43}^- \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \zeta_4^0 \partial_1 \frac{1}{r_0} dt d\tau + q_{43}^- \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \zeta_5^0 \partial_2 \frac{1}{r_0} dt d\tau.$$

§2. Визначення напружень в площині з'єднання півпросторів.

Для кругового включення $\Omega = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$, форма якого є осесиметричною $\mathcal{G}_0^\pm(x, y) = \mathcal{G}_0^\pm(x^2 + y^2)$, в роботі [13] отримані аналітичні розв'язки системи (1.8) і визначена асимптотика напружень при $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow a + 0$, а також отримані вирази для напружень поза включенням. Зокрема, нормальні напруження σ_z в площині з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів, в якій міститься кругове включення при змішаних умовах взаємодії з півпросторами, в циліндричній системі координат (ρ, φ, z) при $\rho > a$ можна записати, як

$$\sigma_z|_{z=0} = \frac{2q_{14}}{\pi} \int_0^a \frac{m_{20}(t) - 2\rho \operatorname{Re}(e^{i\varphi} \eta_{21}(t))}{(\rho^2 - t^2)^{3/2}} dt + v_1^*(\rho, \varphi), \quad \rho > a. \quad (2.1)$$

Тут введені позначення

$$\eta_{20}(t) = \mu_{22} \omega_{2,3}^-(\rho); \quad \mu_{22} = -\frac{P_3 q_{31}}{4\pi a \alpha_0 q_{32} m_{10}} + 0,5 h m_* s_{22}; \quad s_{22} = 2(q_{24} \beta_{21}^{(2)} - q_{44} \beta_{23}^{(2)});$$

$$m_{10} = q_{21}q_{43} - q_{23}q_{41}; \quad m_* = 1 - m_{10}^{-1}; \quad \eta_{31}(\rho) = \tilde{\mu}_{31}\tilde{\omega}_{1,2}^+(\rho) + \rho\tilde{\mu}_{32}\tilde{\omega}_{1,2}^-(\rho);$$

$$\eta_{21}(t) = \tilde{\mu}_{21}\omega_{2,3}^+(\rho) + \rho\tilde{\mu}_{22}\omega_{2,3}^-(\rho); \quad \tilde{\mu}_{21} = 0,5\beta_{22}^{(2)} \left(n_1 \frac{\bar{M}_{21}}{4a^2} + n_2 \frac{\bar{P}_{12}}{4\kappa_1 a} - n_3 \frac{\bar{P}_{12}}{4\tilde{\kappa}_1 a} \right);$$

$$\omega_j(\rho) = \left(\frac{a+\rho}{a-\rho} \right)^{\gamma_j}, \quad j=2,3; \quad \tilde{\omega}_j(\rho) = \left(\frac{a+\rho}{a-\rho} \right)^{\tilde{\gamma}_j}, \quad j=1,2; \quad \gamma_j = (-1)^{j+1}\alpha_0; \quad \tilde{\gamma}_j = (-1)^{j+1}\tilde{\alpha}_0;$$

$$v_1^*(\rho, \varphi) = \frac{8q_{12}}{\rho^3} \int_0^a \frac{\operatorname{Re}(e^{i\varphi}(\eta_{21}(t) + \eta_{31}(t)))t^2}{(\rho^2 - t^2)^{1/2}} dt + q_{14} \frac{2ha^3}{\pi} \frac{K(a/\rho)}{\rho^2(\rho^2 - a^2)};$$

$$\tilde{\mu}_{31} = \tilde{n}_1 \frac{\bar{M}_{21}}{4a^2} + \tilde{n}_2 \frac{\bar{P}_{12}}{4\kappa_1 a} - \tilde{n}_3 \frac{\bar{P}_{12}}{4\tilde{\kappa}_1 a}; \quad \bar{P}_{12} = P_1 - iP_2; \quad \bar{M}_{21} = M_2 - iM_1;$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} - \text{повний еліптичний інтеграл другого роду.}$$

Коефіцієнти у формулі (2.1) виражаються через пружні сталі півпросторів і наведені в роботі [13].

