

М. М. Кундрат

ВІДШАРУВАННЯ ТОНКОГО ВКЛЮЧЕННЯ В ОРТОТРОПНОМУ ТІЛІ  
ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

*Національний університет водного господарства та природокористування,  
вул. Соборна 11, 33028, Рівне, Україна; e-mail: kundrat@i.ua*

**Abstract.** The delamination of a thin rigid inclusion in the orthotropic body under cyclic stresses loading at infinity is investigated. The delamination is preceded by the development of local prefracture zones (weakened contact), which may correspond to zones of damage accumulation, partial bond breakage, etc. The analytical dependences for changing the inclusion working length as a function of the loading amplitude, the number of cycles, and the parameters of the orthotropic matrix are obtained. The method is illustrated by examples.

**Key words:** inclusion, delamination, prefracture zone, working length, number of cycles.

**Вступ.**

Конструювання композитних матеріалів з високою питомою міцністю та в'язкістю руйнування досягається армуванням матриці високоміцними включеннями у вигляді волокон чи стрічок. Для теоретичного з'ясування руйнування таких композитів під статичним чи змінним навантаженням необхідний аналіз полів напружень та деформацій біля включень. Їх асимптотичні подання досліджувалися в широкому колі праць, найбільш повний огляд подано в монографії [4]. Експериментальні дані свідчать, що пластичне течіння починається біля кутів на торцях включення і поширюється уздовж поверхні поділу до його центральної частини (напр., [1, 10]). Це підтверджують оптичні [12] та мікролазерні [16] дослідження полів напружень біля армувальних елементів. Аналітичні розв'язки плоских та просторових задач для включень з зонами передруйнування, які моделюють локалізованими прошарками пластично деформованого матеріалу (поверхнями зсуву), отримано в [2, 8, 9, 14, 18, 19] та ін.

За результатами [2, 19] максимального значення дотичні напруження досягають в околах кінців включення і саме тут йому передається більша частина навантаження від матриці. За межами деякого околу біля країв дотичні напруження швидко зменшуються і в середній частині дорівнюють нулю. Прийнята схема і результати за нею узгоджуються як з експериментальними даними [1, 7], так і чисельним експериментом [4, 11] на основі методу скінченних елементів. Отримані результати описують два найбільш очікуваних механізми локального руйнування: розрив включення або його відшарування від матриці. При заданих міцнісних та пружних характеристиках композиту існує довжина включення зміни характеру руйнування  $2a = 2a_{cr}^*$ : при довжині включення меншій від  $2a_{cr}^*$  руйнування проходитиме методом його відшарування, при більшій від  $2a_{cr}^*$  – шляхом його розриву. Аналізу особливостей втомного відшарування високомодульного включення стосуються праці [13, 15, 17, 20]. Нижче з використанням енергетичного підходу [6] отримано аналітичний розв'язок задачі про відшарування жорсткого лінійного включення в ортотропній матриці за силового циклічного навантаження.

### 1. Формулювання задачі.

Розглянемо в умовах плоскої деформації композитний матеріал з ортотропною пружно-пластичною матрицею та лінійним жорстким включенням завдовжки  $2a$  ( $2a < 2a_{cr}^*$ ) вздовж осі симетрії, віднесений до системи координат  $xOy$  (рис. 1). Матеріали матриці та контактної межі матриця-включення вважаємо рівномірними. Обмеження на довжину включення виключає можливість його руйнування розривом. Композитний матеріал навантажений циклічними напруженнями  $q$  ( $0 \leq q_{\min} \leq q \leq q_{\max}$ ) паралельно лінії включення. Вважатимемо, що частота зміни навантаження невелика й інерційні та теплотвірні ефекти неістотні.

