

В.І.Кузьменко, С.О.Плашенко

**ЗВ'ЯЗАНА ЗАДАЧА ПРО ТИСК ШТАМПА ПІД ДІЄЮ
СЛІДКУЮЧОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*Дніпровський національний університет ім. Олесь Гончара,
пр. Гагаріна 72, Дніпро, Україна; e-mail: sergey.plashenko@gmail.com*

Abstract. A coupled contact problem on interaction of a stamp with a half-space under the action of a follower load is considered. The stamp is pressed to the elastic half-space surface by a force acting parallel to the axis of the stamp and shifting from the foundation center. A direction of the force remains unchanged relative to the stamp in the process of the force increasing. Thus, the force is a follower one. A mathematical model is formulated and an analytical solution is obtained. A specificity of the stamp movement with increasing force is analyzed. A maximum angle of stamp rotation is found. The change in the stamp horizontal motion depending on the force is studied. Some modification of the problem when the direction of the force is opposite is considered, and the significant differences in the stamp motion are found.

Key words: coupled problem, contact problem, circular stamp, elastic half-space, follower force, stamp rotation.

Вступ.

У роботі розглядається задача про взаємодію штампа з пружним півпростором під дією слідкуючого навантаження: напрямок дії сили залежить від повороту штампа. З іншого боку, процес зміни положення штампа визначається процесом деформування півпростору. Це означає, що процес деформування чинить зворотній вплив на зовнішнє навантаження, тобто процеси навантаження і деформування є взаємно зв'язаними.

Слідкуючі сили виникають у разі шарнірної передачі зусилля на торець штампа, коли сила спрямована уздовж нормалі до поверхні штампа. Джерелом слідкуючого навантаження може бути реактивна дія струменя рідини, що під великим тиском витікає із резервуарів, розташованих на деформівних поверхнях.

Дослідження з проблематики деформування твердих тіл під дією слідкуючого навантаження пов'язані головним чином із дослідженням стійкості [1, 3, 5 – 11].

Метою роботи є постановка нової зв'язаної задачі про взаємодію кругового штампа з пружним півпростором під дією слідкуючої сили, отримання аналітичного розв'язку задачі та дослідження поведінки системи у процесі зростання величини сили.

§1. Постановка задачі.

Круговий штамп з плоскою основою радіуса a та висотою h зчеплений з поверхнею пружного півпростору (рис. 1, *а*). На штамп діє сила $\bar{P}$, паралельна осі штампа. Лінія дії сили $\bar{P}$ проходить на відстані x_0 від осі штампа і залишається незмінною відносно штампа. Унаслідок деформації півпростору вісь штампа отримує поворот на кут γ (рис. 1, *б*). Лінія дії сили $\bar{P}$ у процесі повороту штампа залишається незмінною у системі відліку пов'язаній зі штампом, тобто сила $\bar{P}$ «відстежує» рух штампа.

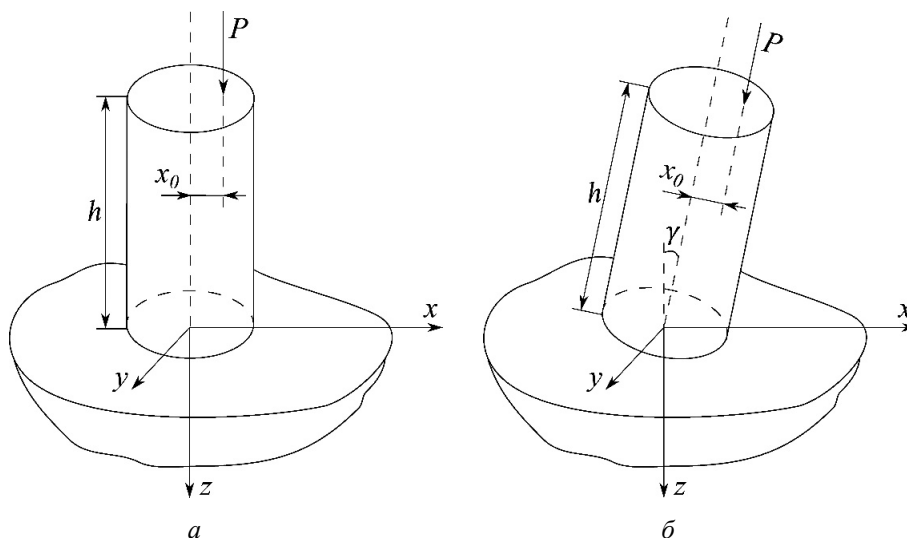


Рис. 1

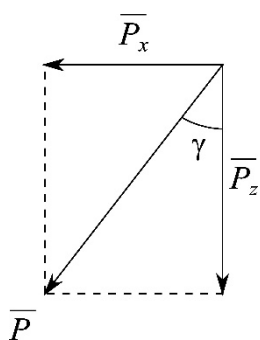


Рис. 2

Розглянемо $\bar{P}$ як суму сил $\bar{P}_x$ та $\bar{P}_z$, паралельних до осей Ox та Oz (рис. 2)

$$\bar{P} = \bar{P}_x + \bar{P}_z,$$

де $P_x = P \sin \gamma$; $P_z = P \cos \gamma$.

