

О.Я.Григоренко¹, І.А.Лоза², В.М.Мельник²,
С.О.Сперкач³

**ВПЛИВ ЕЛЕКТРИЧНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ ТА НАПРЯМКУ
ПОЛЯРИЗАЦІЇ П'ЄЗОКЕРАМІКИ НА СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ОСЕСИМЕТРИЧНИХ АКУСТОЕЛЕКТРИЧНИХ ХВИЛЬ
У ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ**

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Несерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com

²Національний транспортний університет,
вул. Омеляновича-Павленка, 1, 01010, Київ, Україна;
e-mail: lozaigor1956@gmail.com, e-mail: melnzema@gmail.com

³Технічний центр НАНУ, вул. Покровська, 13, 04070, Київ, Україна;
e-mail: svetlana@nasu.kiev.ua

Abstract. The propagation of axisymmetric waves in a hollow homogeneous piezoceramic cylinder with different electrical boundary conditions on lateral surfaces is studied based on the linear theory of elasticity and linear electromechanical coupling. The discretely continual analytical numerical approach is proposed to solve the problems of forced wave propagation in piezoceramic hollow cylindrical bodies. The three-dimensional problem of the theory of electroelasticity in the partial derivatives is reduced to the boundary value problems for the system of the ordinary differential equations by presenting components of the elasticity tensor, component of electrical and mechanical displacement vectors, and electrostatic potential by running waves in the axial direction. The one-dimensional problem is solved by a stable method of discrete orthogonalization. The analysis of the effect of boundary conditions and direction of polarization of piezoceramics on the spectral characteristics of the propagation of electroelastic waves in a hollow piezoceramic homogeneous cylinder is carried out.

Key words: wave propagation, axisymmetric problem, piezoelectric hollow cylinder, electrical boundary conditions, direction of polarization, numerical method.

Вступ.

П'єзоелектричні матеріали відносяться до так званих «розумних матеріалів», тобто багатофункціональних матеріалів, які здатні реагувати на подразники різної фізичної природи. Зв'язок між фізичними полями різних типів (електричного та механічного) дає можливість їх використання як перетворювачів енергії для датчиків. А також для інтегрування в структури з різним ступенем пристосовуваності та складності, щоб зробити їх керованими та чутливими до відповідного середовища. Також п'єзоелектричні матеріали використовуються для керування формою, виявлення пошкоджень, послаблення динамічного відгуку, для перетворення енергії вібрацій на корисну електричну енергію та багато іншого [3, 4, 9].

Однією з найбільш поширених форм для конструктивних елементів різноманітних «розумних» пристроїв є п'єзокерамічний циліндр. Наукова актуальність, практичне значення проблеми динамічної поведінки циліндричних п'єзокерамічних тіл та огляд літератури наведено в роботі [5]. В статті виконано дослідження впливу електри-

чних граничних умов та напрямку поляризації п'єзокераміки на спектральні характеристики акустoeлектричних осесиметричних хвиль, що розповсюджуються в порожнистому п'єзокерамічному циліндрі. Складність задачі обумовлює той факт, що в основному для дослідження динамічних характеристик п'єзокерамічного циліндра використовуються чисельні методи. Оскільки точний аналіз даної задачі на основі використання апарату спеціальних функцій можливий лише за умови осьової поляризації п'єзокераміки [7, 8, 10, 13, 14]. Інший підхід для отримання точного розв'язку даної задачі запропоновано в роботах [5, 6]. В основі даного підходу лежить розв'язання розв'язуючих функцій у степеневі ряди. Для випадку отримання розв'язку таким шляхом не має обмежень на напрямок поляризації п'єзокераміки, проте цей спосіб досить не простий у реалізації і у випадку більш складної структури матеріалу, як то неоднорідність (шаруватість чи функціональна градієнтність), виникають певні складнощі. У зв'язку з цим, авторами було запропоновано ефективну чисельно-аналітичну методику для розв'язання даної задачі. Використання методу відокремлення змінних дозволяє від тривимірної задачі електропружності у частинних похідних перейти до крайової задачі на власні значення у звичайних диференціальних рівняннях. Отримана крайова задача розв'язувалась стійким методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з покроковим пошуком. Результати, отримані на основі даної методики, добре узгоджуються з результатами, отриманими як на основі використання апарату спеціальних функцій, так і на основі розв'язання розв'язуючих функцій у степеневі ряди [5, 6].