Отримані точні розв'язки дозволяють визначити розподіл напружень в площині з'єднання різних трансверсально-ізотропних просторів в околі кругових в плані, симетричних включень при змішаних умовах контакту і довільних навантаженнях. Для некругових або не симетричних включень, тобто якщо форма граней яких не задовольняє умові $g_0^\pm(x, y) = g_0^\pm(x^2 + y^2)$, пропонується наступний чисельно-аналітичний метод. Якщо контур, який обмежує область Ω , є гладким, то характер поведінки розв'язків на краю включення буде визначатись типом контактної взаємодії включення із середовищем, отже, якщо скористатись результатами роботи [13], при $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow a$ для розв'язків системи двовимірних СІР (1.8) можна записати наступні асимптотичні подання

$$\eta_1(x, y) \approx \sum_{j=1}^3 f_{1j}(x, y) g_{j1}^-(x, y); \quad \eta_k(x, y) \approx \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^2 f_{kjp}(x, y) g_{jp}^-(x, y), \quad k=2,3; \quad (2.2)$$

$$\eta_k(x, y) \approx \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^2 f_{kjp}(x, y) g_{jp}^+(x, y), \quad k=4,5. \quad (2.3)$$

Вагові функції:

$$g_{1j}^\pm(x, y) = (a^2 - x^2 - y^2)^{\pm 0,5 - \alpha_j^*}; \quad g_{2j}^\pm(x, y) = (a^2 - x^2 - y^2)^{\pm 0,5};$$

$$g_{3j}^\pm(x, y) = (a^2 - x^2 - y^2)^{\pm 0,5 + \alpha_j^*}; \quad \alpha_1^* = \alpha_0, \quad \alpha_2^* = \tilde{\alpha}_0$$

повністю визначають асимптотику поведінки розв'язків на краю включення, а подання (2.2) і (2.3) містять всі асимптотичні доданки. Стрибки нормального напруження $\eta_1(x, y)$ при $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow a$ мають степеневі особливості із показниками $-0,5 \pm \alpha_0$ і $-0,5$, дотичні напруження на верхній грані мають степеневі особливості із показниками $-0,5 \pm \alpha_0$, $-0,5 \pm \tilde{\alpha}_0$ і $-0,5$. Дотичні переміщення на нижній грані мають нулі степеневого порядку із показниками $0,5 \pm \alpha_0$, $0,5 \pm \tilde{\alpha}_0$ і $0,5$. Пружні сталі α_0 , $\tilde{\alpha}_0$ виражаються [13] через комбінації коефіцієнтів узагальненого закону Гука верхнього і нижнього півпросторів і задовольняють умовам

$$0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}; \quad 0 < \tilde{\alpha}_0 < \frac{1}{2}.$$

У випадку однорідного простору $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = 0,25$, а показники особливостей в формулах (2.2) і показники нулів в формулах (2.3) будуть дорівнювати 0,75; 0,5; 0,25.

Оскільки всі особливості і нулі розв'язків містяться у вагових функціях $g_{jp}^{\pm}(x, y)$, то можна вважати функції $f_{1j}(x, y)$, $f_{kjp}(x, y)$ диференційованими до будь-якого порядку. Це дає підставу записати ці функції у вигляді поліномів по степенях x і y , а розв'язки двовимірної системи СІР (1.5) записати у наступному вигляді:

$$\eta_1(x, y) = \sum_{j=1}^3 g_{j1}^-(x, y) G_{1j1}^{(n,m)}(x, y); \quad \eta_k(x, y) = \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^2 g_{jp}^-(x, y) G_{kjp}^{(n,m)}(x, y), \quad k = 2, 3; \quad (2.4)$$

$$\eta_k(x, y) = \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^2 g_{jp}^+(x, y) G_{kjp}^{(n,m)}(x, y), \quad k = 4, 5; \quad (2.5)$$

