

П.З.Луговий¹, В.М.Сіренко²,
К.Е.Котенко¹, М.П.Луговий¹

ДИНАМІКА ТРИШАРОВИХ НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ
ОБОЛОНОК НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ
НАВАНТАЖЕННЯХ

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, м. Київ, Україна; email: plugovyy@inmech.kiev.ua
²Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К.Янгеля»,
вул. Криворізьська, 3, 49008, Дніпро, Україна; e-mail: info@yuzhnoye.com

Abstract. The dynamics of three-layer cylindrical elements with a heterogeneous filler, which rest on an elastic Winkler base under various boundary conditions is studied. In a light filler, the distances between the ribs are much larger than the dimensions of the cross sections of the ribs. Therefore, the theory of independent static and kinematic hypotheses for each layer is applied. According to the Hamilton-Ostrogradsky variational principle, the equations of motion of three-layer cylindrical shells on Winkler's elastic base and natural boundary conditions are obtained using the model of Tymoshenko's theory of shells and rods. This made it possible to create an adequate finite-element model for the three-layer cylindrical shells made of different materials and obtain the numerical results of the nature of the dynamic behavior of a three-layer structure on an elastic foundation using the finite-element method. The influence of the physical and mechanical parameters of the layers on their natural frequencies, the methods of fixing their ends, and the parameter of the elastic base of the shells on their dynamics under the axisymmetric internal impulse loading is studied. The new mechanical phenomena are revealed.

Key words: dynamics, three-layer cylindrical element, inhomogeneous aggregate, Winkler elastic base, natural frequencies, boundary conditions, distributed non-stationary load, finite element method, mechanical phenomena.

Вступ.

На сьогоднішній день досягнуто значних успіхів в області дослідження динамічних процесів в елементах конструкцій канонічної форми (циліндричні, сферичні та конічні оболонки). Проте, не достатньо дослідженими є задачі динамічної взаємодії однорідних та неоднорідних оболонкових структур з пружними середовищами. Дослідженню взаємодії елементів конструкцій з пружними основами присвячена значна кількість публікацій [1 – 3]. В основному розглядаються циліндричні оболонки на основі гіпотез Вінклера [8]. Модель Вінклера – це найбільш проста модель пружного середовища, для опису якої достатньо одного коефіцієнта постілі (пружної основи). Зв'язок між реакцією пружного середовища $\tilde{R}(x, s, t)$ і радіальними переміщеннями точок серединної поверхні оболонки $u_3(x, s, t)$ у випадку моделі Вінклера має вигляд: $\tilde{R}(x, s, t) = C_1 u_3(x, s, t)$, де C_1 – коефіцієнт постілі пружної основи, який характеризує роботу на розтяг – стиск; x, s – основа та колова координата серединної поверхні циліндричної оболонки і t – часова координата.

В літературі є лиш незначна кількість робіт по дослідженню впливу пружного середовища на шаруваті оболонки при нестационарних навантаженнях. В роботі [14] розглянуто вільні коливання тришарової циліндричної кругової оболонки в пружному середовищі Вінклера. Досліджено зміну власних частот коливань залежно від характеристик жорсткості системи оболонка – середовище. В статті [15] гіпотезу Вінклера застосовано до пружного заповнювача. Знайдено аналітичні розв'язки задач власних і вимушених коливань.

Останнім часом з'явилася значна кількість робіт по дослідженню динаміки циліндричних оболонок з функціонально-градуїрованих матеріалів (ФГМ). В статті [16] проведений вібраційний аналіз тришарової циліндричної оболонки, яка спирається на пружну основу Вінклера – Пастернака. Заповнювач виготовлений з ауксетичного матеріалу з негативним коефіцієнтом Пуассона, а два несучі шари – ізотропні. Задача розв'язана за допомогою скінченно-елементного комплексу ABAQUS. Досліджено вплив геометричних параметрів та пружної основи на вібраційну поведінку тришарової циліндричної оболонкової конструкції. В роботі [18] досліджено вплив матеріалів заповнювача, розподілу пористості, товщини функціонально градуїрованого (ФГ) заповнювача, шарів лицьової поверхні та зміни індексу градієнта на власну частоту та динамічний відгук циліндричної оболонки. В статті [19] досліджено вплив пружного середовища на власну частоту ортотропної циліндричної оболонки. В роботі [20] вивчалась статика та вільні коливання шаруватої циліндричної оболонки з ФГ заповнювачем за умови в'язко-пружного з'єднання шарів. Аналітично вивчався вплив твердих пружних поверхонь розділу, різних граничних умов, часу та співвідношення середнього радіуса до товщини на поведінку шаруватої циліндричної оболонки при згині та коливаннях. В статті [22] досліджено коливальні характеристики ФГМ циліндричних оболонок, заповнених рідиною та розміщених на пружних основах Вінклера – Пастернака. Власні частоти як для порожніх, так і для заповнених рідиною ФГ циліндричних оболонок на основі пружних основ визначаються для граничного стану при шарнірному опиранні. Значний вплив на частоти циліндричних оболонок при шарнірному опиранні має рідина. Вплив основи Пастернака більш виражений, ніж модуль Вінклера. В дослідженні [25] розглянуто коливання шаруватих циліндричних оболонок, покритих ФГ покриттями, які опираються на пружну основу Пастернака, враховується комбінований вплив напружень зсуву та інерції обертання. Проаналізовано вплив пружної основи, композитних профілів покриттів, напружень зсуву, обертальної інерції та параметрів геометрії шаруватої оболонки на безрозмірну основну частоту.

