

В. І. Острик

**ВТИСКАННЯ НАПІВНЕСКІНЧЕННОГО ШТАМПА В ПРУЖНУ СМУГУ
ЗА ЇЇ ВІДРИВУ ВІД ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ**

*Інститут прикладної фізики НАН України,
вул. Петропавлівська, 58, 40000, Суми, Україна; e-mail: v.i.ostryk@gmail.com*

Abstract. The contact of a semi-infinite stamp with an elastic strip is considered when one of the faces of which slides without friction along a rigid foundation. The violation of contact of the strip with the foundation is taken into account. An analytical solution of the problem is obtained using the Wiener – Hopf method. A distance of the receding zone from the stamp edge, the contact stress distributions, and the normal displacements of strip faces are found.

Key words: elastic strip, semi-infinite stamp, receding contact, tensions, Wiener – Hopf method.

Вступ.

Одним із напрямків контактної механіки, який веде свій початок від робіт [8, 9, 12, 22 – 24, 30, 31, 34, 35] і активно розвивається в останні роки [15 – 18], є вивчення так званого контакту з відривом (контакту з відставанням) [4]. Характерним для постановок задач цього напрямку є те, що за певних умов область контакту між пружними тілами або між пружним і абсолютно жорстким тілом (штампом) після прикладання навантаження зменшується, тобто поверхні тіл, які попередньо дотикались одна одній у деякій області, під навантаженням відходять одна від одної на частині цієї області.

Контакт із відривом пружної смуги і пружної півплощини досліджено в роботах [22, 24, 34]. Смуга гладко спирається своєю нижньою гранню на межу півплощини. Під дією на верхню грань смуги нормальної зосередженої сили межі смуги та півплощини залишаються в контакті на певному скінченному відрізку, а поза областю контакту (на двох напівнескінчених проміжках) – відступають одна від одної. В [24] задачу зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, яке розв'язано чисельно, а в [22, 34] отримано наближений розв'язок за умови, що смуга є балкою. Відрив пружної смуги від жорсткої основи розглянуто в роботі [8]. У статті [24] також розв'язано осесиметричну задачу про контакт із відривом пружного шару та півпростору з круговою областю контакту між ними. В [30] для розв'язання останньої задачі застосовано варіаційний метод з використанням пробних функцій, а в [12] – метод парних інтегральних рівнянь. У [7] цю задачу узагальнено на випадок багатоплощинної основи.

Відрив балки та пластини від основи Вінклера або Рейснера під дією нормальної зосередженої сили розглянуто в роботі [35]. Показано, що з урахуванням власної ваги балки та пластини зони відриву стають скінченними. У роботі [23] задачу про вагому смугу зі скінченними зонами відриву від основи зведено до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, яке розв'язано наближено варіаційним методом. Осесиметричну задачу з кільцевою зоною відриву пружного шару від жорсткої основи розгля-

нуто в [9] як з урахуванням власної ваги шару, так і для невагомому шару, закріпленого на нескінченності.

Передвісником перших досліджень контакту з відривом можна вважати роботу [21] ([13, с. 74]), де розглянуто стискання пружної смуги двома нормальними зосередженими силами, прикладеними в точках її протилежних граней. Обчислення, виконані в [21], показали, що нормальні напруження на лінії симетрії смуги є напруженнями стиску тільки на скінченному інтервалі, довжина якого складає 1,34 ширини смуги. Поза вказаним інтервалом нормальні напруження на середній лінії смуги змінюються напруженнями розтягу. Ця задача еквівалентна задачі про дію нормальної зосередженої сили на пружну смугу, одна грань якої перебуває в умовах гладкого контакту з жорсткою основою. При цьому ширина смуги вдвічі менша за її ширину у задачі, що розглянута в [21]. Те, що згідно з результатами роботи [21] нормальні напруження на межі смуги та жорсткої стінки переходять у напруження розтягу, вказує на фізичну суперечливість розв'язку цієї задачі та веде до її уточненої постановки з уведенням зон відриву, тобто до постановки, розглянутої в роботах [22, 24, 30, 34, 35] для випадку пружної основи. На жаль, таке обґрунтування постановок задач про контакт із відривом, яке спирається на результати роботи [31], відсутнє як у статтях [22, 24, 30, 34, 35], так і більш сучасних роботах [15 – 18]. Відмітимо також, що розмір області контакту у випадку жорсткої основи, знайдений у [24], приблизно у півтора рази менший від розміру зони напружень стиску в задачі безвідривного контакту [21].

Якщо на напівнескінченному проміжку верхньої грані пружної смуги діє рівномірний тиск, а інша частина цієї грані вільна від навантаження, то нижня грань смуги відривається від жорсткої основи на одному напівнескінченному проміжку. У такій постановці в роботі [5] методом Вінера – Гопфа знайдено точний розв'язок задачі. Відстань від проекції ділянки навантаження на нижню грань смуги до зони відриву складає 0,3912 від ширини смуги, що у 2,3 рази менше за відстань до точки зміни знаку нормальних напружень у відповідній задачі безвідривного контакту.

Відрив нижньої грані смуги від жорсткої основи спостерігається також у випадку, коли у верхню грань втискається штамп. Зазвичай контактні задачі для смуги розглядаються в одній із двох постановок: нижня грань смуги або жорстко з'єднана із жорсткою основою, або знаходиться з нею в умовах гладкого контакту [3]. На відміну від першої групи задач, яка не потребує додаткових досліджень, при розв'язанні кожної із задач другої групи необхідно перевірити, що нормальні напруження на нижній грані смуги є напруженнями стиску. Велику кількість задач другої групи розв'язано без такої перевірки [3, 20]. Виключенням є робота [32], у якій розв'язано контактну задачу для смуги у випадку штампа з прямолінійною основою та, зокрема, обчислено нормальні напруження на нижній грані смуги, яка вільно проковзує вздовж жорсткої основи. Показано, що ці напруження переходять у напруження розтягу на відстані, яка приблизно дорівнює ширині смуги, від точок нижньої грані смуги, що знаходяться під краями штампа. Ця обставина вказує на відрив смуги від жорсткої основи та на необхідність перегляду постановки задачі з уведенням зон відриву. У такій уточненій постановці в роботі [31] контактну задачу для смуги на пружній півплощині у випадках штампа з прямолінійною та параболічною основами зведено до систем інтегральних рівнянь, які розв'язано чисельно методом механічних квадратур. Осесиметричний аналог останньої задачі для кругового штампа з плоскою основою розв'язано в [19]. Хоча розв'язки задач безвідривного контакту із жорсткою основою [3, 20] не можна вважати фізично коректними, їм все ж таки можна надати фізичний зміст, змінивши їх постановку, і вважати нижню грань смуги точково скріпленою з основою із можливістю вільного проковзування вздовж основи. Або перейти до розгляду взаємодії зі смугою двох штампів, симетрично розміщених відносно осі симетрії смуги. В останній постановці крайові умови на кожній із граней смуги та умови на її осі симетрії будуть відповідати крайовим умовам задач безвідривного контакту.