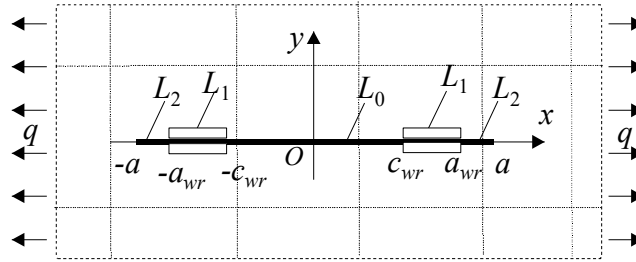


Рис. 1

Значення нормованих  $\tilde{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} / \tau_s^*$  дотичних напружень (лінія 1) на межі включення-матриця та розривних напружень  $\tilde{\sigma}_{xx}^c = \sigma_{xx}^c / (2\tau_s^*)$  в перерізі включення (лінія 2) при одновісному розтягу сталими напруженнями  $\tilde{q} \equiv q / (2\tau_s^*) = 0,25$  за результатами [2, 19] подано на рис. 2. Тут і далі  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  – компоненти тензора напружень; параметр  $\tau_s^*$  трактується як зсувна міцність межі поділу з урахуванням її структурних недосконалостей. Найбільша концентрація напружень виникає в околах кінців включення, там же вздовж межі його контакту з тілом мають місце максимальні дотичні напруження  $\tau_{\max}$ . Вважатимемо, що саме тут при певній комбінації значень амплітуди та кількості циклів навантаження буде ковне відшарування (втрата зв'язку), яке просуватиметься вздовж межі поділу від кожного краю до центральної частини.

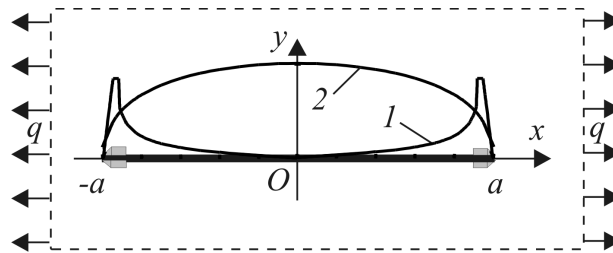


Рис. 2

Довжину включення без відшарованих на кінцях фрагментів позначимо через  $2a_{wr}$  і назвемо його робочою довжиною (рис. 1). Коефіцієнт тертя на відшарованій частині  $L_2 \approx a_{wr} < |x| \leq a$  приймемо рівним нулю. Локалізовані зони передруйнування змодельємо додатковими розрізами  $L_1 \approx c_{wr} \leq |x| \leq a_{wr}$  з дотичними напруженнями  $\tau_{sf}^*$  на границях

$$\sigma_{xy} = \tau_{sf}^* \text{sign}(x) \quad (x \in L_1).$$

З просування ділянки розшарування рухається також і зона передруйнування. Величину  $\tau_{sf}^*$  вважаємо усередненим значенням напружень у зоні передруйнування з урахуванням циклічного зміцнення чи розміцнення матеріалу. На ділянці  $|x| \leq c_{wr}$  зберігається ідеальний контакт, тому поздовжні деформації на ній дорівнюють нулю

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = 0 \quad (x \in L_0).$$

Необхідно знайти аналітичні залежності зміни робочої довжини включення  $a_{wr} = a_{wr}(n, q_{\max}, q_{\min}, \tau_{sf}^*, \alpha_0, \beta_0)$  від кількості циклів, мінімального  $q_{\min}$  та максимального  $q_{\max}$  навантажень за цикл, міцнісних та пружних характеристик. Отримані розрахункові формули будуть справедливими за допущення суперпозиції зовнішніх силових, температурних та інших чинників.

Параметри ортотропії  $\alpha_0 = (E_1/E_2)^{1/2}$ ,  $\beta_0 = E_1/(2G) - \nu_{12}$  визначаються співвідношеннями  $s_1 \cdot s_2 = -\alpha_0$ ,  $s_1 + s_2 = i[2(\alpha_0 + \beta_0)]^{1/2}$ , де  $s_1, s_2$  – корені характеристичного рівняння

$$s^4 + (E_1/G - 2\nu_{12})s^2 + E_1/E_2 = 0;$$

$E_1, E_2$  – модулі пружності розтягу та стиску у головних напрямках  $Ox$  та  $Oy$ ;  $G$  – модуль зсуву, що характеризує зміну кута між головними напрямками  $Ox$  та  $Oy$ ;  $\nu_{12}$  – коефіцієнт Пуассона, що описує скорочення в напрямку осі  $Oy$  за розтягу в напрямку  $Ox$ ;  $s_1 = \beta_1 i$ ,  $s_2 = \beta_2 i$ , де  $\beta_1, \beta_2$  – дійсні числа,  $i^2 = -1$ . Таку ортотропію, зокрема, мають боро-, вугле- та склопластики, деревина з правильними річними прошарками, фанера, тощо.