$$G_{kjp}^{(n,m)}(x, y) = \sum_{i=0}^{l-1} \psi_{i,k}^{(j,p)} \gamma_i(x, y);$$

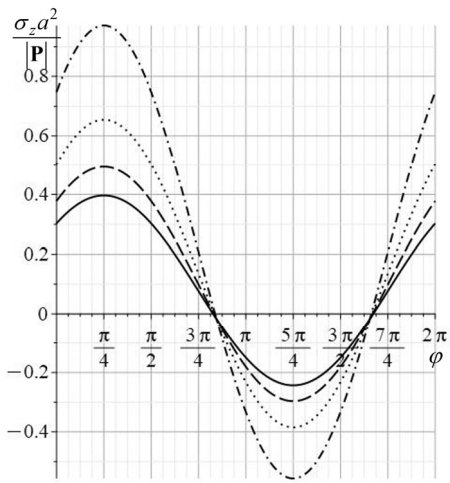
$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = x, \dots, \gamma_{n+1} = y, \dots, \gamma_{l-1}(x, y) = x^m y^n; \quad l = (m+1)(n+1).$$

Аналогічно до підходу роботи [28], невідомі сталі $\psi_{i,k}^{(j,p)}$ визначимо методом колокації. Степені n і m залежать від заданої точності. Зокрема, при $n = 10$ і $m = 10$ досягається точність розв'язку 10^{-5} та спостерігається практично повне співпадіння (до шостого знаку) результатів із точними розв'язками, отриманими за формулою (2.1).

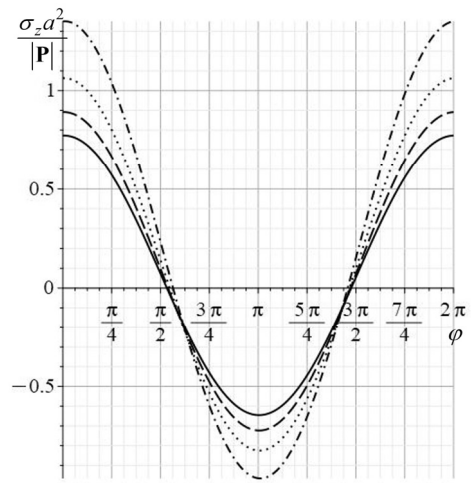
§3. Аналіз результатів числових досліджень.

Визначимо розподіл нормальних напружень в околі включення при різних значеннях компонент рівнодійної сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ і головного моменту $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Для зручності перейдемо до безрозмірних вектора сили $\mathbf{P}^* = \mathbf{P} \cdot |\mathbf{P}|^{-1} = (P_1^*, P_2^*, P_3^*)$ і головного моменту $\mathbf{M}^* = \mathbf{M} \cdot (a|\mathbf{P}|)^{-1} = (M_1^*, M_2^*, M_3^*)$. На рис. 2 – 5 наведені залежності відносного нормального напруження $\sigma_z a^2 / |\mathbf{P}|$ в площині з'єднання півпросторів поза включенням при деяких значеннях компонент векторів \mathbf{P}^* і \mathbf{M}^* на концентричних колах, які охоплюють монетоподібне включення товщиною $h = 0,1a$ і мають радіуси: $\rho = 1,04a$ – штрихпунктирна лінія; $\rho = 1,06a$ – точкова лінія; $\rho = 1,06a$ – пунктирна лінія; $\rho = 1,1a$ – суцільна лінія. Розглянуто комбінації наступних матеріалів [1]: магній – матеріал **m1**; берилій – матеріал **m2**; цинк – матеріал **m3**; кадмій сульфід – матеріал **m4**.

На рис. 2, а, б наведено розподіл відносного нормального напруження $\sigma_z a^2 / |\mathbf{P}|$ відповідно для комбінації матеріалів **m1-m3** і **m2-m4** при $\mathbf{P}^* = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $\mathbf{M}^* = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. На рис. 3, а, б наведено розподіл $\sigma_z a^2 / |\mathbf{P}|$ відповідно для комбінації матеріалів **m1-m3** і **m2-m4** при $\mathbf{P}^* = (1/2\sqrt{3}, 1/2, \sqrt{2/3})$, $\mathbf{M}^* = (1/2\sqrt{3}, 1/2, \sqrt{2/3})$. На рис. 4, а, б наведено розподіл $\sigma_z a / |\mathbf{P}|$ відповідно для комбінації матеріалів **m1-m3** і **m2-m4** при $\mathbf{P}^* = (1/2, 1/2\sqrt{3}, \sqrt{2/3})$, $\mathbf{M}^* = (1/2, 1/2\sqrt{3}, \sqrt{2/3})$. На рис. 5, а, б наведено розподіл $\sigma_z a^2 / |\mathbf{P}|$ відповідно для комбінації матеріалів **m1-m3** і **m2-m4** при $\mathbf{P}^* = (\sqrt{2/3}, 1/2, 1/2\sqrt{3})$, $\mathbf{M}^* = (\sqrt{2/3}, 1/2, 1/2\sqrt{3})$.