Контакт із відривом пружної смуги, модуль зсуву якої змінюється за експоненціальним законом уздовж поперечної координати, а у її верхню грань втискається штамп

параболічного профілю, розглянуто в роботах [15 – 18]. В [15, 17] смугова основа має змінний модуль зсуву, в [16] основа є жорсткою, в [18] – пружною півплощиною. В роботах [15, 18] враховано сили тертя при проковзуванні штампа вздовж верхньої грані смуги та нижньої її грані вздовж основи, а в роботі [16] – власну вагу смуги з утворенням зон відриву скінченних розмірів. У всіх цих роботах [15 – 18] задачі зведено до систем сингулярних інтегральних рівнянь, які розв’язано чисельно методом механічних квадратур або методом колокацій.

У роботі [11] варіаційним методом розглянуто контакт двох пружних смуг з поділом їхньої спільної межі на ділянки зчеплення, фрикційного проковзування та відриву. Враховано власну вагу однієї із смуг, до межі якої прикладено розподілене навантаження. Межу іншої смуги закріплено.

Відрив може відбуватися між поверхнями включення і пружної матриці, які перебувають в умовах гладкого контакту. Список праць, які містять розв’язання відповідних контактних задач для різних включень наведено у статті [24]. У роботі [2] розглянуто рівновагу пружної площини з тонким жорстким включенням, одна сторона якого зчеплена з площиною, а інша перебуває з нею в умовах гладкого контакту. Під дією навантаження на включення відбувається його відрив на внутрішній частині ділянки відшарування. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа систему інтегральних рівнянь задачі зведено до нескінченної системи алгебричних рівнянь.

До задач контакту з відривом можна також віднести деякі інші задачі. При згині пружної смуги, яка спирається на дві точкові опори, жорстким диском [26] область контакту, якщо її розмір перевищує ширину смуги у 5 разів, розпадається на дві підобласті, які розділяє зона відриву. Відрив плоскої поверхні кругового штампа від багатоплощинної основи вздовж кільцевої області всередині подошви штампа спостерігається у випадку, коли модуль Юнга верхнього шару є більшим від модуля Юнга сусіднього з ним шару [6]. Якщо грані пружної смуги ідеально з’єднані з жорсткими стінками, окрім напівнескінченного проміжку на одній із граней, де міститься межова закрита тріщина, береги якої знаходяться у ковзному контакті, то у разі, коли відношення інтенсивностей зсувного та стискального навантаження на стінки перевищує 3,26 для коефіцієнта тертя 0,25, відбувається відрив смуги від стінки на відстані від вершини тріщини, яка дорівнює ширині смуги [29]. При розклинюванні пружного клина жорсткою пластинкою вздовж крайової тріщини на лінії симетрії клина береги тріщини частково виходять із контакту з пластинкою поблизу вершини клина [33]. У задачі гладкого контакту пружного клина з однією закріпленою гранню та штампа з прямолінійною основою, один край якого дотикається вершини клина, якщо кут розчину клина перевищує значення $\arccos \sqrt{\nu}$ ($56,8^\circ$ для $\nu = 0,3$), де ν – коефіцієнт Пуассона, спостерігається відрив клина від подошви штампа в околі вершини клина [14]. У роботах [14, 26, 29, 33] для знаходження розв’язків задач про контакт із відривом застосовано метод Вінера – Гопфа, у [6] – метод парних інтегральних рівнянь.

Нижче із застосуванням методу Вінера – Гопфа знайдено аналітичний розв’язок задачі про гладкий контакт пружної смуги з напівнескінченим штампом за умови відриву смуги від жорсткої основи.

§1. Постановка задачі. Система інтегральних рівнянь.

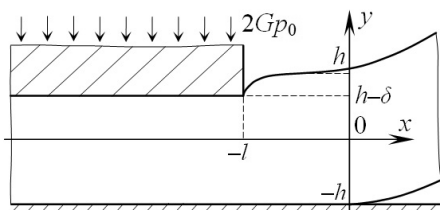


Рис. 1

Нехай пружна смуга $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ з модулем зсуву G і коефіцієнтом Пуассона ν гладко контактує своєю нижньою гранню $y = -h$ з абсолютно жорсткою основою. У верхню грань $y = h$ смуги на проміжку $-\infty < x \leq -l$ під дією навантаження інтенсивності $2Gp_0$ втискається на глибину δ напівнескінченний штамп з прямоліній-

ною основою (рис. 1). Сили тертя в області контакту штампa зі смугою не враховуємо. У результаті такого навантаження нижня грань смуги виходить із контакту з жорсткою основою на проміжку $0 < x < \infty$. Відстань l між проекцією підшоши штампa на основу та областю відриву нижньої грані смуги від основи заздалегідь невідома та підлягає визначенню.

Зауважимо, що, не зважаючи на асиметрію задачі, штамп не може повернутися проти годинникової стрілки тому, що тоді його підшошва перетне жорстку основу, що неможливо. Якщо штамп повернеться за годинниковою стрілкою, то тоді область його контакту зі смугою стане скінченною, прилеглою до краю штампa, і контактні напруження не зможуть зрівноважити зовнішнє навантаження на штамп. Тому поворот штампa не відбувається. Сприйняття асиметрії задачі можна позбутися, якщо уявити симетрично навантажений штамп скінченного розміру, зафіксувати увагу на його правому краї та спрямувати довжину підшоши штампa до нескінченності. При цьому поворот штампa як скінченного, так і напівнескінченного буде відсутнім.

Крайові умови задачі запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} u_y|_{y=h} = -\delta \quad (-\infty < x \leq -l); \quad \sigma_y|_{y=h} = 0 \quad (-l < x < \infty); \quad u_y|_{y=-h} = 0 \quad (-\infty < x \leq 0); \\ \sigma_y|_{y=-h} = 0 \quad (0 < x < \infty); \quad \tau_{xy}|_{y=\pm h} = 0 \quad (-\infty < x < \infty). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Просідання δ знайдемо, скориставшись тим, що під штампом при необмеженому віддаленні від його краю у смугі встановлюється однорідний напружено-деформований стан, для якого напруження та деформації незмінні, причому $\varepsilon_y = -\delta/(2h)$, $\sigma_y = -2Gp_0$, $\sigma_x = 0$ ($x \rightarrow -\infty$). Підставивши ці значення у закон Гука, отримаємо

$$\delta = 2(1-\nu)p_0h. \quad (1.2)$$

При цьому також дістанемо $\varepsilon_x = \nu p_0$ ($x \rightarrow -\infty$).