## 2. Розв'язування задачі.

Для побудови рівняння відшарування використаємо енергетичний критерій, який передбачає існування критичного значення енергії  $W_f$ , необхідної для того, щоб робоча довжина включення зменшилася на одиницю довжини. Тоді для зменшення робочої довжини  $a_{wr}$  на малу величину  $\Delta a_{wr}$  дисипація енергії  $W$  повинна досягнути значення  $W_f$ :  $W = W_f$ , де  $W_f = \eta_1 \gamma_{\tau f}^* \Delta a_{wr}$ ;  $\gamma_{\tau f}^* = \tau_{sf}^* \delta_{2cf}$  – густина енергії розшарування;  $\delta_{2cf}$  – критичний зсув у зоні передруйнування;  $\eta_1$  – поправковий коефіцієнт.

Прийmemo, що робоча довжина  $a_{wr}$  і розмір зони передруйнування  $d_f = a_{wr} - c_{wr}$  – функції від навантаження  $q$ . Тоді при збільшенні навантаження на малу величину  $\Delta q$  і просування області відшарування на  $\Delta a_{wr}$  буде справедливим співвідношення

$$W = 2 \int_{a_{wr} - \Delta a_{wr}}^{a_{wr} - d_f - \Delta a_{wr}} \sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr}(q + \Delta q), c_{wr}(q + \Delta q)) - u(x, a_{wr}(q), c_{wr}(q))] dx.$$

Нехтуючи доданками порядку  $(\Delta a_{wr})^2$ , знаходимо, що

$$\gamma_{\tau f}^* \eta_1 = -2\tau_{sf}^* \frac{d}{da_{wr}} \int_{a_{wr} - d_f}^{a_{wr}} x \frac{\partial u(x, a_{wr}, q)}{\partial x} dx - 2\tau_{sf}^* \frac{du(a_{wr}, a_{wr}, q)}{da_{wr}}. \quad (1)$$

При цьому використано оцінки

$$\int_{c-\delta a_{wr}}^c \sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr} - \delta a_{wr}, q + \Delta q) - u(x, a_{wr}, q)] dx \approx \left( \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial a_{wr}} \right)_{x=a_{wr}-d} \cdot (\delta a_{wr})^2;$$

$$\int_{a_{wr}-\delta a_{wr}}^{a_{wr}} \sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr} - \delta a_{wr}, q + \Delta q) - u(x, a_{wr}, q)] dx \approx \left( \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial a_{wr}} \right)_{x=a_{wr}} \cdot (\delta a_{wr})^2.$$

Звідси залежність між робочою довжиною включення, навантаженням, пружними і міцнісними характеристиками описується рівнянням

$$\frac{da_{wr}}{dq} = f_1(a_{wr}, q, \tau_{sf}^*, \delta_{2cf}, \alpha_0, \beta_0). \quad (2)$$

Прийmemo, що відшарування проходить під час кожного періоду навантаження, а при розвантаженні робоча довжина включення не змінюється. Рівняння (2) описує відшарування за період одного циклу, тому, інтегруючи його від  $q_{\min}$  до  $q_{\max}$  та прийнявши параметр  $a_{wr}$  сталим протягом циклу навантаження, знайдемо зменшення робочої довжини на

$$\delta a_{wr} = \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} f_1(a_{wr}, q, \tau_{sf}^*, \delta_{2cf}, \alpha_0, \beta_0) dq \equiv F_1(a_{wr}, q_{\min}, q_{\max}, \tau_{sf}^*, \delta_{2cf}, \alpha_0, \beta_0).$$

Звідси швидкість відшарування описується диференціальним рівнянням

$$\frac{da_{wr}}{dn} = F_1(a_{wr}, q_{\min}, q_{\max}, \tau_{sf}^*, \gamma_{\tau f}^*, \alpha_0, \beta_0).$$

При достатньо малих амплітудах навантаження чи робочій довжині включення незалежно від числа циклів відшарування може не відбуватися, що пов'язано з мікро-неоднорідністю реального зв'язку здовж межі поділу матеріалів чи з властивостями її пристосовуваності. Умову непоширення відшарування за велике число циклів подамо у вигляді

$$q_{\max} \leq q_f f_2(a_{wr}, q_{\min}/q_{\max}),$$

де прийmemo  $f_2(a_{wr}, 0) = 1$ . Функція  $f_2$  та навантаження  $q_f$  визначаються експериментально.