На основі запропонованої методики було досліджено вплив напрямку поляризації та виду граничних умов на спектральні характеристики п'єзокерамічних порожнистих циліндрів.

1. Постановка задачі та основні рівняння.

Система рівнянь, яка описує дану задачу у циліндричній системі координат r, θ, z , складається з [5,6]:

рівнянь руху

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{1}{r}(T_1 - T_2) + \frac{\partial T_5}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial T_5}{\partial r} + \frac{1}{r}T_5 + \frac{\partial T_3}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad (1)$$

рівнянь вимушеної електростатики діелектриків

$$\frac{\partial D_1}{\partial r} + \frac{1}{r}D_1 + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0; \quad E_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad E_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad (2)$$

співвідношень Коші для випадку малих деформацій

$$S_1 = \frac{\partial u_1}{\partial r}; \quad S_2 = \frac{1}{r}u_1; \quad S_3 = \frac{\partial u_3}{\partial z}; \quad S_5 = \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial z}; \quad (3)$$

матеріальних співвідношень для випадку осьової поляризації п'єзокерамічного матеріалу

$$T_1 = c_{11}S_1 + c_{12}S_2 + c_{13}S_3 - e_{13}E_3; \quad T_2 = c_{12}S_1 + c_{11}S_2 + c_{13}S_3 - e_{13}E_3; \\ T_3 = c_{13}S_1 + c_{13}S_2 + c_{33}S_3 - e_{33}E_3; \quad T_5 = 2c_{55}S_5 - e_{15}E_1; \quad (4)$$

$$D_1 = 2e_{15}S_5 + \varepsilon_{11}E_1; \quad D_3 = e_{13}S_1 + e_{13}S_2 + e_{33}S_3 + \varepsilon_{33}E_3;$$

матеріальних співвідношень для випадку радіальної поляризації п'єзокерамічного матеріалу

$$T_1 = c_{33}S_1 + c_{13}S_2 + c_{13}S_3 - e_{33}E_1; \quad T_2 = c_{13}S_1 + c_{11}S_2 + c_{12}S_3 - e_{13}E_1; \\ T_3 = c_{13}S_1 + c_{12}S_2 + c_{11}S_3 - e_{13}E_1; \quad T_5 = 2c_{55}S_5 - e_{15}E_3; \quad (5)$$

$$D_3 = 2e_{15}S_5 + \varepsilon_{11}E_3; \quad D_1 = e_{33}S_1 + e_{13}S_2 + e_{13}S_3 + \varepsilon_{33}E_1.$$

Тут введені позначення: T_i , S_i , c_{ij} , e_{ij} , ε_{ij} – компоненти тензорів напружень, деформацій, пружних модулів при постійному електричному полі, п'єзомодулів та діелектричних проникностей при постійній деформації, відповідно; u_i , E_i та D_i – компоненти векторів переміщень, напруженості електричного поля та електричної індукції, відповідно; ρ та Φ – густина матеріалу та електростатичний потенціал.