Вважаючи, що кут γ малий, маємо:

$$P_x = P\gamma; \quad P_z = P.$$

Силу $\bar{P}_x$ перенесемо у площину основи штампа і позначимо через $\bar{T}$ (рис. 3). Зауважимо, що оскільки сила $\bar{T}$ має протилежний напрямок від $\bar{P}_x$, то

$$T = -P\gamma.$$

До штампа прикладений момент:

$$M = -P_x h + P_z x_0 = P(x_0 - \gamma h).$$

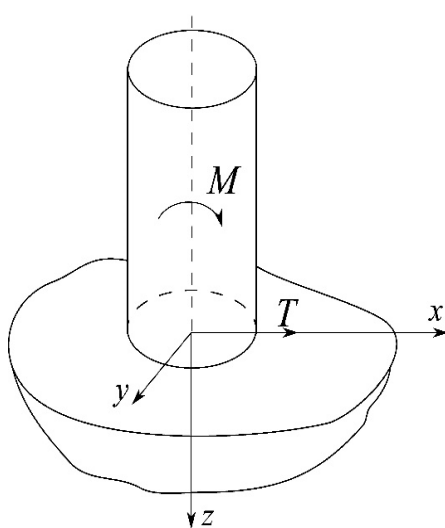


Рис. 3

Застосуємо принцип суперпозиції і розглянемо розв'язок як суму двох розв'язків: від дії сили T і моменту M та від дії вертикальної сили P_z . Оскільки дія вертикальної сили не викликає повороту та горизонтального переміщення штампа, то надалі розглядаємо лише дію сили T і моменту M .

Відповідна система сил показана на рис. 3.

Отримуємо мішану крайову задачу для пружного півпростору з круговою лінією поділу крайових умов. Така задача вивчалась у роботах Моссаковського [2] та Уфлянда [4] для заданих значень сили та моменту. В даній роботі сила $\bar{T}$ та момент $\bar{M}$ заздалегідь невідомі, оскільки залежать від кута γ повороту штампа. У свою чергу, цей кут залежить від прикладених до штампа сили та моменту.

§2. Переміщення та поворот штамп.

Скористаємося наведеними в [4] співвідношеннями для горизонтального переміщення штамп u_0 та кута повороту γ :

$$Gau_0 = \left(\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta} + C\theta \right) T + C \frac{M}{a}; \quad (2.1)$$

$$Ga^2\gamma = CT + \frac{C}{\theta} \frac{M}{a}, \quad (2.2)$$

де $C = \frac{3(1-2\nu)}{16\pi(1+\theta^2)}$; $\theta = \frac{1}{2\pi} \ln(3-4\nu)$; G , ν – модуль пружності на зсув та коефіцієнт

Пуассона матеріалу півпростору.

Підставимо вирази для T і M у формулу (2.2) та розглянемо отриману рівність як рівняння відносно кута γ повороту штамп

$$Ga^2\gamma = C(-P\gamma) + \frac{C}{\theta} \frac{Px_0 - P\gamma h}{a}; \quad \gamma = \frac{C}{\theta} \frac{\frac{x_0}{a}}{\frac{Ga^2}{P} + C + \frac{C}{\theta} \frac{h}{a}}. \quad (2.3)$$

Вираз для горизонтального переміщення штамп дає формула (2.1) після підстановки γ згідно із співвідношенням (2.3):

$$\begin{aligned} Gau_0 &= \left[C \frac{x_0}{a} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta} + C\theta + C \frac{h}{a} \right) \frac{C}{\theta} \frac{\frac{x_0}{a}}{\frac{Ga^2}{P} + C + \frac{C}{\theta} \frac{h}{a}} \right] P = \\ &= C \frac{x_0}{a} \left[1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta} + C\theta + C \frac{h}{a} \right) \frac{1}{\theta \left(\frac{Ga^2}{P} + C + \frac{C}{\theta} \frac{h}{a} \right)} \right] P. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Після обчислення кута γ за формулою (2.3) може бути отримано конкретні значення T і M . Далі контактні напруження подаються у квадратурах за формулами, наведеними у [4].