Для визначення функцій  $f_1$  та  $F_1$  використаємо розв'язок відповідної задачі за сталого навантаження  $\sigma_{xx}^\infty = q$  [2, 19]. Необхідні переміщення в зонах передруйнування матимуть вигляд:

$$u(x) = \frac{\tau_s^*}{\pi E_1} g_4(\alpha_0, \beta_0) [x \Gamma_1(x, a_{wr}, c_{wr}) - a_{wr} \Gamma_2(x, a_{wr}, c_{wr})] \quad (x \in L_1);$$

$$\Gamma_1(x, a_{wr}, c_{wr}) = [\zeta^-(x)/\zeta^+(x)]; \quad \zeta^\pm(x) = a_{wr} \sqrt{x^2 - c_{wr}^2} \pm x \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2};$$

$$\Gamma_2(x, a_{wr}, c_{wr}) = \ln[\eta^-(x)/\eta^+(x)]; \quad \eta^\pm(x) = \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} \pm \sqrt{x^2 - c_{wr}^2}; \quad (3)$$

$$g_4(\alpha_0, \beta_0) = E_1(p_1 q_2 - p_2 q_1)/i(s_1 q_2 - s_2 q_1);$$

$$p_1 = a_{11}s_1^2 + a_{12}; \quad p_2 = a_{11}s_2^2 + a_{12}; \quad q_1 = (a_{12}s_1^2 + a_{22})/s_1; \quad q_2 = (a_{12}s_2^2 + a_{22})/s_2;$$

$$a_{11} = 1/E_1; \quad a_{22} = 1/E_2; \quad a_{12} = -\nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2.$$

При цьому зв'язок між пружними, силовими та геометричними параметрами в композиті приймає вигляд

$$a_{wr} - c_{wr} = c_{wr} \left( \operatorname{ch} \frac{\pi q g_3(\alpha_0, \beta_0)}{2\tau_s^* g_2(\alpha_0, \beta_0)} - 1 \right); \quad (4)$$

$$g_2(\alpha_0, \beta_0) = \operatorname{Im} [q_2 / (s_1 q_2 - s_2 q_1)]; \quad g_3(\alpha_0, \beta_0) = q_2 (p_1 - p_2) / (p_1 q_2 - p_2 q_1).$$

А поведіння функцій  $\Gamma_1(x, \omega, c)$ ,  $\Gamma_2(x, \omega, c)$  на нескінченності визначається асимптотиками

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma_1(x, \omega, c) = -2 \ln \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - c^2}}{c} + O\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma_2(x, \omega, c) = -2 \sqrt{\omega^2 - c^2} \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Поздовжні деформації в зонах передруйнування

$$\frac{\partial u(x, a_{wr})}{\partial x} = -\frac{\tau_s^*}{\pi E_1 g_4} \Gamma_1(x, a_{wr}, c_{wr}), \quad x \in L_1.$$

Переміщення безпосередньо на вершині робочої довжини включення

$$u(a_{wr}) = \lim_{x \rightarrow a_{wr}} u(x) = \frac{2a_{wr}\tau_s^*}{\pi} \ln \frac{c_{wr}}{a_{wr}} = \frac{2\tau_s^*}{\pi E_1} \ln(\operatorname{ch} H_1);$$

$$\frac{\partial u(a_{wr})}{\partial a_{wr}} = \frac{2\tau_s^*}{\pi E_1} \left[ \ln(\operatorname{ch} H_1) + a_{wr} \operatorname{th}(H_1) \frac{dH}{da_{wr}} \right],$$