Розв'язуючи систему (1) – (4) відносно компонент розв'язуючого вектора $\mathbf{R} = \{T_1, T_5, \Phi, u_1, u_3, D_1\}$, отримаємо систему

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dr} &= \frac{1}{r} \left(\frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) T_1 + \frac{\partial T_5}{\partial z} - \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left(\frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_1 - \frac{\Delta_3}{rc_{11}} \frac{\partial u_3}{\partial z}; \\ \frac{dT_5}{dr} &= -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{1}{r} T_5 + \frac{\Delta_4}{c_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\Delta_3}{rc_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial z} - \left(\frac{\Delta_5}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_3; \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{e_{15}}{\Delta} T_5 - \frac{c_{55}}{\Delta} D_1; \quad \frac{du_1}{dr} = \frac{1}{c_{11}} T_1 + \frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{c_{12}}{rc_{11}} u_1 + \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial u_3}{\partial z}; \\ \frac{du_3}{dr} &= \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} T_5 - \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{e_{15}}{\Delta} D_1; \quad \frac{dD_1}{dr} = -\frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{\Delta_6}{c_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\Delta_1}{c_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\Delta_4}{c_{11}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{D_1}{r}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут введені позначення

$$\begin{aligned} \Delta &= c_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2; \quad \Delta_1 = e_{13}(c_{11} - c_{12}); \quad \Delta_2 = c_{11}^2 - c_{12}^2; \quad \Delta_3 = c_{13}(c_{11} - c_{12}); \\ \Delta_4 &= c_{13}e_{13} - c_{11}e_{33}; \quad \Delta_5 = c_{13}^2 - c_{11}c_{33}; \quad \Delta_6 = c_{11}e_{33} + e_{13}^2. \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему (1) – (3), (5) відносно компонент розв'язуючого вектора $\mathbf{R} = \{T_1, T_5, \Phi, u_1, u_3, D_1\}$, отримаємо систему

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dr} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) T_1 - \frac{\partial T_5}{\partial z} + \left(\frac{\Delta_3}{r^2 \Delta} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_1 + \frac{1}{r} \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\Delta_1}{\Delta} D_1; \\ \frac{dT_5}{dr} &= -\frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{1}{r} T_5 - \frac{1}{r} \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \left(-\frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_3 + \frac{\Delta_1}{\Delta} k D_1; \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{e_{33}}{\Delta} T_1 + \frac{1}{r} \frac{\Delta_1}{\Delta} u_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{c_{33}}{\Delta} D_1; \quad \frac{du_1}{dr} = \frac{e_{33}}{\Delta} T_1 - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{1}{r} u_1 - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{e_{33}}{\Delta} D_1; \\ \frac{du_3}{dr} &= \frac{1}{c_{55}} T_5 - \frac{e_{15}}{c_{55}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - k u_1; \quad \frac{dD_1}{dr} = -\frac{e_{15}}{c_{55}} \frac{\partial T_5}{\partial z} - \frac{\Delta_5}{c_{55}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_1, \end{aligned} \quad (7)$$

тут введені позначення

$$\begin{aligned} \Delta &= c_{33}e_{33} + e_{33}^2; \quad \Delta_1 = c_{33}e_{13} - c_{13}e_{33}; \quad \Delta_2 = c_{13}e_{33} + e_{13}e_{33}; \\ \Delta_3 &= c_{11}\Delta + e_{13}\Delta_1 - c_{13}\Delta_2; \quad \Delta_4 = c_{12}\Delta + e_{13}\Delta_1 - c_{13}\Delta_2; \quad \Delta_5 = c_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2. \end{aligned}$$

2. Метод розв'язку системи рівнянь.

Компоненти розв'язуючого вектора представимо у вигляді хвиль, що поширюються вздовж поперечної координати. Для осової поляризації –

$$\{T_1, T_5, \Phi, u_1, u_3, D_1\} = \{iT_1(r), T_5(r), \Phi(r), iu_1(r), u_3(r), D_1(r)\} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (8)$$

Для радіальної поляризації –

$$\{T_1, T_5, \Phi, u_1, u_3, D_1\} = \{T_1(r), iT_5(r), \Phi(r), u_1(r), iu_3(r), D_1(r)\} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (9)$$