Вимоги по міцності і вазі, що пред'являються до сучасних конструкцій, неперервно підвищуються, а умови експлуатації виробу стають все більш жорсткими. Необхідність одночасного виконання цілого ряду, часом суперечливих, вимог призводить до ідеї розробки багатошарових конструкцій, в яких кожен шар виконує тільки одну або краще кілька функцій. При цьому шари можуть відрізнятися як по товщині, так і за фізико-механічними властивостями, тобто пакет може бути істотно неоднорідний.

При значній відмінності фізико-механічних параметрів шарів доцільно застосовувати теорію оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного з шарів [11]. В результаті використання легкого заповнювача утворюється спеціальна тришарова структура з досить великою жорсткістю на згин при вигідному співвідношенні міцності і ваги. У даній роботі розглянуто відповідальний елемент у вигляді тришарової циліндричної оболонки симетричної структури з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при різних граничних умовах і нестационарному навантаженні. Армуючі елементи розташовані на відстанях, які значно перевищують розміри поперечних перетинів армуючих ребер. Властивості матеріалів суміжних шарів досить різні, тому для розрахунків таких оболонкових структур доцільно застосовувати метод скінченних елементів. Дослідження динамічних процесів в таких складних тришарових структурах при значному діапазоні їх геометричних і фізичних параметрів представляє значний інтерес для конструкторських розробок.

§1. Постановка задачі.

Тришаровий циліндричний елемент з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, який знаходиться в безінерційному пружному середовищі і являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішньої (індекс 1), зовнішньої (індекс 2) несучих оболонок, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), жорстко з'єднаних з зазначеними несучими оболонками. Елемент має постійну загальну товщину h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній системі координат x, z . Координатна лінія x на серединній поверхні оболонки при $z = 0$ збігається з осью лінійною; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединної поверхні. Будемо вважати величину z додатною, якщо точка знаходиться з боку опуклості серединної поверхні (рис. 1). Параметри першої квадратичної форми і кривизни серединної поверхні оболонок: $A_1 = 1$; $A_2 = R$; $k_1 = 0$; $k_2 = 1/R$.

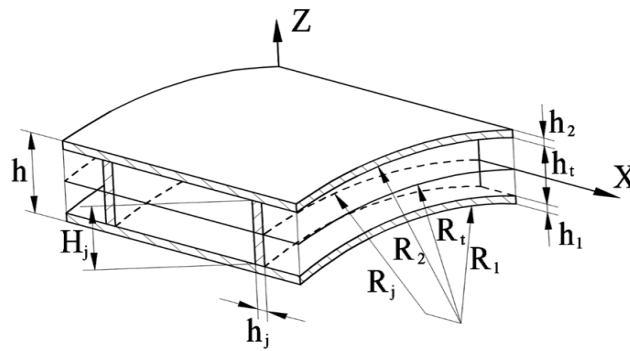


Рис. 1

Наявність легкого пружного матеріалу в порожнинах між ребрами і несучими оболонками створює дискретну неоднорідність ребристого заповнювача. Напружено-деформований стан внутрішньої і зовнішньої несучих оболонок може бути визначений через компоненти узагальненого вектору переміщень $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$ [10]. Поля переміщень для легкого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщень $\bar{U}_t = (u_{1t}, u_{3t}, \varphi_{1t})^T$ згідно моделі, розробленої в роботі [12]. Деформований стан армуючих ребер, спрямованих вздовж колової координати, будемо визначати узагальненим вектором переміщень $\bar{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$.

Вирази для переміщень і деформаційні співвідношення для несучих шарів, жорсткого з'єднання армуючих ребер з циліндричними несучими шарами і умови міжшарової неперервності переміщень наведено в роботі [17].

Рівняння руху для несучих шарів, ребер, легкого заповнювача і навколишнього середовища виводяться згідно варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського, згідно якого:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (1.1)$$

де Π – повна потенціальна енергія пружної системи і пружного середовища Вінклера; K – повна кінетична енергія пружної системи; A – робота зовнішніх сил; t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу. При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих оболонок і заповнювача з легкого матеріалу, а також армуючих ребер жорсткості і пружного середовища.