де  $H_1 = \pi H / g_4$ ,  $H = q / (2\tau_{sf}^*)$ . Звідси, зокрема, впливає автономність зон передруйнування для робочої довжини включення значно більшої проти параметра  $\delta_{2cf}$  та їх довжини:

$$a_{wr} \gg \delta_{2cf}; \quad a_{wr} - c_{wr} \ll a_{wr}. \quad (5)$$

При виконанні умов (5) з точністю до величин порядку  $\varepsilon^2$  ( $\varepsilon = (a_{wr} - c_{wr}) / a_{wr}$ )

$$a_{wr} - c_{wr} = \frac{\pi \delta_{2cf} g_3(\alpha_0, \beta_0)}{(p_1 - p_2) \tau_{sf}^* g_2(\alpha_0, \beta_0)},$$

тобто, довжина зон передруйнування в гранично-рівноважному стані ( $u(a_{wr}) = \delta_{2cf}$ ) не залежить від навантаження та розміру включення, а лише від пружних та міцнісних характеристик. Отже, для макроскопічних включень справедлива гіпотеза їх автономності.

З урахуванням результатів (3), (4) формула (1) набуває вигляду

$$\gamma_{\tau f}^* \eta_1 = -\frac{2a_{wr}(\tau_{sf}^*)^2}{\pi E_1} \left\{ 2[-H \operatorname{th}(H_1) + g_4 \ln(\operatorname{ch}(H_1))] + a_{wr} \left[ \operatorname{th}(H_1) - \frac{H_1}{\operatorname{ch}^2(H_1)} \right] \frac{dH}{da_{wr}} \right\}.$$

Вона описує зв'язок між робочою довжиною включення та навантаженням і аналогічна по структурі формулі Черепанова [6]. Для подальшого аналізу вводим безрозмірну робочу довжину включення

$$\lambda_{wr} = \frac{\eta_1 (\tau_{sf}^*)^2 a_{wr}}{0,4\pi E_1 \gamma_{\tau f}^*}. \quad (6)$$

Коефіцієнт 0,4 у формулі (6) введено для можливості прямого переходу в результатах до випадку ізотропної матриці.

Залежність між безрозмірними навантаженням  $H$  та довжиною  $\lambda_{wr}$ , враховуючи результати (4) – (6), подамо у вигляді диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{d\lambda_{wr}}{dH} = f(H, \lambda_{wr}), \quad (7)$$

де

$$f(H, \lambda_{wr}) = \frac{0,8\pi\lambda_{wr}^2 (H_1/\operatorname{ch}^2(H_1) - \operatorname{th}(H_1))}{\pi/g_4 - 1,6\lambda_{wr} (H_1 \operatorname{th}(H_1) - \ln \operatorname{ch}(H_1))}.$$

Рівняння (7) описує відшарування включення за один цикл навантаження. Проінтегрувавши його від мінімального навантаження  $H_{\min}$  до максимального  $H_{\max}$ , отримаємо зменшення робочої довжини на

$$\delta\lambda_{wr} = \int_{H_{\min}}^{H_{\max}} \frac{dH}{f(H, \lambda_{wr})},$$

де  $H_{\min} = q_{\min}/(2\tau_{sf}^*)$ ,  $H_{\max} = q_{\max}/(2\tau_{sf}^*)$ . Звідси, приймаючи  $\lambda_{wr}$  сталим на протязі одного циклу, отримаємо швидкість відшарування у вигляді

$$\frac{d\lambda_{wr}}{dn} = \int_{H_{\min}}^{H_{\max}} \frac{dH}{f(H, \lambda_{wr})} \equiv F(H_{\max}, H_{\min}, \lambda_{wr}).$$

Після інтегрування знаходимо зв'язок між числом циклів навантаження та робочою довжиною включення

$$n = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{d\lambda_{wr}}{F(H_{\max}, H_{\min}, \lambda_{wr})}, \quad (8)$$

де  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  – початкове (при  $n = 0$ ) та кінцеве (при заданому числі циклів) значення довжини параметра  $\lambda_{wr}$ .

На рис. 3 зображено залежності параметра робочої довжини включення  $\lambda_{wr}$  від числа циклів навантаження  $n$ , отримані подвійним інтегруванням за формулою (8) для початкової довжини  $\lambda_0 = 1$ ;  $\eta_1 = 1$ . Мінімальне та максимальне навантаження за цикл:  $H_{\min} = 0,1$ ,  $H_{\max} = 0,2$ .