З урахуванням (8) система (6) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dr} &= \frac{1}{r} \left(\frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) T_1 + kT_5 - \frac{k\Delta_1}{rc_{11}} \Phi + \left(\frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} - \rho\omega^2 \right) u_1 - \frac{k\Delta_3}{rc_{11}} u_3; \\ \frac{dT_5}{dr} &= -\frac{kc_{13}}{c_{11}} T_1 - \frac{1}{r} T_5 - \frac{k^2\Delta_4}{c_{11}} \Phi - \frac{k\Delta_3}{rc_{11}} u_1 - \left(\frac{k^2\Delta_5}{c_{11}} + \rho\omega^2 \right) u_3; \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{e_{15}}{\Delta} T_5 - \frac{c_{55}}{\Delta} D_1; \quad \frac{du_1}{dr} = \frac{1}{c_{11}} T_1 + \frac{ke_{13}}{c_{11}} \Phi - \frac{c_{12}}{rc_{11}} u_1 + \frac{kc_{13}}{c_{11}} u_3; \\ \frac{du_3}{dr} &= \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} T_5 - ku_1 + \frac{e_{15}}{\Delta} D_1; \quad \frac{dD_1}{dr} = -\frac{ke_{13}}{c_{11}} T_1 - \frac{k^2\Delta_6}{c_{11}} \Phi - \frac{k\Delta_1}{c_{11}} \frac{u_1}{r} - \frac{k^2\Delta_4}{c_{11}} u_3 - \frac{D_1}{r}. \end{aligned} \quad (10)$$

З урахуванням (9) система (7) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dr} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) T_1 + kT_5 + \left(\frac{\Delta_3}{r^2\Delta} - \Omega^2 \right) u_1 - \frac{1}{r} \frac{\Delta_4}{\Delta} ku_3 - \frac{1}{r} \frac{\Delta_1}{\Delta} D_1; \\ \frac{dT_5}{dr} &= -\frac{\Delta_2}{\Delta} kT_1 - \frac{1}{r} T_5 - \frac{1}{r} \frac{\Delta_4}{\Delta} ku_1 + \left(\frac{\Delta_3}{\Delta} k^2 - \Omega^2 \right) u_3 + \frac{\Delta_1}{\Delta} kD_1; \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{e_{33}}{\Delta} T_1 + \frac{1}{r} \frac{\Delta_1}{\Delta} u_1 - \frac{\Delta_1}{\Delta} ku_3 - \frac{c_{33}}{\Delta} D_1; \\ \frac{du_1}{dr} &= \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta} T_1 - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{1}{r} u_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta} ku_3 + \frac{e_{33}}{\Delta} D_1; \quad \frac{du_3}{dr} = \frac{1}{c_{55}} T_5 - \frac{e_{15}}{c_{55}} k\Phi - ku_1; \\ \frac{dD_1}{dr} &= \frac{e_{15}}{c_{55}} kT_5 - \frac{\Delta_5}{c_{55}} k^2\Phi - \frac{1}{r} D_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Введемо безрозмірні величини:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}; \quad x = \frac{r - R_0}{h}; \quad \varepsilon = \frac{h}{R_0}; \quad \tilde{x} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x}; \quad \zeta = kh, \quad (12)$$

де h – половина товщини циліндра; ρ – густина матеріалу циліндра; R_0 – радіус серединної поверхні; ε_0 – діелектрична проникність вакууму; $\lambda = 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

В результаті ми прийдемо до крайової задачі у звичайних диференціальних рівняннях виду:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{R}; \quad \mathbf{R} = \{T_1, T_5, \Phi, u_1, u_3, D_1\}. \quad (13)$$