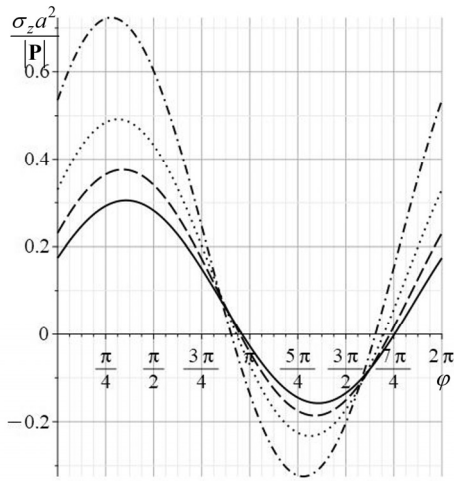


a

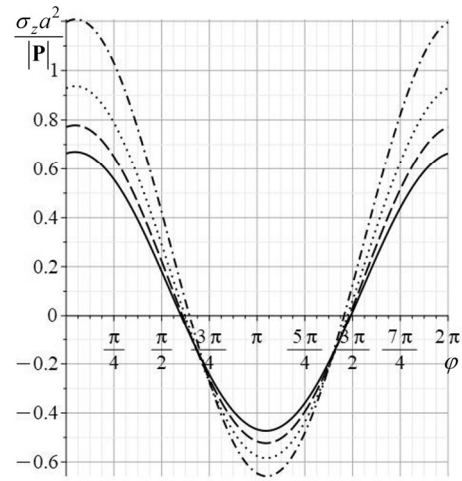


б

Рис. 2

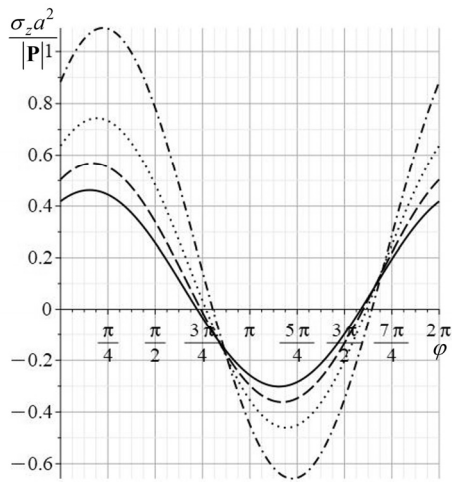


a

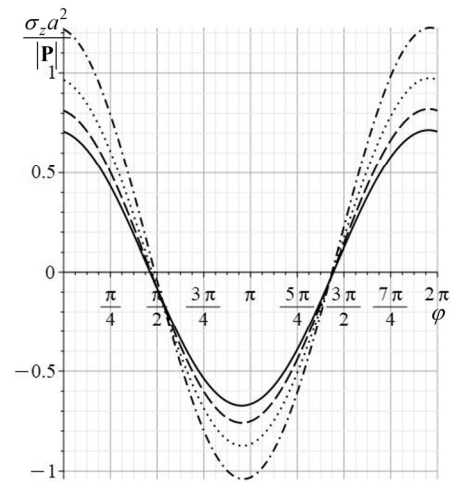


б

Рис. 3



a



б

Рис. 4

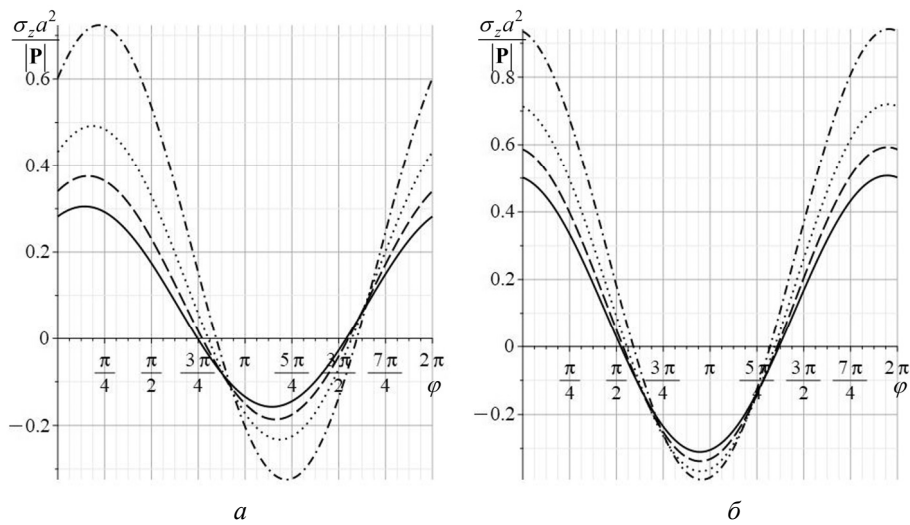


Рис. 5

На рис. 6, *a*, *б* відповідно для комбінації матеріалів *m1-m3* і *m2-m4* при $\mathbf{P}^* = (1/2\sqrt{3}, 1/2, \sqrt{2/3})$, $\mathbf{M}^* = (1/2\sqrt{3}, 1/2, \sqrt{2/3})$ наведено розподіл відносного нормального напруження $\sigma_z a^2 / |\mathbf{P}|$ при різних значення товщини монетоподібного включення, а саме, штрихпунктирна лінія відповідає товщині $h = 0$; точкова лінія – товщині $h = 0,1a$; пунктирна лінія – товщині $h = 0,15a$; суцільна лінія – товщині $h = 0,2a$.

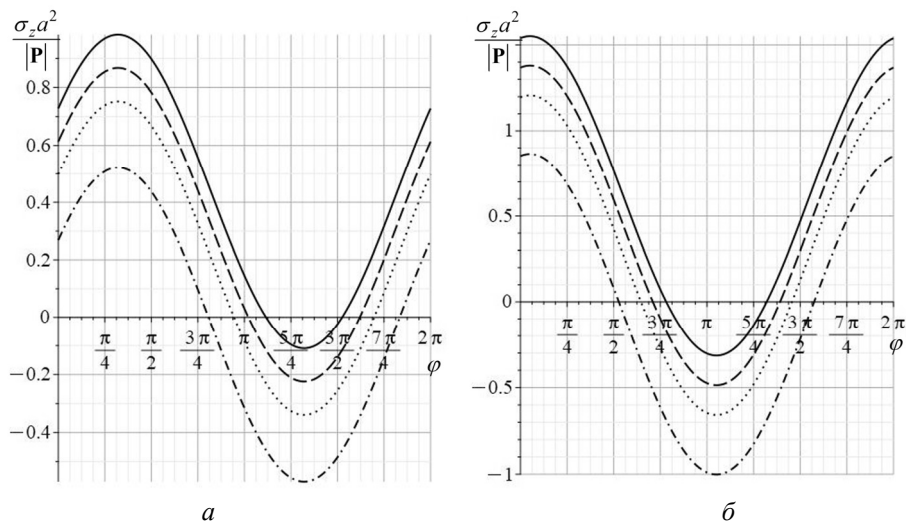


Рис. 6

В табл. 1 наведенні значення відношень $\zeta_{ij} = c_{ij}^+ / c_{ij}^-$, де c_{ij}^\pm – коефіцієнти узагальненого закону Гука [1] для верхнього і нижнього півпросторів, відповідно.