Введемо дві невідомі функції

$$s(x) = u_y|_{y=-h} \quad (0 < x < \infty); \quad p(x) = \frac{1}{2G}\sigma_y|_{y=h} \quad (-\infty < x < -l). \quad (1.3)$$

Згідно з третьою та другою із крайових умов (1.1)

$$s(x) = 0 \quad (-\infty < x \leq 0); \quad p(x) = 0 \quad (-l < x < \infty). \quad (1.4)$$

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за змінною x до рівнянь рівноваги, закону Гука та крайових умов (1.1), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G}\sigma_y|_{y=-h} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(\operatorname{sh} 2\mu h + 2\mu h \operatorname{ch} 2\mu h)\tilde{p}(\mu) - (1-\nu)^{-1}\mu[\operatorname{sh}^2 2\mu h - (2\mu h)^2]\tilde{s}(\mu)}{\operatorname{sh} 4\mu h + 4\mu h} e^{-i\mu x} d\mu; \\ u_y|_{y=h} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4(1-\nu)\operatorname{sh}^2 2\mu h \tilde{p}(\mu) + 2\mu(\operatorname{sh} 2\mu h + 2\mu h \operatorname{ch} 2\mu h)\tilde{s}(\mu)}{\mu(\operatorname{sh} 4\mu h + 4\mu h)} e^{-i\mu x} d\mu; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\tilde{p}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-l} p(x)e^{i\mu x} dx; \quad \tilde{s}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} s(x)e^{i\mu x} dx.$$

З урахуванням асимптотичної поведінки функцій $p(x)$ і $s(x)$ на нескінченності:

$$p(x) = -p_0 + p_*(x); \quad p_*(-\infty) = 0; \quad s(x) = Ax + B + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad s''(\infty) = 0 \quad (1.6)$$

їхні трансформанти із (1.5) подамо у вигляді

$$\tilde{p}(\mu) = -\frac{p_0}{2\pi} \left(\pi \delta(\mu) - \frac{i}{\mu} \right) e^{-i\mu l} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-l} p_*(r) e^{i\mu r} dr; \quad \tilde{s}(\mu) = -\frac{1}{2\pi\mu^2} \int_0^{\infty} s''(r) e^{i\mu r} dr. \quad (1.7)$$

Задовольнивши виразами (1.5) четверту та здиференційовану першу з крайових умов (1.1) і виконавши заміни

$$\mu = \frac{\tau}{2h}; \quad x = 2h\xi; \quad r = 2h\eta; \quad a = \frac{l}{2h} \quad (1.8)$$

відносно нових невідомих функцій

$$\varphi_1(\eta) = \frac{h}{1-\nu} s''(2h\eta) \quad (0 < \eta < \infty); \quad \varphi_2(\eta) = p_*(2h\eta) \quad (-\infty < \eta < -a), \quad (1.9)$$

отримуємо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} L_1(\xi) &\equiv \int_0^{\infty} k_{11}(\xi - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{-a} k_{12}(\xi - \eta) \varphi_2(\eta) d\eta = f_1(\xi) \quad (0 < \xi < \infty); \\ L_2(\xi) &\equiv \int_0^{\infty} k_{21}(\xi - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{-a} k_{22}(\xi - \eta) \varphi_2(\eta) d\eta = f_2(\xi) \quad (-\infty < \xi < -a), \end{aligned} \quad (1.10)$$

ядра та праві частини якої мають вигляд

$$k_{mj}(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{mj}(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau \quad (m, j = 1, 2);$$

$$K_{11}(\tau) = \frac{\text{sh}^2 \tau - \tau^2}{\tau(\text{sh} 2\tau + 2\tau)}; \quad K_{12}(\tau) = -\tau K_{21}(\tau) = \frac{\text{sh} \tau + \tau \text{ch} \tau}{\text{sh} 2\tau + 2\tau}; \quad K_{22}(\tau) = \frac{\text{sh}^2 \tau}{\text{sh} 2\tau + 2\tau}; \quad (1.11)$$

$$f_1(\xi) = \frac{p_0}{4} + \frac{p_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh} \tau + \tau \text{ch} \tau}{\tau(\text{sh} 2\tau + 2\tau)} e^{-i\tau(\xi + a)} d\tau; \quad f_2(\xi) = \frac{p_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh}^2 \tau}{\tau(\text{sh} 2\tau + 2\tau)} e^{-i\tau(\xi + a)} d\tau.$$

Застосувавши теорію лишків, функції $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ із (1.11) перетворимо до вигляду

$$f_1(\xi) = \frac{p_0}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{tg}^2 s_k}{\cos s_k} e^{-s_k(\xi + a)}; \quad f_2(\xi) = \frac{ip_0}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{tg}^2 s_k}{s_k} e^{s_k(\xi + a)}, \quad (1.12)$$

де s_k ($k = 1, 2, \dots$) – корені рівняння $\sin 2s + 2s = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$.

§2. Розв'язування системи інтегральних рівнянь.

Систему інтегральних рівнянь (1.10) за схемою роботи [27] із застосуванням методу Вінера – Гопфа [10] зведемо до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Продовжимо рівняння (1.10) на всю числову вісь, поклавши $\varphi_1(\eta) = 0$ ($-\infty < \eta \leq 0$), $\varphi_2(\eta) = 0$ ($-a \leq \eta < \infty$), та застосуємо до них інтегральне перетворення Фур'є. Ввівши до розгляду невідомі функції

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi; \quad \Phi^-(z) = \frac{e^{iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-a} \varphi_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi; \\ \Psi^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi; \quad \Psi^+(z) = \frac{e^{iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{\infty} L_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

серед яких $\Phi^+(z)$, $\Psi^+(z)$ аналітичні у півплощині $\text{Im } z > c^+$ ($c^+ < 0$), а $\Phi^-(z)$, $\Psi^-(z)$ – у півплощині $\text{Im } z < c^-$ ($c^- > 0$) комплексної площини, отримаємо систему функціональних рівнянь

$$\begin{aligned}
K_{11}(z)\Phi^+(z) + e^{-iza}K_{12}(z)\Phi^-(z) - \Psi^-(z) &= F^+(z); \\
K_{22}(z)\Phi^-(z) + e^{iza}K_{21}(z)\Phi^+(z) - \Psi^+(z) &= F^-(z) \\
(-\infty < \operatorname{Re} z < \infty, c^+ < \operatorname{Im} z < c^-); &
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
F^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi = \frac{p_0}{4\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^\infty \frac{\operatorname{tg}^2 s_k}{\cos s_k} \frac{e^{-s_k a}}{s_k - iz}; \\
F^-(z) &= \frac{e^{iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-a} f_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi = \frac{ip_0}{4\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^\infty \frac{\operatorname{tg}^2 s_k}{s_k} \frac{1}{s_k + iz}.
\end{aligned}$$

Виконаємо факторизацію коефіцієнтів $K_{11}(z)$, $K_{22}(z)$ системи рівнянь (2.2) у нескінченних добутках:

$$\begin{aligned}
K_{11}(z) &= \frac{z^2}{12} K_{11}^+(z) K_{11}^-(z); \quad K_{22}(z) = \frac{z}{4} K_{22}^+(z) K_{22}^-(z); \\
K_{11}^+(z) &\equiv K_{11}^-(-z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{iz}{\zeta_n}\right) \left(1 - \frac{iz}{s_n}\right)^{-1}; \\
K_{22}^+(z) &\equiv K_{22}^-(-z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{iz}{\pi[(n+1)/2]}\right) \left(1 - \frac{iz}{s_n}\right)^{-1},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

де $K_{11}^+(z)$, $K_{22}^+(z)$ і $K_{11}^-(z)$, $K_{22}^-(z)$ – функції, які є аналітичними та не дорівнюють нулю у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ і $\operatorname{Im} z < c^-$, відповідно, ζ_n ($n=1, 2, \dots$) – корені рівняння $\sin^2 s - s^2 = 0$ із півплощини $\operatorname{Re} s > 0$, а $[x]$ означає цілу частину числа x .