§3. Аналіз особливостей руху штамп.

Передусім зауважимо, що як кут повороту γ , так і горизонтальне переміщення u_0 штамп не пропорційні силі P , що свідчить про нелінійний характер задачі у разі дії слідкуючого навантаження.

Як і слід було чекати, зі зростанням сили P зростає кут повороту γ , однак при цьому

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \gamma = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{C}{\theta} \frac{\frac{x_0}{a}}{\frac{Ga^2}{P} + C + \frac{C}{\theta} \frac{h}{a}} = \frac{C}{\theta} \frac{\frac{x_0}{a}}{C + \frac{C}{\theta} \frac{h}{a}} = \frac{\frac{x_0}{a}}{\theta + \frac{h}{a}}.$$

Отже, величина повороту штамп обмежена значенням

$$\gamma_{\max} = \frac{\frac{x_0}{a}}{\theta + \frac{h}{a}}.$$

Кут повороту штампа буде найбільшим при $h \rightarrow 0$, тобто коли з підпростором зчеплена тонка кругова шайба.

З іншого боку, маємо

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma = 0,$$

тобто у разі дії високих штампів їх поворот практично відсутній.

На початковому етапі навантаження за відносно малих значень P штамп повертається вправо за рахунок ексцентриситету прикладання сили $\bar{P}$. Зі зростанням кута γ зростають сила T та момент M , які спричиняють поворот штампа у протилежному напрямку. За великих значень P ці дві тенденції «урівноважуються», тому існує граничне значення кута повороту штампа.

Дослідимо характер зміни горизонтального переміщення штампа у процесі зростання сили P . За малих значень сили P із (2.4) отримуємо асимптотичну залежність:

$$\frac{u_0}{a} \sim C \frac{x_0}{a} \frac{P}{Ga^2},$$

тобто за малих значень P штамп рухається вправо (у напрямку осі Ox).

Зауважимо, що

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{Gau_0}{P} = C \frac{x_0}{a} \left[1 - \frac{\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta} + C\theta + C\frac{h}{a}}{C\theta + C\frac{h}{a}} \right] = -C \frac{x_0}{a} \frac{\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta}}{C\theta + C\frac{h}{a}} = -\frac{x_0}{a} \frac{\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta}}{\theta + \frac{h}{a}} < 0,$$

тобто за великих значень слідкуючої сили штамп рухається вліво, а залежність горизонтального переміщення від сили P наближається до лінійної:

$$\frac{u_0}{a} \sim -\frac{x_0}{a} \frac{\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta}}{\theta + \frac{h}{a}} \frac{P}{Ga^2} = -\gamma_{\max} \left(\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta} \right) \frac{P}{Ga^2}.$$

Отже, у процесі монотонного зростання сили P рух штампа виявляється немонотонним: спочатку штамп рухається вправо, а при досягненні певного значення $P = P_*$ починається рух штампа у зворотному напрямку. Знайдемо значення P_* із умови, що при $P = P_*$ функція $u(P_*)$ досягає найбільшого значення.

Для спрощення викладок введемо позначення

$$b = \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta} + C\theta + C\frac{h}{a} \right); \quad r = C + \frac{C}{\theta} \frac{h}{a}.$$

Тоді залежність $u_0(P)$ можна подати у такому вигляді:

$$\frac{u_0}{a} = C \frac{x_0}{a} \left(1 - b \frac{1}{\frac{Pa^2}{Ga^2} + r} \right) \frac{P}{Ga^2} = C \frac{x_0}{a} \left(1 - b \frac{\frac{P}{Ga^2}}{1 + r \frac{P}{Ga^2}} \right) \frac{P}{Ga^2}.$$

Перейдемо до нової змінної $\xi = 1 + r \frac{P}{Ga^2}$:

$$\frac{u_0}{a} = C \frac{x_0}{a} \left(1 - b \frac{\xi - 1}{\xi} \right) \frac{\xi - 1}{r} = C \frac{x_0}{a} \left(1 - \frac{b}{r} + \frac{b}{r} \frac{1}{\xi} \right) \frac{\xi - 1}{r}.$$

Із необхідної умови екстремуму маємо:

$$-\frac{b}{r} \frac{1}{\xi^2} \frac{\xi - 1}{r} + \left(1 - \frac{b}{r} + \frac{b}{r} \frac{1}{\xi} \right) \frac{1}{r} = \frac{b}{r^2} \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{r} - \frac{b}{r^2} = 0.$$