Таблиця 1

	ζ_{11}	ζ_{12}	ζ_{13}	ζ_{33}	ζ_{44}	ζ_{66}
<i>m1 – m3</i>	0,3765	0,8153	0,4515	1,001	0,4118	0,2677
<i>m2 – m4</i>	3,582	0,5394	0,2923	4,123	11,36	8,274

Оскільки для першої комбінації матеріалів $m1 - m3$ всі значення $\zeta_{ij} < 1$ (крім $\zeta_{33} \approx 1$), то матеріал нижнього півпростору можна вважати більш жорстким, ніж верхнього. Для другої комбінації $m2 - m4$ навпаки, всі $\zeta_{ij} > 1$, отже матеріал верхнього півпростору є більш жорстким, ніж нижній. Порівнюючи рисунки a і b на всіх рис. 2 – 6 можна зробити висновок, що відносні нормальні напруження $\sigma_z a^2 / |\mathbf{P}|$ при однакових навантаженнях більші, якщо матеріал верхнього півпростору є більш жорстким. На величину $\sigma_z a^2 / |\mathbf{P}|$ також впливають значення компонент векторів \mathbf{P}^* і \mathbf{M}^* . Зокрема, більшим значенням P_3^* для обох комбінацій матеріалів відповідають більші значення нормальних напружень. На рис. 6, a , b показано, як із зміною товщини монетоподібного включення змінюється значення відносних нормальних напружень, зокрема, із збільшенням товщини включення збільшуються значення $\sigma_z a^2 / |\mathbf{P}|$ для обох комбінацій матеріалів.

Висновок.

Запропоновано і проведено апробацію ефективного чисельно-аналітичного методу розв'язання двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь, що дозволило дослідити розподіл нормальних напружень в околі міжфазного кругового монетоподібного включення, яке знаходиться в змішаних умовах контактної взаємодії із кусково-однорідним трансверсально-ізотропним простором. Результати обчислень показують, що відносні нормальні напруження є не осесиметричними, суттєво залежать від полярного кута φ і можуть змінювати свій знак. Лінії зміни знаку залежать від комбінацій матеріалів і від напрямку векторів \mathbf{P}^* і \mathbf{M}^* .

Запропонований підхід може бути застосований для будь-яких міжфазних включень при різних типах контактної взаємодії із неоднорідним трансверсально-ізотропним простором.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто неосесиметричну контакту задачу про кругове міжфазне включення довільної форми при змішаних граничних умовах із кусково-однорідним трансверсально-ізотропним простором. Одна грань включення перебуває в умовах гладкого контакту (дотичні напруження дорівнюють нулеві), інша – у повному контакті із середовищем. Задачу зведено до системи п'яти двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Для включення, яке має осесиметричну форму при довільних навантаженнях, отриманий точний розв'язок системи і визначені його асимптотичні властивості. На основі останніх запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод розв'язання системи двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Отримано розподіл напружень в околі монетоподібного включення та виявлені його особливості.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: трансверсально-ізотропний кусково-однорідний простір, міжфазне включення, змішані умови, розподіл напружень, сингулярні інтегральні рівняння.

1. Александров К.С., Рыжова Т.В. Упругие свойства кристаллов. Обзор // Кристаллография. – 1961. – 6, № 2. – С. 289 – 314.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
3. Сілованюк В.П. Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2000. – 298 с.
4. Слободян Б.С., Мартиняк Р.М. Просторова контактна задача для пружних півпросторів, зазор між якими заповнений газом // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – 6. – С. 183 – 186.
5. Boiko D.S., Tokovyy Y.V. Determination of three-dimensional stresses in a semi-infinite elastic transversely isotropic composite // Mech. Compos. Mater. – 2021. – 57, N 4. – P. 481 – 492.
6. Hou P.-F., Leung A.Y. T., He Y.-J. Three-dimensional Green's functions for transversely isotropic thermoelastic bimaterials // Int. J. Solids Struct. – 2008. – 45, N 24. – P. 6100 – 6113.
7. Kirilyuk V.S. Stress State of an Elastic Orthotropic Medium with an Elliptic Crack Under Tension and Shear // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N4. – P. 358 – 366.