Матриця $\mathbf{A}$ для осової поляризації має вигляд

$$A = \begin{vmatrix} \left(\frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}} - 1 \right) \tilde{x} & \zeta & -\frac{\zeta \Delta_1}{\tilde{c}_{11}} \tilde{x} & \frac{\Delta_2}{\tilde{c}_{11}} \tilde{x}^2 - \Omega^2 & -\frac{\zeta \Delta_3}{\tilde{c}_{11}} \tilde{x} & 0 \\ -\frac{\zeta \tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & -\tilde{x} & -\frac{\zeta^2 \Delta_4}{\tilde{c}_{11}} \tilde{x} & -\frac{\zeta \Delta_3}{\tilde{c}_{11}} \tilde{x} & -\left(\frac{\zeta^2 \Delta_5}{\tilde{c}_{11}} + \Omega^2 \right) & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tilde{c}_{55}}{\Delta} \\ \frac{1}{\tilde{c}_{11}} & 0 & \frac{\zeta \tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}} \tilde{x} & \frac{\zeta \tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{e}_{11}}{\Delta} & 0 & -\zeta & 0 & \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} \\ -\frac{\zeta \tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & 0 & -\frac{\zeta^2 \Delta_6}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{\zeta \Delta_1}{\tilde{c}_{11}} \tilde{x} & -\frac{\zeta^2 \Delta_4}{\tilde{c}_{11}} & -\tilde{x} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Матриця A для радіальної поляризації має вигляд

$$A = \begin{vmatrix} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) \tilde{x} & \zeta & 0 & \frac{\Delta_3}{\Delta} \tilde{x}^2 - \Omega^2 & -\frac{\zeta \Delta_4}{\Delta} \tilde{x} & -\frac{\Delta_1}{\Delta} \tilde{x} \\ -\frac{\zeta \Delta_2}{\Delta} & -\tilde{x} & 0 & -\frac{\zeta \Delta_4}{\Delta} \tilde{x} & \frac{\zeta^2 \Delta_3}{\Delta} - \Omega^2 & \frac{\zeta \Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{\Delta_1}{\Delta} \tilde{x} & -\frac{\zeta \Delta_1}{\Delta} & -\frac{\tilde{c}_{33}}{\Delta} \\ \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta} & 0 & 0 & -\frac{\Delta_1}{\Delta} \tilde{x} & \frac{\zeta \Delta_2}{\Delta} & \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta} \\ 0 & \frac{1}{\tilde{c}_{55}} & -\frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} \zeta & -\zeta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\zeta \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} & -\frac{\zeta^2 \Delta_5}{\tilde{c}_{55}} & 0 & 0 & -\tilde{x} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

На обмежуючих порожнистий циліндр бічних поверхнях будемо розглядати такі граничні умови. Механічні граничні умови: бічні поверхні вільні від механічних навантажень, отже $T_1|_{r=R_0 \pm h} = 0$, $T_3|_{r=R_0 \pm h} = 0$. Електричні граничні умови (будемо розглядати два типи граничних умов):

бічні поверхні вільні від електродів – $D_1|_{r=R_0 \pm h} = 0$;

бічні поверхні вкриті тонкими короткозамкненими електродами – $\Phi|_{r=R_0 \pm h} = 0$.

Для розв'язання крайової задачі (13) було використано метод дискретної ортогоналізації у поєднанні з покроковим пошуком [5, 6].

3. Результати чисельного аналізу.

Розглянемо порожнистий достатньо товстий ($\varepsilon = 0,25$) циліндр із п'єзокераміки PZT 4:

$$c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{12} = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{13} = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$c_{55} = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_{13} = -5,2 \text{ К/м}^2; e_{15} = 12,7 \text{ К/м}^2; e_{33} = 15,1 \text{ К/м}^2;$$

$$\varepsilon_{11} / \varepsilon_0 = 730; \varepsilon_{33} / \varepsilon_0 = 635; \rho_n = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^2.$$

Дослідимо спочатку вплив електричних граничних умов на дисперсійні криві. Розглянемо два типи граничних умов: бічні поверхні вільні від електродів ($D_1|_{r=R_0 \pm h} = 0$) та бічні поверхні вкриті тонкими короткозамкненими електродами ($\Phi|_{r=R_0 \pm h} = 0$). На рис. 1 показано вплив електричних граничних умов на дисперсійні криві акустoeлектричних осесиметричних хвиль у випадку осьової поляризації п'єзокераміки, а на рис. 2 – у випадку радіальної поляризації п'єзокераміки.