Звідси $\xi_* = \sqrt{\frac{b}{b-r}}$. Тоді

$$\frac{P_*}{Ga^2} = \frac{\xi_* - 1}{r} = \frac{1}{C\theta + C \frac{h}{a}} \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta} + C\theta + C \frac{h}{a}}{\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta}}} - 1 \right) = \frac{1}{C\theta + C \frac{h}{a}} \left(\sqrt{1 + \frac{C\theta + C \frac{h}{a}}{\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta}}} - 1 \right) > 0.$$

Знайдемо значення $P_0 \neq 0$ сили P , за якого горизонтальне переміщення штамп дорівнює нулю, із рівності

$$1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta} + C\theta + C \frac{h}{a} \right) \frac{1}{\theta \left(\frac{Ga^2}{P_0} + C + \frac{C}{\theta} \frac{h}{a} \right)} = 0.$$

Отримуємо

$$\frac{P_0}{Ga^2} = \frac{\theta}{\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta}}.$$

Ґрунтуючись на результатах виконаного дослідження, побудуємо схематичний графік залежності горизонтального переміщення від величини слідкуючої сили (рис. 4).

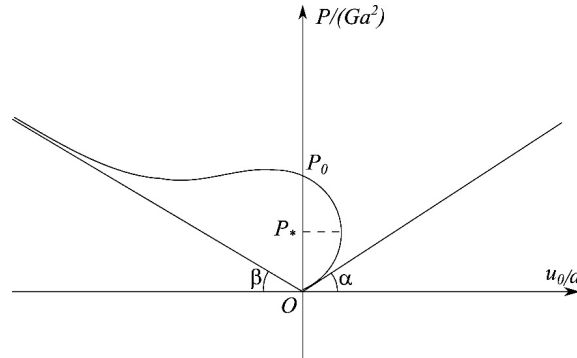


Рис. 4

При $P \rightarrow 0$ графік наближується до прямої

$$\frac{u_0}{a} = C \frac{x_0}{a} \frac{P}{Ga^2} = \frac{P}{Ga^2} \operatorname{tg} \alpha,$$

а при $P \rightarrow \infty$ – до прямої

$$\frac{u_0}{a} = \frac{\theta}{\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{16\pi\theta}} \frac{P}{Ga^2} = \frac{P}{Ga^2} \operatorname{tg} \beta.$$

§4. Тиск штампу під дією розтягувальної слідкуючої сили.

Розглянемо тепер задачу, в якій слідкуюча сила $\bar{P}$, що діє на штамп, має зворотній напрямок (рис. 5).

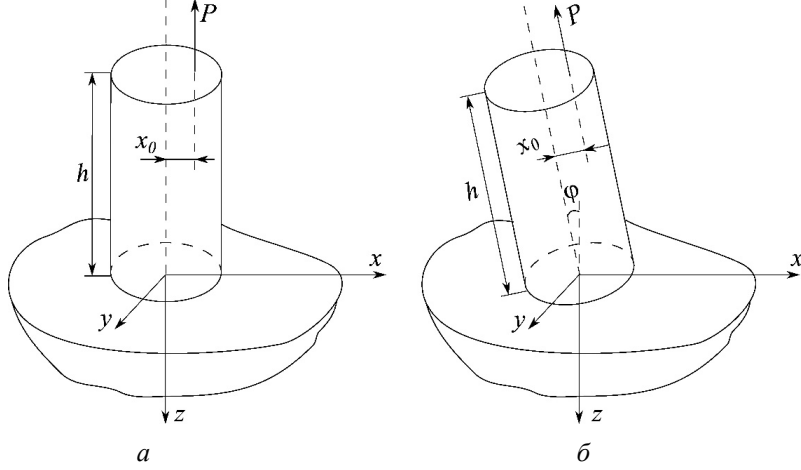


Рис. 5

Розглянемо $\bar{P}$ як суму сил $\bar{P}_x$ та $\bar{P}_z$, паралельних до осей Ox та Oz (рис. 6)

$$\bar{P} = \bar{P}_x + \bar{P}_z, \text{ де } P_x = P \sin \varphi, \quad P_z = P \cos \varphi.$$

Зауважимо, що оскільки поворот штампа відбувається в протилежному напрямку, то, використовуючи співвідношення (2.1), (2.2), покладемо $\gamma = -\varphi$.

Вважаючи, що кут γ малий, маємо:

$$P_x = P\alpha = -P\gamma; \quad P_z = P.$$

Силу $\bar{P}_x$ перенесемо у площину основи штампа і позначимо через $\bar{T}$ (рис. 3). Зауважимо, що $T = -P_x = P\gamma$.