8. Kirilyuk V.S., Levchuk O.I. Stress State of an Orthotropic Electroelastic Medium with an Arbitrarily Oriented Elliptic Crack Under Uniaxial Tension // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 1. – P. 53 – 62.
9. Kit G.S., Martynyak R.M., Machishin I.M. The Effect of a Fluid in the Contact Gap on the Stress State of Conjugate Bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N3 – P. 292 – 299.
10. Kit H.S., Sushko O.P. Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with a heat permeable disk-shaped inclusion (crack) // *J. Math. Sci.* – 2011. – **174**, N 3. – P. 309 – 321.
11. Kit H.S., Sushko O.P. Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // *J. Math. Sci.* – 2011. – **176**, N 4. – P. 561 – 577.
12. Kryvyi O. The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium. In: *Modern Analysis and Applications. Ser. Operator Theory: Advances and Applications.* – **191**. – Basel: Birkhäuser, 2009. – P. 395 – 406.
13. Kryvyi O. F. Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects // *J. Math. Sci.* – 2011. – **176**, N 4. – P. 515 – 531.
14. Kryvyi O.F. Interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space // *Mater. Sci.* – 2012. – **47**, N 6. – P. 726 – 736.
15. Kryvyi O.F. Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space // *J. Math. Sci.* – 2012. – **184**, N 1. – P. 101 – 119.
16. Kryvyi O.F. Mutual influence of an interface tunnel crack and an interface tunnel inclusion in a piecewise homogeneous anisotropic space // *J. Math. Sci.* – 2015. – **208**, N 4. – P. 409 – 416.
17. Krivoi A.F., Popov G.Ya. Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 6. – P. 626 – 634.
18. Kryvyi O., Morozov Yu. Thermally active interphase inclusion in a smooth contact condition with transversely isotropic half-spaces // *Frattura ed Integrità Strutturale.* – 2020. – **14**, N 52. – P. 33 – 50.
19. Kushnir R. Book review: Hetnarski R.B., Eslami M.R. Thermal stresses – advanced theory and applications // *J. Therm. Stresses.* – 2010. – **33**, N 1. – P. 76 – 78.
20. Kushnir R.M., Protsyuk Yu.B. Thermoelastic state of layered thermosensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // *Mater. Sci.* – 2011. – **46**, N 1. – P. 1 – 15.
21. Kushnir R., Protsiuk B. A method of the Green's functions for quasistatic thermoelasticity problems in layered thermosensitive bodies under complex heat exchange. In: *Modern Analysis and Applications. Vol. 2. Differential Operators and Mechanics. Ser. Operator Theory: Advances and Applications.* – **191**. – Basel: Birkhäuser, 2009. – P. 143 – 154.
22. Li X.-F., Fan T.-Y. The asymptotic stress field for a rigid circular inclusion at the interface of two bonded dissimilar elastic half-space materials // *Int. J. Solids Struct.* – 2001. – **38**, N 44 – 45. – P. 8019 – 8035.
23. Martynyak R.M. Mechanothermodiffusion interaction of bodies with regard for the filler of intercontact gaps // *Mater. Sci.* – 2000. – **36**. – P. 300 – 304.
24. Martynyak R.M., Slobodyan B.S. Contact of elastic half spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid // *Mater. Sci.* – 2009, **45**. – P. 66 – 71.
25. Nazarov S.A. A crack at the interface of anisotropic bodies. Singularities of the elastic fields and a criterion for fracture when the crack surfaces are in contact // *J. Appl. Math. Mech.* – 2005. – **69**, N 3. – P. 473 – 483.
26. Tokovyy Yu. Direct integration of three-dimensional thermoelasticity equations for a transversely isotropic layer // *J. Therm. Stresses.* – 2019. – **42**, N 1. – P. 49 – 64.
27. Tokovyy Yu.V., Ma C.C. Three-dimensional elastic analysis of transversely-isotropic composites // *J. Mech.* – 2017. – **33**, N 6. – P. 821 – 830.
28. Wang Q., Noda N.A., Honda M.A. et al. Variation of stress intensity factor along the front of a 3D rectangular crack by using a singular integral equation method // *Int. J. of Fracture* – 2001. – **108**, N 2. – P. 19 – 131.
29. Willis J.R. The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium // *Int. J. Engng. Sci.* – 1968. – **6**, N 5. – P. 253 – 263.
30. Willis J.R. The penny-shaped crack on an interface // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* – 1972. – **25**. – P. 368 – 385.

Надійшла 19.08.2023

Затверджена до друку 16.04.2024