Запишемо систему рівнянь (2.2) у вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{z^2}{12} K_{11}^+(z)\Phi^+(z) + \frac{e^{-iza}}{K_{11}^-(z)} K_{12}(z)\Phi^-(z) - \frac{\Psi^-(z)}{K_{11}^-(z)} &= \frac{F^+(z)}{K_{11}^-(z)}; \\
\frac{z^2}{4} K_{22}^-(z)\Phi^-(z) + \frac{e^{iza}z}{K_{22}^+(z)} K_{21}(z)\Phi^+(z) - \frac{z\Psi^+(z)}{K_{22}^+(z)} &= \frac{zF^-(z)}{K_{22}^+(z)} \quad (c^+ < \operatorname{Im} z < c^-)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

і подамо другий доданок лівої частини і праву частину кожного з її рівнянь у вигляді різниці аналітичних у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$, $\operatorname{Im} z < c^-$ функцій:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-iza}}{K_{11}^-(z)} K_{12}(z)\Phi^-(z) &= \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z); \quad \frac{F^+(z)}{K_{11}^-(z)} = f_1^+(z) - f_1^-(z); \\
\frac{e^{iza}z}{K_{22}^+(z)} K_{21}(z)\Phi^+(z) &= \chi_2^+(z) - \chi_2^-(z); \quad \frac{zF^-(z)}{K_{22}^+(z)} = f_2^+(z) - f_2^-(z); \\
\chi_1^+(z) &= -\sum_{k=1}^\infty \frac{s_k^2 \alpha_k^-}{s_k - iz} \Phi^-(is_k) e^{-s_k a}; \quad f_1^+(z) = -\frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^\infty \frac{s_k \alpha_k^-}{s_k - iz} e^{-s_k a}; \\
\chi_2^-(z) &= -\sum_{k=1}^\infty \frac{s_k^2 \alpha_k^+}{s_k + iz} \Phi^+(is_k) e^{-s_k a}; \quad f_2^-(z) = -\frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^\infty \frac{s_k \alpha_k^+ \cos s_k}{s_k + iz};
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\alpha_k^- = -\frac{\operatorname{tg}^2 s_k}{4s_k \cos s_k \cdot K_{11}^+(is_k)}; \quad \alpha_k^+ = -\frac{\operatorname{tg}^2 s_k}{4s_k \cos s_k \cdot K_{22}^+(is_k)} \quad (k=1, 2, \dots).$$

У результаті систему рівнянь (2.2) зведемо до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{12} K_{11}^+(z) \Phi^+(z) + \chi_1^+(z) - f_1^+(z) &= \frac{\Psi^-(z)}{K_{11}^-(z)} + \chi_1^-(z) - f_1^-(z); \\ \frac{z^2}{4} K_{22}^-(z) \Phi^-(z) - \chi_2^-(z) + f_2^-(z) &= \frac{z\Psi^+(z)}{K_{22}^+(z)} - \chi_2^+(z) + f_2^+(z) \quad (c^+ < \operatorname{Im} z < c^-). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ліва та права частина кожного з рівнянь (2.6) – аналітичні, відповідно, у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ та $\operatorname{Im} z < c^-$, тобто аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і дорівнюють цілій функції. Із умов на нескінченності

$$K_{11}^+(z) = O(z^{-3/2}); \quad K_{22}^-(z) = O(z^{-1/2}); \quad \Phi^\pm(z) = o(1);$$

$$\chi_1^+(z), f_1^+(z), \chi_2^-(z) = O(z^{-1}); \quad f_2^-(z) = O(z^{1/2}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

впливає, що для першого із рівнянь (2.6) така ціла функція дорівнює сталій C_1 , а для другого – лінійній функції $C_2z + C_3$. Звідси отримуємо

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= 12 \frac{f_1^+(z) - \chi_1^+(z) + C_1}{z^2 K_{11}^+(z)}; \quad \Psi^-(z) = K_{11}^-(z) [f_1^-(z) - \chi_1^-(z) + C_1]; \\ \Phi^-(z) &= 4 \frac{\chi_2^-(z) - f_2^-(z) + C_2z + C_3}{z^2 K_{22}^-(z)}; \quad \Psi^+(z) = \frac{1}{z} K_{22}^+(z) [\chi_2^+(z) - f_2^+(z) + C_2z + C_3]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Вимагаючи аналітичність функцій $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ у точці $z=0$, знаходимо

$$C_1 = \chi_1^+(0) - f_1^+(0); \quad C_2 = \frac{d}{dz} [f_2^-(z) - \chi_2^-(z)] \Big|_{z=0}; \quad C_3 = f_2^-(0) - \chi_2^-(0) \quad (2.9)$$

і доходимо до додаткової умови

$$\frac{d}{dz} [\chi_1^+(z) - f_1^+(z)] \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.10)$$

При цьому аналітичність функції $\Psi^+(z)$ у точці $z=0$ забезпечується третьою з умов (2.9) на підставі третьої та четвертої рівностей із (2.5).