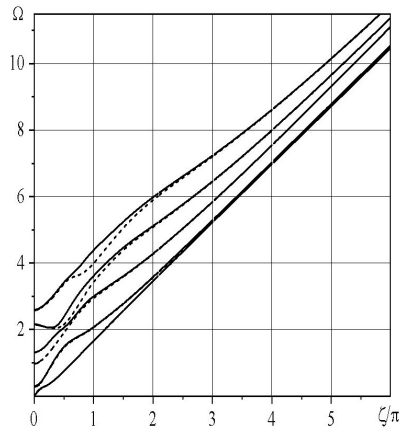


Рис. 1

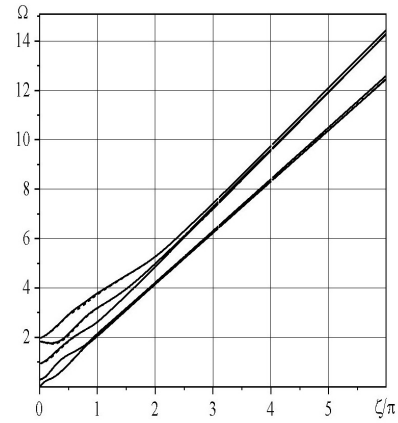


Рис. 2

Суцільними лініями позначено криві для випадку, коли бокові поверхні циліндра неелектродовані, штриховими – коли бокові поверхні циліндра вкриті тонкими закороченими електродами. Як можна помітити з наведених рисунків, вплив електричних граничних умов у випадку, коли має місце осьова поляризація п'єзокераміки дещо більший, ніж у випадку, коли бокові поверхні циліндра вкриті тонкими закороченими електродами. Спільним є те, що відмінності помітні для випадку довгих хвиль. У короткохвильовій області криві практично співпадають.

П'єзокераміка є достатньо цікавим матеріалом з тієї причини, що один і той самий матеріал має різні властивості в залежності від того, чи вектор поширення є колінеарним вектору попередньої поляризації п'єзокераміки (осьова поляризація), чи перпендикулярним (радіальна поляризація). Навіть у випадку поширення хвиль у необмеженому п'єзокерамічному середовищі. Так, так звані Р хвилі (хвилі розширення-стиску)

у випадку осьової поляризації мають швидкість $c_P = \sqrt{\left(c_{55} + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}}\right) / \rho_n} = 1935,51 \text{ м/с}$ у

той час, як у випадку радіальної поляризації мають відповідну швидкість $c_P = \sqrt{c_{55} / \rho_n} = 1377,18 \text{ м/с}$ [11, 12]. Тобто, у випадку радіальної поляризації швидкість хвиль розширення-стиску на 28,8% менша, ніж для випадку осьової поляризації. Так звані SV хвилі (здвигові хвилі) у випадку осьової поляризації мають швидкість $c_{SV} = \sqrt{c_{33} / \rho_n} = 2918,90 \text{ м/с}$ у той час, як у випадку радіальної поляризації мають

відповідну швидкість $c_P = \sqrt{\left(c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}}\right) / \rho_n} = 3394,99 \text{ м/с}$. Тобто, у випадку радіаль-

ної поляризації швидкість хвиль розширення-стиску на 16,3% більша, ніж для випадку осьової поляризації.

Дослідимо тепер вплив напрямку попередньої поляризації п'єзокераміки на спектральні характеристики акустoeлектричних осесиметричних хвиль. Вочевидь на це впливають два фактори: анізотропія та спряжене електричне поле. Дослідимо кожен з

цих факторів окремо. Почнемо з анізотропії. На рис. 3 представлено п'ять перших гілок дисперсійних кривих для п'єзокераміки PZT4. Суцільними лініями позначено дисперсійні криві для випадку осової поляризації, а штриховими – для радіальної поляризації. Спряжене електричне поле при цьому не враховувалось ($e_{ij} = 0$). Як можна помітити з наведеного рисунку вплив анізотропії незначний. Очевидно, що п'єзокераміка PZT4 не є суттєво анізотропним матеріалом, у цьому випадку п'єзокераміка має властивості, притаманні ізотропним пружним матеріалам [12 – 14].