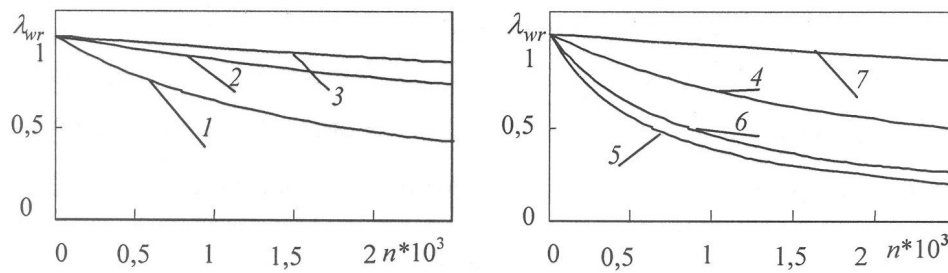


Рис. 3

Характеристики для матеріалів (табл.) взяті з праць [3, 5] і розташовані (лінії 1 – 3) за зростанням відношення модулів пружності розтягу та стиску. Для всіх матеріалів  $\nu_{12} = 0,25$ , а анізотропія виражена через параметри  $\alpha_0, \beta_0$ . При  $E_1/E_2 > 1$  включення орієнтоване вздовж напрямку більшої жорсткості.

Таблиця

| Номери<br>ліній на<br>рис. 3 | $E_1$ ,<br>ГПа | $E_2$ ,<br>ГПа | $\frac{E_1}{E_2}$ | $G_{12}$ ,<br>ГПа | $\frac{E_1}{G_{12}}$ | $\frac{s_1}{i}$ | $\frac{s_2}{i}$ | $\alpha_0$ | $\beta_0$ | Матеріал<br>армування |
|------------------------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|----------------------|-----------------|-----------------|------------|-----------|-----------------------|
| 1                            | 54,9           | 18,3           | 3                 | 8,8               | 6,239                | 2,271           | 0,763           | 1,73       | 2,87      | скло                  |
| 2                            | 281            | 28,1           | 10                | 10,5              | 26,76                | 5,077           | 0,623           | 3,16       | 13,14     | бор                   |
| 3                            | 281            | 11,2           | 25,1              | 5,6               | 50,18                | 6,999           | 0,714           | 5,01       | 24,86     | графіт                |
| 4                            | –              | –              | 4                 | –                 | 6                    | –               | –               | 2          | 2,75      | –                     |
| 5                            | –              | –              | 0,01              | –                 | 10                   | –               | –               | 0,1        | 4,75      | –                     |
| 6                            | –              | –              | 1                 | –                 | 2,5                  | 1               | 1               | 1          | 1         | ізотропія             |
| 7                            | –              | –              | 25                | –                 | 50                   | –               | –               | 5          | 24        | –                     |

Відшарування включення проходить повільніше при його орієнтації вздовж напрямку більшої жорсткості матриці. Зі зменшенням початкової робочої довжини включення швидкість його відшарування також знижується. Для заданого фіксованого навантаження за цикл та наперед відомій кількості циклів завжди можна підібрати довжину включення таким чином, щоб не відбувалось його відшарування. При цьому повного відшарування не відбувається, за умов задачі в середній частині включення залишається зв'язаним з матрицею.

### Висновок.

Запропоновано математичну модель відшарування нерозтягливого включення від основного матеріалу ортотропної матриці. За результатами (8) завжди можна підібрати довжину включення таким чином, щоб його відшарування не перевищувало заданого наперед значення (чи не відбувалося зовсім). Швидкість відшарування істотно залежить від початкової робочої довжини включення (для довшої вона більша). Параметри ортотропії складових композиту істотно впливають на процес розшарування. Орієнтування включення уздовж напрямку більшої жорсткості матриці є кращим як для збереження його цілісності, так і можливості забезпечення його від відшарування.