З урахуванням (2.9), (2.10) функції $\Phi^\pm(z)$ із (2.8) перетворюємо до вигляду

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= 12 \frac{\tilde{f}_1^+(z) - \tilde{\chi}_1^+(z)}{K_{11}^+(z)}; \quad \Phi^-(z) = 4 \frac{\tilde{\chi}_2^-(z) - \tilde{f}_2^-(z)}{K_{22}^-(z)}; \\ \tilde{\chi}_1^+(z) &= \frac{1}{z^2} \left(\chi_1^+(z) - \chi_1^+(0) - z \frac{d}{dz} \chi_1^+(z) \Big|_{z=0} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{s_k - iz} \Phi^-(is_k) e^{-s_k a}; \\ \tilde{f}_1^+(z) &= \frac{1}{z^2} \left(f_1^+(z) - f_1^+(0) - z \frac{d}{dz} f_1^+(z) \Big|_{z=0} \right) = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{s_k (s_k - iz)} e^{-s_k a}; \\ \tilde{\chi}_2^-(z) &= \frac{1}{z^2} \left(\chi_2^-(z) - \chi_2^-(0) - z \frac{d}{dz} \chi_2^-(z) \Big|_{z=0} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{s_k + iz} \Phi^+(is_k) e^{-s_k a}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\tilde{f}_2^-(z) = \frac{1}{z^2} \left(f_2^-(z) - f_2^-(0) - z \frac{d}{dz} f_2^-(z) \Big|_{z=0} \right) = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+ \cos s_k}{s_k (s_k + iz)}.$$

При цьому функцію $\tilde{f}_2^-(z)$ після підсумовування ряду ($c > 0$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+ \cos s_k}{s_k (s_k + iz)} &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 s_k}{s_k^2 (\cos 2s_k + 1) K_{22}^+(is_k)(s_k + iz)} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{\text{sh}^2 \tau}{\tau^2 (\text{sh} 2\tau + 2\tau) K_{22}^+(\tau)(\tau - z)} d\tau = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{K_{22}^-(\tau)}{\tau(\tau - z)} d\tau = -\frac{K_{22}^-(z) - 1}{4iz} \end{aligned} \quad (2.12)$$

подамо у більш простому вигляді

$$\tilde{f}_2^-(z) = \frac{ip_0}{4\sqrt{2\pi}} \frac{K_{22}^-(z) - 1}{z}. \quad (2.13)$$

Для визначення невідомих значень $\Phi^+(is_k)$, $\Phi^-(-is_k)$ ($k = 1, 2, \dots$), які входять до розв'язку (2.8), (2.11), підставимо у першу із рівностей (2.11) $z = is_n$, а у другу – $z = -is_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Відносно невідомих

$$z_k^+ = \frac{\sqrt{2\pi}}{p_0} \Phi^+(is_k); \quad z_k^- = \frac{\sqrt{2\pi}}{p_0} \Phi^-(-is_k) - \frac{1}{s_k} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$z_n^+ - \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{s_k + s_n} z_k^- \lambda^k = 0; \quad z_n^- - \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{s_k + s_n} z_k^+ \lambda^k = f_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.15)$$

з такими коефіцієнтами:

$$\tilde{\alpha}_k^{\pm} = \alpha_k^{\pm} e^{(\pi k/2 - s_k)a}; \quad \beta_n^+ = -\frac{12}{K_{11}^+(is_n)}; \quad \beta_n^- = \frac{4}{K_{22}^+(is_n)}; \quad f_n = -\frac{\beta_n^-}{4s_n} \quad (k, n = 1, 2, \dots). \quad (2.16)$$

Тут, завдяки асимптотичній поведінці коренів $s_k \sim \pi k/2$, $k \rightarrow \infty$, введено параметр

$$\lambda = e^{-\pi a/2} \quad (0 < \lambda < 1). \quad (2.17)$$

Система рівнянь (2.15), коефіцієнти якої експоненціально спадають із зростанням k , є регулярною типу Пуанкаре – Коха і може бути розв'язана чисельно методами редукції та послідовних наближень [6], а також аналітично в рядах за степенями малого параметра λ [1]. Згідно з останнім подамо її невідомі у вигляді

$$z_k^{\pm} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{km}^{\pm} \lambda^m \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.18)$$

Підставивши розвинення (2.18) у рівняння (2.15) методом невизначених коефіцієнтів знайдемо

$$\xi_{n0}^+ = 0; \quad \xi_{n0}^- = f_n \quad (2.19)$$

та отримаємо рекурентні співвідношення

$$\xi_{nm}^+ = \beta_n^+ \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{s_k + s_n} \xi_{k,m-k}^-; \quad \xi_{nm}^- = \beta_n^- \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{s_k + s_n} \xi_{k,m-k}^+ \quad (2.20)$$

для визначення коефіцієнтів ξ_{nm}^{\pm} ($n, m = 1, 2, \dots$).

Додаткова умова (2.10) набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^- z_k^- \lambda^k = 0 \quad (2.21)$$

і слугує для знаходження розміру $l = 2ha = -(4h/\pi) \ln \lambda$.

Розв'язок системи інтегральних рівнянь (1.10) знаходимо через розв'язок (2.11) системи функціональних рівнянь (2.2), обернувши інтеграли Фур'є з (2.1):

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\tau) e^{-i\tau\xi} d\tau; \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\tau) e^{-i\tau(\xi+a)} d\tau. \quad (2.22)$$

§3. Контактні напруження та нормальні переміщення граней смуги.

Контактні напруження вздовж підоснови штампа завдяки рівностям (1.3), (1.6), (1.9) знайдемо за формулою

$$\frac{1}{2G} \sigma_y \Big|_{y=h} = -p_0 + \varphi_2(\xi), \quad \xi = \frac{x}{2h} \quad (-\infty < x < -l, \quad -\infty < \xi < -a), \quad (3.1)$$

а між смугою та жорсткою основою – із першої рівності (1.5), яку перепишемо так:

$$\frac{1}{2G} \sigma_y \Big|_{y=-h} = -\frac{p_0}{2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_{11}(\tau) \Phi^+(\tau) + e^{-i\tau a} K_{12}(\tau) \left(\Phi^-(\tau) + \frac{ip_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\tau} \right) \right] e^{-i\tau\xi} d\tau \quad (3.2)$$

$(-\infty < x, \xi < 0).$

Обчисливши інтеграли із другої рівності (2.22) і рівності (3.2) за теорією лишків, отримаємо

$$\frac{1}{2G} \sigma_y \Big|_{y=h} = -p_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(\xi); \quad \frac{1}{2G} \sigma_y \Big|_{y=-h} = -p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sigma_k(\xi) \quad (-\infty < x < -l);$$

$$\sigma_k(\xi) = 2\pi^2 p_0 k^2 K_{22}^+(\pi ik) e^{\pi k(\xi+a)} \left[\left(\frac{2}{\pi k} - \frac{K_{22}'(\pi ik)}{iK_{22}^+(\pi ik)} + \xi + a \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m^+ z_m^+ \lambda^m}{s_m - \pi k} + \frac{1}{4\pi k} \right) + \frac{1}{\pi k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s_m \tilde{\alpha}_m^+ z_m^+ \lambda^m}{(s_m - \pi k)^2} \right] \quad (-\infty < \xi < -a); \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_y \Big|_{y=-h} = -\frac{p_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \operatorname{tg}^2 s_k}{\cos^2 s_k} \left(z_k^+ e^{s_k \xi} - z_k^- \cos s_k \cdot e^{-s_k(\xi+a)} \right) \quad (-l < x < 0, \quad -a < \xi < 0).$$