Тепер проведемо дослідження впливу спряженого електричного поля на спектральні характеристики акустoeлектричних осесиметричних хвиль. На рис. 4 представлено п'ять перших гілок дисперсійних кривих для п'єзокераміки PZT4. Розглядався випадок неелектродованих бічних поверхонь ($D_1|_{r=R_0 \pm h} = 0$). Суцільними лініями позначено дисперсійні криві для випадку осової поляризації, а штриховими – для радіальної поляризації. Циліндр при цьому розглядали вільним від електродів. Як ми бачимо, вплив спряженого електричного поля є значно суттєвішим. В області довгих хвиль п'єзокераміка, поляризована в осьовому напрямку, є більш жорсткою (відповідні частоти є більшими) порівняно з п'єзокерамікою, поляризованою в радіальному напрямку. Проте зі зменшенням довжини хвилі п'єзокераміка, поляризована в радіальному напрямку, стає більш жорстким матеріалом. Наприклад, відбувається суттєва відмінність у швидкостях поверхневих хвиль «релеєвського типу», на які виходять дві перші гілки у короткохвильовій області, одна з яких поширюється вздовж внутрішньої поверхні циліндра, а інша – вздовж зовнішньої.

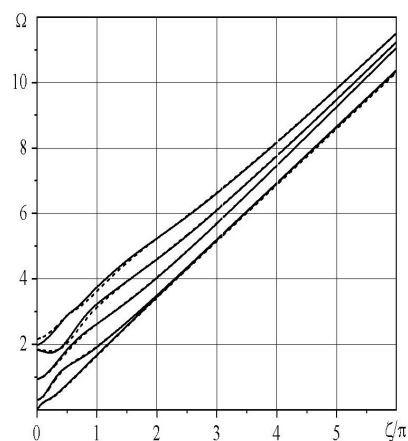


Рис. 3

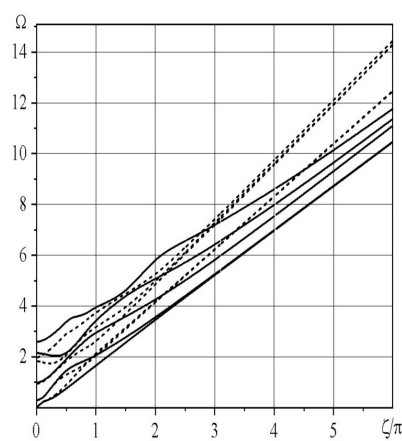


Рис. 4

Так, швидкість поширення поверхневих хвиль «релеєвського типу» для п'єзокераміки PZT4, поляризованої в радіальному напрямку на 22,79% більша, ніж для п'єзокераміки PZT4, поляризованої в осьовому напрямку.

Висновки.

Досліджено поширення вимушених хвиль у однорідних порожнистих п'єзокерамічних циліндричних тілах на основі просторової теорії електропружності. Представлено розв'язуючу систему диференціальних рівнянь у частинних похідних із змінними коефіцієнтами для випадку осової та радіальної поляризації п'єзокераміки. Компоненти тензора напружень, вектора переміщень, електростатичного потенціалу та електричної індукції представлено у вигляді хвиль, що біжать в осьовому напрямку. Тривимірна система розв'язувальних рівнянь зводиться до крайової задачі, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Запропоновано дискретно-континуальний аналітичний чисельний підхід до вирішення задач теорії просторової електропружності процесів поширення хвиль у однорід-

них п'єзокерамічних порожнистих циліндричних тілах. Розв'язано осесиметричну задачу поширення вимушених акустoeлектричних хвиль в осьовому напрямку у випадку осьової та радіальної поляризації для однорідного та неоднорідного суцільного п'єзокерамічного циліндра. Досліджено вплив електричних граничних умов на поверхнях циліндру та вплив напрямку попередньої поляризації п'єзокераміки на спектральні характеристики біжучих хвиль.