Головний момент, прикладений до штампа, дорівнює

$$M = -P_x h - P_z x_0 = -P(x_0 - \gamma h).$$

Підставимо вирази для T і M у формулу (2.2) і розглянемо отриману рівність як рівняння відносно кута γ повороту штампа

$$Ga^2 \gamma = C(P\gamma) + \frac{C}{\theta} \frac{(-P(x_0 - \gamma h))}{a}.$$

Звідси

$$\gamma = -\frac{C}{\theta} P \frac{\frac{x_0}{a}}{Ga^2 - CP - \frac{C}{\theta} \frac{h}{a} P}. \quad (4.1)$$

Оскільки $\gamma < 0$, то формула (4.1) має сенс за умови

$$Ga^2 - CP - \frac{C}{\theta} \frac{h}{a} P > 0,$$

тобто сила P обмежена значенням

$$P_{**} = \frac{Ga^2}{C + \frac{C}{\theta} \frac{h}{a}},$$

причому

$$\lim_{P \rightarrow P_*} \gamma = -\infty.$$

Отже, штамп необмежено повертається вліво із наближенням прикладеної сили до критичного значення.

Відзначимо, що зміна напрямку сили P призводить до істотної якісної зміни характеру поворотів та переміщень штамп.

Висновок.

Запропоновано постановку класу нелінійних контактних задач про тиск кругового штамп на пружний півпростір під дією нецентральної слідкуючої сили. Отримано аналітичний розв'язок. Досліджено особливості поведінки штамп в залежності від величини прикладеної слідкуючої сили та її напрямку. Відзначено, що у разі дії слідкуючої сили навіть при фіксованій області контакту залежність між силою та параметрами руху штамп є нелінійною. Показано, що монотонному зростанню слідкуючої сили відповідає немонотонний рух штамп. Встановлено існування граничного значення кута повороту штамп.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на вивчення контактних задач зі слідкуючими силами для пружно-пластичних тіл та за умови тертя між контактними поверхнями.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто зв'язану контактну задачу про взаємодію штамп з півпростором під дією слідкуючого навантаження. Штамп притискається до поверхні пружного півпростору під дією сили, що діє паралельно до осі штамп і зміщена відносно основи. Напрямок сили залишається незмінним відносно штамп у процесі зростання сили, тобто сила є слідкуючою. Сформульовано математичну модель та отримано аналітичний розв'язок. Проаналізовано особливості руху штамп зі зростанням сили. Знайдено співвідношення, що визначає максимальний кут повороту штамп. Досліджено зміну горизонтального переміщення штамп в залежності від величини сили. Розглянуто модифікацію задачі за умови зміни напрямку сили на протилежний і відзначено істотні відмінності в переміщеннях штамп.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: зв'язана задача, контактна задача, круговий штамп, пружний півпростір, слідкуюче навантаження, поворот штамп.

1. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел – Киев: Наук. думка, 1971. – 276 с.
2. Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. – Киев.: Наук. думка, 1985. – 176 с.
3. Николаи Е.Л. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня // Изв. Ленинградского политехн. ин-та. – 1928. – **31**, № 1. – Р. 201 – 231.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
5. Barbieri E. Analytical solution of the cantilevered elastica subjected to a normal uniformly distributed follower load // Int. J. of Solids and Struct. – 2020. – **220**. – Р. 486 – 494.
6. Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stäbes // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. – 1952. – **3**. – Р. 225 – 228.
7. Kirillov O.N., Overton M.L. Finding the strongest stable massless column with a follower load and relocatable concentrated masses // The Quarterly J. of Mech. and Appl. Mathematics. – 2021. – **74**, N 2. – Р. 223 – 250.
8. Konyukhov A, Schweizerhof K, Izi R. Follower forces as an inverse contact algorithm // Proc. in Appl. Math. and Mech. – 2015. – **15**, N 1. – Р. 211 – 212.
9. Mukherjee A., Ali S.F., Arockiarajan A. Compliant structure under follower forces and any combined loading: Theoretical and experimental studies // Int. J. of Mech. Scie. – 2019. – **153**. – Р 75 – 82.
10. Sugiyama Y., Langthjem M.A., Katayama K. Columns under a Follower Force // Dynamic Stability of Columns under Nonconservative Forces. – 2019. – Р. 25 – 36.
11. Yang D.S., Wang C.M., Yau J.D. Dynamic Stability and Response of Inclined Beams Under Moving Mass and Follower Force // Int. J. of Struct. Stability and Dynamics. – 2020. – **20**, N 14. – Р. 2043004

Надійшла 08.08.2023

Затверджена до друку 16.04.2024