Із асимптотичних формул

$$\Phi^-(z) \sim \frac{A_2}{\sqrt{iz}}; \quad \Psi^-(z) \sim \frac{A_1}{\sqrt{(iz)^3}}, \quad |z| \rightarrow \infty; \quad (3.4)$$

$$A_2 = \frac{2p_0}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^+ z_k^+ \lambda^k - \frac{1}{4} \right); \quad A_1 = \sqrt{6} C_1 = -\sqrt{\frac{3}{\pi}} p_0 \sum_{k=1}^{\infty} s_k \tilde{\alpha}_k^- z_k^- \lambda^k,$$

на підставі тауберової теореми [10] (леми Ватсона [21]) знаходимо поведінку нормальних напружень поблизу краю кожної із областей контакту:

$$\frac{1}{2G} \sigma_y \Big|_{y=h} \sim 2A_2 \sqrt{\frac{h}{-l-x}}, \quad x \rightarrow -l-0; \quad \frac{1}{2G} \sigma_y \Big|_{y=-h} \sim 4A_1 \sqrt{\frac{-x}{h}}, \quad x \rightarrow -0, \quad (3.5)$$

де вони, відповідно, необмежені та прямують до нуля з характерною для гладкого контакту кореневою поведінкою [4].

Для визначення переміщень на нижній грані смуги виходимо з рівності

$$\frac{d^2}{dx^2} u_y \Big|_{y=-h} = \frac{1-\nu}{h} \varphi_1(\xi) \quad (0 < x, \xi < \infty), \quad (3.6)$$

яка впливає із перших співвідношень (1.3), (1.9). Застосувавши теорію лишків до інтегралу з першої рівності (2.22), знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u_y \Big|_{y=-h} &= \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^2 \delta_k e^{-\zeta_k \xi} \quad (0 < x, \xi < \infty), \\ \delta_k &= -2(1-\nu) p_0 \frac{\zeta_k (\sin 2\zeta_k + 2\zeta_k)}{\sin 2\zeta_k - 2\zeta_k} K_{11}^+(i\zeta_k) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m^-}{s_m - \zeta_k} z_k^- \lambda^m. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Зінтегрувавши двічі першу з рівностей (3.7), після перетворення рядів зі слабкою збіжністю до рядів з експоненціальною збіжністю

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \delta_k = -24(1-\nu) p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{s_k} z_k^- \lambda^k; \\ \frac{B}{2h} &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k = -iK_{11}^{+'}(0)A + 24(1-\nu) p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{s_k^2} z_k^- \lambda^k \end{aligned} \quad (3.8)$$

отримаємо нормальні переміщення нижньої грані смуги

$$u_y \Big|_{y=-h} = Ax + B + 2h \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k e^{-\zeta_k \xi} \quad (0 < x, \xi < \infty). \quad (3.9)$$

Нормальні переміщення верхньої грані смуги із (1.5) перетворимо до вигляду

$$\begin{aligned} u_y \Big|_{y=h} &= 2h(1-\nu) p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^2 s_k}{s_k \cos s_k} \left(z_k^+ e^{s_k \xi} - z_k^- \cos s_k \cdot e^{-s_k(\xi+a)} \right) \quad (-l < x < 0, -a < \xi < 0); \\ u_y \Big|_{y=h} &= Ax + B + 4h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \zeta_k + \zeta_k \cos \zeta_k}{\sin 2\zeta_k + 2\zeta_k} \delta_k e^{-\zeta_k \xi} \quad (0 < x, \xi < \infty). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Із асимптотичних формул

$$\Phi^+(z) \sim -\frac{2A_1}{\sqrt{-iz}}; \quad \Psi^+(z) \sim \frac{A_2}{2\sqrt{-iz}}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

за тауберовою теоремою [10] знаходимо поведінку переміщень на початку зони відриву та поблизу краю штапа:

$$u_y \Big|_{y=-h} \sim -\frac{16}{3}(1-\nu)A_1 \sqrt{\frac{x^3}{h}}, \quad x \rightarrow +0; \quad u_y \Big|_{y=h} \sim -8(1-\nu)A_2 \sqrt{h(x+l)}, \quad x \rightarrow -l+0. \quad (3.12)$$

Зв'язок між асимптотиками контактних напружень (3.5) і нормальних переміщень (3.12) узгоджується з асимптотичними розподілами напружень і переміщень поблизу краю області контакту [28]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_x &\sim A_1 \sqrt{\frac{r_1}{h}} \left(5 \sin \frac{\vartheta_1}{2} + \sin \frac{3\vartheta_1}{2} \right); \quad \frac{1}{2G} \sigma_y \sim A_1 \sqrt{\frac{r_1}{h}} \left(3 \sin \frac{\vartheta_1}{2} - \sin \frac{3\vartheta_1}{2} \right); \\ \frac{1}{2G} \tau_{xy} &\sim A_1 \sqrt{\frac{r_1}{h}} \left(\cos \frac{\vartheta_1}{2} - \cos \frac{3\vartheta_1}{2} \right); \quad u_x - u_x \Big|_{r_1=0} \sim \frac{2}{3} A_1 \sqrt{\frac{r_1^3}{h}} \left[3 \sin \frac{\vartheta_1}{2} + (7-8\nu) \sin \frac{3\vartheta_1}{2} \right]; \\ u_y &\sim -\frac{2}{3} A_1 \sqrt{\frac{r_1^3}{h}} \left[3 \cos \frac{\vartheta_1}{2} + (5-8\nu) \cos \frac{3\vartheta_1}{2} \right], \quad r_1 \rightarrow 0; \end{aligned}$$

$$x = r_1 \cos \vartheta_1; \quad y = -h + r_1 \sin \vartheta_1 \quad (0 \leq \vartheta_1 \leq \pi); \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_x &\sim -\frac{A_2}{2} \sqrt{\frac{h}{r_2}} \left(3 \sin \frac{\vartheta_2}{2} + \sin \frac{5\vartheta_2}{2} \right); & \frac{1}{2G} \sigma_y &\sim -\frac{A_2}{2} \sqrt{\frac{h}{r_2}} \left(5 \sin \frac{\vartheta_2}{2} - \sin \frac{5\vartheta_2}{2} \right); \\ \frac{1}{2G} \tau_{xy} &\sim \frac{A_2}{2} \sqrt{\frac{h}{r_2}} \left(\cos \frac{\vartheta_2}{2} - \cos \frac{5\vartheta_2}{2} \right); & u_x - u_x|_{r_2=0} &\sim -A_2 \sqrt{hr_2} \left[(5-8\nu) \sin \frac{\vartheta_2}{2} + \sin \frac{3\vartheta_2}{2} \right]; \\ u_y + \delta &\sim -A_2 \sqrt{hr_2} \left[(7-8\nu) \cos \frac{\vartheta_2}{2} + \cos \frac{3\vartheta_2}{2} \right], & r_2 &\rightarrow 0; \end{aligned}$$

$$x = -l + r_2 \cos \vartheta_2; \quad y = h + r_2 \sin \vartheta_2 \quad (-\pi \leq \vartheta_2 \leq 0).$$

Асимптотичні розподіли (3.13) в околах точок зміни крайових умов з обмеженими та необмеженими напруженнями є загальними для різних задач гладкого контакту. Для кожної з таких задач коефіцієнти A_1 , A_2 (або один із них, якщо точка зміни крайових умов одна) визначаються при її розв'язанні, а величина h є характерним розміром задачі.