РЕЗЮМЕ. Досліджено поширення осесиметричних хвиль у порожнистому однорідному п'єзокерамічному циліндрі з різними електричними граничними умовами на бічних поверхнях на основі лінійної теорії пружності та лінійного електромеханічного зв'язку. Запропоновано дискретно-неперервний аналітичний чисельний підхід до розв'язування задач про поширення хвиль в п'єзокерамічних порожнистих циліндричних тілах. Тривимірна крайова задача електропружності у частинних похідних зводиться до крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь шляхом представлення компонентів пружних тензорів, векторів переміщень і електричної індукції та електростатичного потенціалу у вигляді хвиль біжучих вздовж осьової координати. Одновимірна задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації. Проведено аналіз впливу електричних граничних умов та напрямку поляризації п'єзокераміки на спектральні характеристики поширення електропружних хвиль у порожнистому п'єзокерамічному однорідному циліндрі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: поширення хвиль, осесиметрична задача, п'єзoeлектричний порожнистий циліндр, електричні граничні умови, напрямок поляризації, чисельний метод.

1. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – Москва: Наука. 1966. – 168 с.
2. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка. 1981. – 283 с.
3. *Cheng F.Y., Jiang H., Lou K.* Smart Structures. Innovative Systems for Seismic Response Control. – New York: CRC Press Taylor and Francis Group Boca Raton, 2008. – 652 p.
4. *Erturk A., Inman D.J.* Piezoelectric Energy Harvesting. – Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2011. – 392 p.
5. *Grigorenko A.Ya., Grigorenko Ya.M., Loza I.A.* Numerical Analysis of Dynamical Processes in Inhomogeneous Piezoceramic Cylinders (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 5. – P. 523 – 571.
6. *Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Loza I.A.* Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies. – Berlin: Springer, 2021. – 227 p.
7. *Paul H.S.* Vibrations of Circular Cylindrical Shells of Piezoelectric Silver Iodide Crystals // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1966. – **40**. – P. 1077 – 1080.
8. *Paul H.S.* Torsional vibration of a circular cylinder of piezoelectric β -quartz // *Arch. Mech.* Stosow. – 2010. – **14**. – P. 127.
9. *Preumont A.* Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems. – Netherlands: Springer, 2006. – 207 p.
10. *Puzyrev V.* Elastic waves in piezoceramic cylinders of sector cross-section. // *Int. J. Solids Struct.* – 2010. – **47**. – P. 2115 – 2122.
11. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* On the Evolution of a Plane Harmonic Wave in a Nonlinear Elastic Composite Material Modeled by a Two-Phase Mixture // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 2. – P. 172 – 183.
12. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M., Hryhorchuk O.M., Symchuk Ya.V.* Noncharacteristic Evolution of a Nonlinear Elastic Single Cylindrical Wave // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 6. – P. 619 – 634.
13. *Shatalov M.Y., Every A.G., Yenwong-Fai A.S.* Analysis of non-axisymmetric wave propagation in a homogeneous piezoelectric solid circular cylinder of transversely isotropic material // *Int. J. Solids Struct.* – 2009. – **46**. – P. 837 – 850.
14. *Shatalov M.* Analysis of Axisymmetric and Non-Axisymmetric Wave Propagation in a Homogeneous Piezoelectric Solid Circular Cylinder of Transversely Isotropic Material. In: *Wave Propagation in Materials for Modern Applications* (ed. A. Petrin). – Croatia: Intech., 2010. – P. 335 – 358.

Надійшла 27.06.2023

Затверджена до друку 16.04.2024