**РЕЗЮМЕ.** За умов плоскої задачі досліджено відшарування тонкого жорсткого включення в ортотропному тілі при навантаженні циклічними напруженнями паралельно лінії його продовження. Відшаруванню передують розвиток локалізованих зон передруйнування (ослабленого контакту), яким можуть відповідати області пластичного деформування, накопичення пошкоджень, часткового розриву зв'язків та ін. Отримано аналітичні залежності для зміни робочої довжини включення у залежності від параметрів ортотропії, амплітуди навантаження, кількості циклів, міцнісних та пружних характеристик матриці. Виконано розрахунки робочої довжини включення для окремих значень характеристик композиції та навантаження.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: включення, відшарування, зона передруйнування, робоча довжина, кількість циклів.

1. *Эберт Л.Дж., Райт П.К.* Механические поверхности раздела. В кн.: Композиционные материалы: в 8-и томах. Т. 1. Поверхности раздела в металлических композитах (ред. А. Меткалф). – Москва: Мир, 1978. – С. 42 – 76.
2. *Кундрат Н.М.* Локальное разрушение ортотропной матрицы с линейным включением // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 8. – С. 63 – 71.
3. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
4. *Сулым Г.Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
5. *Фудзии Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. – Москва: Мир, 1982. – 232 с.
6. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
7. *Шами К.* Механизм передачи нагрузки через поверхность раздела. В кн.: Композиционные материалы: в 8-и томах. Т.6. Поверхности раздела в полимерных композитах (ред. А. Меткалф). – Москва: Мир, 1978. – С. 42 – 87.
8. *Berezhnitskii L.T., Kundrat N.M.* Elastoplastic deformation near a rigid inclusion // Strength of Materials. – 1984. – **16**, N 11. – P. 1577 – 1585.
9. *Brussat T.R., Westmann R.A.* Interfacial slip around rigid fiber inclusions // J. Comp. Mater. – 1974. – **8**, N 4. – P. 364 – 377.
10. *Fukuda Hiroshi, Chou Tsu-Wei.* Stiffness and strength of short fibre composites as affected by crack and plasticity // Fibre Sci. and Technol. – 1981. – **15**, N 4. – P. 243 – 256.
11. *Gdoutos E.E., Giannakopoulou A.* Stress and failure analysis of brittle matrix composites. Part1: Stress analysis // Int. J. Fract. – 1999. – **98**. – P. 263 – 277.
12. *Iremonger M.J., Ulood W.G.* Effects of geometry on stress in discontinuous composite materials // Strain Anal. – 1969. – **4**, N 2. – P. 121 – 126.
13. *Kim J.K., Mai Y.W.* Engineered interfaces in fiber reinforced composites. – Amsterdam: Elsevier Science Ltd, 1998. – 418 p.
14. *Kundrat M.M.* Working Length of a High-Modulus Linear Inclusion Under the Action of Concentrated Cyclic Forces Within the Framework of Plane Problem // Materials Sci. – 2016. – **52**, N 1. – P. 72 – 82.
15. *Kundrat M.M.* Delamination of an Element of Reinforcement of the Half Plane Under Cyclic Loading // Materials Sci. – 2022. – **57**, N 5. – P. 745 – 749.
16. *Paipetis A., Galiotis C.* Modeling the stress-transfer efficiency of carbon-epoxy interfaces // Proc. Roy. Soc. London. A. – 2001. – **457**, N 2011. – P. 1555 – 1577.
17. *Shatskyi I.P., Kundrat A.M.* Longitudinal shear of a body with mutually immobile rigid collinear inclusions // Materials Sci. – 2004. – **40**, N 3. – P. 55 – 59.
18. *Silovanyuk V.P.* The plastic flow in a rigid disk-shaped inclusion in a transversely isotropic material // Materials Sci. – 1987. – **23**, N 5. – P. 531 – 534.
19. *Sulym H.T., Kundrat M.M.* Limiting equilibrium and fracture in an orthotropic body containing a thin rigid inclusion // Materials Sci. – 2006. – **42**, N 2. – P. 220 – 232.
20. *Sulym H.T., Pasternak I.M., Tretiak T.V.* Modeling of deformable thermoelastic thread-like inclusions in isotropic media // J. of Mathem. Sci. – 2023. – **274**, N 5. – P. 660 – 677.

Надійшла 28.09.2023

Затверджена до друку 16.04.2024