§4. Випадок безвідривного контакту.

Вважатимемо, що відрив нижньої грані смуги від основи не відбувається. Тоді в (1.3) покладемо $s(x) \equiv 0$, а в (1.9) – $\varphi_1(\eta) \equiv 0$. Замість системи рівнянь (1.10), у якій $L_1(\xi) \equiv 0$, маємо одне інтегральне рівняння

$$L_2(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{-a} k_{22}(\xi - \eta) \varphi_2(\eta) d\eta = f_2(\xi) \quad (-\infty < \xi < -a). \quad (4.1)$$

Як відомо [14], розв'язок інтегрального рівняння (4.1) може бути знайдено у замкненому вигляді методом Вінера – Гопфа. Прослідкуємо за побудовою цього розв'язку за наведеними вище формулами. Серед функцій комплексної змінної із (2.1) $\Phi^+(z) \equiv 0$, $\Psi^-(z) \equiv 0$, а для знаходження двох інших із них маємо функціональне рівняння

$$K_{22}(z) \Phi^-(z) - \Psi^+(z) = F^-(z) \quad (-\infty < \operatorname{Re} z < \infty, \quad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-). \quad (4.2)$$

Згідно з (2.11), де $\tilde{\chi}_2^-(z) \equiv 0$, і (2.13) розв'язком рівняння (4.2) є, зокрема, функція

$$\Phi^-(z) = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{iz} \left(1 - \frac{1}{K_{22}^-(z)} \right), \quad (4.3)$$

через яку за другою рівністю (2.22) визначається розв'язок $\varphi_2(\eta)$ інтегрального рівняння (4.1). При цьому додаткової умови (2.10), або (2.21), яка пов'язана з визначенням функції $\Phi^+(z)$ із (2.8), не виникає, а розмір l є заданим.

Формули (3.3) для контактних напружень та перша із формул (3.10) для нормальних переміщень верхньої грані смуги зберігають свій вигляд, де, згідно з (2.14), (2.15)

$$z_k^+ = 0; \quad z_k^- = f_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.4)$$

При цьому остання з рівностей (3.3) та перша з рівностей (3.10) розповсюджуються на інтервал $-l < x < \infty$. Через те, що $\Psi^-(z) \equiv 0$, $\Phi^+(z) \equiv 0$ і контакт з основою відбувається вздовж усієї нижньої грані смуги, другі з оцінок (3.4), (3.5), а також перші з формул (3.11), (3.12) і розподіли (3.13) при $r_1 \rightarrow 0$ стають несправедливими. З огляду на те, що $\varphi_1(\xi) \equiv 0$, замість (3.9) знаходимо $u_y|_{y=-h} \equiv 0$.

§5. Результати обчислень.

Відстань l між проекцією підшви штампа на основу та областю відриву нижньої грані смуги від основи складає 0,5153 від ширини смуги $2h$.

На рис. 2 зображено розподіли безрозмірних нормальних контактних напружень $\bar{\sigma} = (2Gp_0)^{-1} \sigma_y|_{y=-h}$ ($x < 0$) між нижньою гранню смуги та жорсткою основою (криві 1) і $\tilde{\sigma} = (2Gp_0)^{-1} \sigma_y|_{y=h}$ ($x < -l$) між штампом і верхньою гранню смуги (криві 2).

Суцільні лінії відповідають контакту з відривом, штрихові – безвідривному контакту смуги з основою. Врахування відриву незначно змінює розподіли контактних напружень під штампом як на верхній, так і на нижній грані смуги, але суттєво впливає на їх розподіл на нижній грані смуги поодаль від штампа. Для безвідривного контакту нормальні напруження на нижній грані смуги є напруженнями стиску лише під штампом і на відстані, меншій $l_0 = 1,0234 \cdot 2h$ від проекції краю штампа на основу, а на більшій відстані вони стають напруженнями розтягу. Розмір l для контакту з відривом майже вдвічі менший за розмір l_0 ($l_0/l = 1,988$). Значення $l_0/(2h) = 1,0234$ узгоджується зі значенням $l_0/(2h) \approx 1$ з роботи [32] для скінченного штампа, ширина якого у 5 разів перевищує ширину смуги.

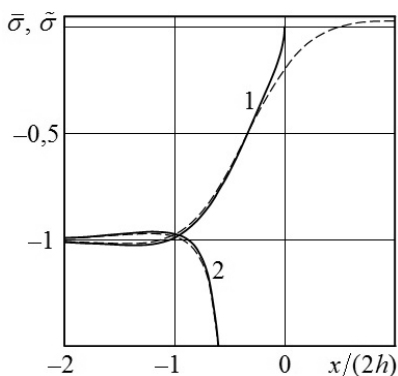


Рис. 2

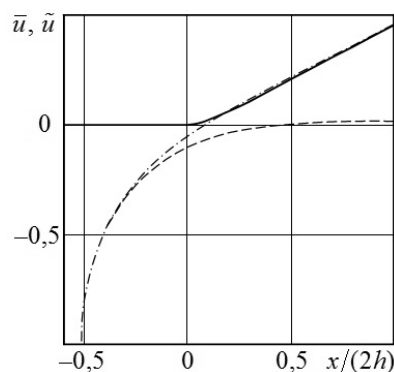


Рис. 3

На рис. 3 показано графіки безрозмірних нормальних переміщень $\bar{u} = \delta^{-1} u_y|_{y=-h}$ (суцільна крива) і $\tilde{u} = \delta^{-1} u_y|_{y=h}$ (штрих-пунктирна крива), які характеризують форму деформованих нижньої та верхньої граней смуги, відповідно. Наведені графіки показують, що звуження смуги, яке під штампом дорівнює δ , поступово зменшується в проміжку між штампом і зоною відриву та фактично зникає в зоні відриву, де смуга майже не деформована, але повернута на кут $A = 0,4891 \delta/(2h)$ відносно основи штампа. При цьому звуженню смуги відповідає різниця ординат точок на суцільній та штрих-пунктирній кривих. Якщо відрив смуги від основи не враховувати, то нормальні переміщення верхньої грані смуги (штрихова крива) при віддаленні від краю штампа плавно спадають до нуля за абсолютною величиною на проміжку, довжиною в ширину смуги, а далі, за цим проміжком, змінюють знак на протилежний. На відстані $1,4 \cdot 2h$ від краю штампа на верхній грані смуги утворюється пагорбок висотою $0,0146 \delta$, яка втричі менша за висоту пагорбка, що розташований на відстані $1,03 \cdot 2h$ від краю штампа, в аналогічній задачі для смуги з жорстко закріпленою нижньою гранню [25].

Висновки.

Із застосуванням методу Вінера – Гопфа знайдено аналітичний розв’язок задачі про контакт із відривом пружної смуги від жорсткої основи під час втискання в смугу напівнескінченного штамп. Розподіли контактних напружень під штампом як на верхній, так і на нижній грані смуги незначно відрізняються від аналогічних розподілів за умови безвідривного контакту смуги з основою. Разом з тим, поведінка напружень і переміщень поодаль від штамп суттєво залежить від того, враховується відрив смуги від основи, чи ні.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто контакт напівнескінченного штамп з пружною смугою, одна із граней якої проковзує без тертя вздовж жорсткої основи. Враховано порушення контакту смуги з основою. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв’язок задачі. Знайдено відстань зони відриву від краю штамп, розподіли контактних напружень та нормальні переміщення граней смуги.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: пружна смуга, напівнескінченний штамп, контакт із відривом, напруження, метод Вінера – Гопфа.

1. Антипов Ю.А. Точное решение задачи о вдавлении кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А.: Физ.-мат. и техн. науки. – 1987. – № 7. – С. 29 – 33.
2. Антипов Ю.А. Отслоившееся включение в случае сцепления и проскальзывания // Прикл. математика и механика. – 1996. – 60, № 4. – С. 669 – 680.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – Москва: Наука, 1974. – 455 с.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
5. Кіппіс О.Л., Острик В.І. Контакт з відривом на півнескінченному проміжку пружної смуги та жорсткої основи // Вісник Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 4. – С. 75 – 78.
6. Манько Н.І.-В., Приварников А.К. Вісесиметрична контактна задача для багатоплощинної основи з невідомою областю контакту // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 1999. – 6. – С. 145 – 152.
7. Манько Н.І.-В., Приварников А.К. Відокремлення пружного шару від багатоплощинної основи під дією нормального навантаження // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2002. – № 1. – С. 49 – 53.
8. Наумов Ю.А., Никифорова В.Д. Об отставании упругого слоя // Прикл. механика. – 1971. – 7, № 11. – С. 33 – 40.
9. Никишин В.С., Шатице Г.С. Контактная задача теории упругости для слоя, локально прижатого к полупространству // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1976. – 29, № 2. – С. 3 – 13.
10. Нобль Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
11. Ободан Н.И., Гук Н.А., Козакова Н.Л. Нелинейное поведение слоя, лежащего на упругом полупространстве // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2016. – 25. – С. 146 – 157.
12. Приварников А.К. О контакте слоя с упругим полупространством // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 4. – С. 163 – 167.
13. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1979. – 560 с.
14. Улітко А.Ф., Острик В.І., Щокотова О.М. Контакт з відривом штамп і пружного клина // Вісник Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2013. – 3. – С. 59 – 62.
15. Cao R., Li L., Li X., Mi C. Of the frictional receding contact between a graded layer and an orthotropic substrate indented by a rigid flat-ended stamp // Mechanics of Materials. – 2021. – 158. – P. 103847.
16. Comez I. Continuous and discontinuous contact problem of a functionally graded layer pressed by a rigid cylindrical punch // Europ. J. Mechanics A / Solids. – 2019. – 73. – P. 437 – 448.
17. Comez I., El-Borgi S., Kahya V., Erdol R. Receding contact problem for two-layer functionally graded media indented by a rigid punch // Acta Mechanica. – 2016. – 227. – P. 2493 – 2504.
18. El-Borgi S., Comez I. A receding frictional contact problem between a graded layer and a homogeneous substrate pressed by a rigid punch // Mechanics of Materials. – 2017. – 114. – P. 201 – 214.
19. Gecit M.R. The axisymmetric double contact problem for a frictionless elastic layer indented by an elastic cylinder // Int. J. Engng. Sci. – 1986. – 24, N 9. – P. 1571 – 1584.
20. Georgiadis H.G. Indentation of an orthotropic layer by a semi-infinite punch // Int. J. Engng. Sci. – 1987. – 25, N 11/12. – P. 1531 – 1534.
21. Filon L.N.G. On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load // Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1903. – 201, N 67. – P. 63 – 155.

22. *Gladwell G.M.L.* On some unbounded contact problems in plane elasticity theory // *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.* – 1976. – **43**. – P. 263 – 267.
23. *Hussain M.A., Pu S.L.* A variational principle for singular integral equations with bounded solutions // *Int. J. Engng. Sci.* – 1973. – **11**. – P. 767 – 781.
24. *Keer L.M., Dundurs J., Tsai K.C.* Problems involving a receding contact between a layer and a half space // *J. Appl. Mech.* – 1972. – **39**. – P. 1115 – 1120.
25. *Klimchuk T.V., Ostriuk V.I.* Frictional contact between an elastic strip and a semi-infinite punch with rounded edge // *Acta Mechanica* – 2017. – **228**, N 10. – P. 3619 – 3631.
26. *Morhunov M.O., Ostryk V.I., Ulitko A.F.* Contact with break-off under bending of an elastic strip with a rigid disk // *J. Math. Sci.* – 2010. – **171**, N 5. – P. 649 – 661.
27. *Ostriuk V.I.* Edge crack opening in an elastic plane with a wedge-like cut in contact with a punch // *Mechanics of Solids.* – **49**, N 2. – 2014. – P. 175 – 186.
28. *Ostryk V.I.* Asymptotic distributions of stresses and displacements near the edge of a contact zone // *J. Math. Sci.* – 2019. – **238**, N 1. – P. 63 – 82.
29. *Ostryk V.I.* Partial opening of semiinfinite crack on the boundary of an elastic strip and a rigid wall // *Materials Sci.* – 2020. – **56**, N 1. – P. 105 – 113.
30. *Pu S.L., Hussain M.A.* Note on the unbonded contact between plates and an elastic half space // *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.* – 1970. – **37**. – P. 859 – 861.
31. *Ratwani M., Erdogan F.* On the plane contact problem for frictionless elastic layer // *Int. J. Solid and Struct.* – 1973. – **43**. – P. 921 – 936.
32. *Smith S.F.* On a flat punch indenting an elastic layer in plane strain // *Quart. J. Math. Oxford.* – 1964. – **15**, N 2. – P. 223 – 237.
33. *Ulitko A.F., Nekislykh K.M., Ostryk V.I.* Wedging of an elastic wedge by a rigid plate under conditions of contact with detaching // *J. Math. Sci.* – 2011. – **176**, N 5. – P. 631 – 645.
34. *Weitsman Y.* On the unbonded contact between plates and an elastic half space // *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.* – 1969. – **36**. – P. 198 – 202.
35. *Weitsman Y.* On foundations that react in compression only // *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.* – 1970. – **37**. – P. 1019 – 1030.

Надійшла 14.08.2023

Затверджена до друку 16.04.2024