Вирази для $\delta \Pi$ і δK записуються наступним чином:

$$\delta\Pi = \delta\sum_{i=1}^2\Pi^i + \delta\sum_{j=1}^J\Pi^j + \delta\sum_{S_i}\Pi^t + \delta\Pi^f; \quad \delta K = \delta\sum_{i=1}^2K^i + \delta\sum_{j=1}^JK^j + \delta\sum_{S_i}K^t, \quad (1.2)$$

де $\delta\Pi^f$ потенціальна енергія пружного середовища Вінклера

$$\delta\Pi^f = \int_{S_2} \left[C_1 u_3^2 \delta u_3^2 \right] dS_2. \quad (1.3)$$

Після стандартних перетворень у варіаційному рівнянні (1.1), з урахуванням співвідношень (1.2), (1.3), отримаємо дві системи гіперболічних рівнянь руху дев'ятого порядку для тришарового циліндричного елемента з легким ребристим заповнювачем, який знаходиться в пружному середовищі з параметром C_1 при осесиметричному імпульсному навантаженні і відповідні природні граничні та початкові умови.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^i}{\partial x} - \frac{T_{13}^t}{R_i} &= \left(\rho_i h_i + \frac{\rho_i h_i}{3} \right) \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}^i}{\partial x} - \frac{T_{22}^i}{R_i} - \frac{1}{R_i h_i} M_{11}^t + \frac{1}{h_i} \frac{\partial M_{13}^t}{\partial x} - C_1 u_3^2 \delta_{2i} + \left(1 + \frac{h_i}{2R_i} \right) P \delta_{li} &= \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}^i}{\partial x} - T_{13}^i + \frac{2h_i}{h_i^2} M_{13}^t &= \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2}; \quad (i = 1, 2) \\ \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} + \frac{1}{R_t} T_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{11}^t}{\partial x} - T_{13}^t = \rho_t \frac{\rho_t^3}{12} \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial T_{13}^t}{\partial x} = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_3^t}{\partial t^2}; \\ \left[T_{11}^{i\pm} \right]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}^1}{\partial t^2}; \quad \left[T_{13}^{i\pm} \right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}^1}{\partial t^2}; \quad \left[M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm} \right]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ці системи рівнянь утворюються за рахунок врахування розривних коефіцієнтів «несучі оболонки – армуючі ребра», δ_{ij} – символ Кронекера.

На лініях розривів в рівняннях коливань (1.4) величини $\left[T_{11}^{i\pm} \right]_j$; $\left[T_{13}^{i\pm} \right]_j$; $\left[M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm} \right]_j$ ($i = 1, 2$; $j = \overline{1, J}$) відповідають зусиллям і моментам, які діють на j -й дискретний елемент з боку несучих оболонок.

В п'ятому рівнянні системи (1.4) доданок $C_1 u_3^2$ означає дію пружної основи Вінклера на зовнішню несучу оболонку тришарової циліндричної структури.

Вважатимемо, що тришарова циліндрична структура навантажена внутрішнім осесиметричним розподіленим нестационарним нормальним навантаженням $P_1(x, t)$, де x і t – просторова і часова координати.

Вирази для зусиль і моментів для несучих оболонок і легкого заповнювача наведено в статті [17].

Рівняння (1.4) доповнюються граничними і початковими умовами.

§2. Чисельні результати.

Розв'язана задача динамічного деформування тришарового циліндричного елемента на пружній основі Вінклера при нестационарному навантаженні.

Проведено дослідження дії внутрішнього імпульсу тиску

$$P_1(x, t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)], \quad (2.1)$$

де A – амплітуда навантаження; T – тривалість імпульсу навантаження; $T = R/c$ (c – швидкість поздовжніх хвиль в металі несучих оболонок); $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

Розглянуто задачу динамічного деформування тришарового циліндричного елемента на пружній основі Вінклера з наступними граничними умовами і їх комбінацій:

граничні умови для жорстко зацмєлених торців при $x = x_0$, $x = x_N$, для несучих оболонок мають вигляд:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0, \quad (i = 1, 2); \quad (2.2)$$

граничні умови для шарнірного опираання:

$$u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0; \quad (2.3)$$

початкові умови для всіх випадків нульові для несучих оболонок при $t = 0$:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (2.4)$$

Відповідна початково-крайова задача (1.4), (2.1) – (2.4) розв’язується за допомогою скінченно-елементного методу. Створена адекватна скінченно-елементна модель тришарової циліндричної оболонки, яка складається із зовнішнього несучого шару, внутрішнього несучого шару, армуючих ребер і легкого заповнювача. Модель відображає взаємозв’язок потенціальної енергії деформацій в тілі з потенціалом прикладених сил відповідно системі рівнянь (1.4). Загальний вигляд моделі тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера зображений на рис. 2.

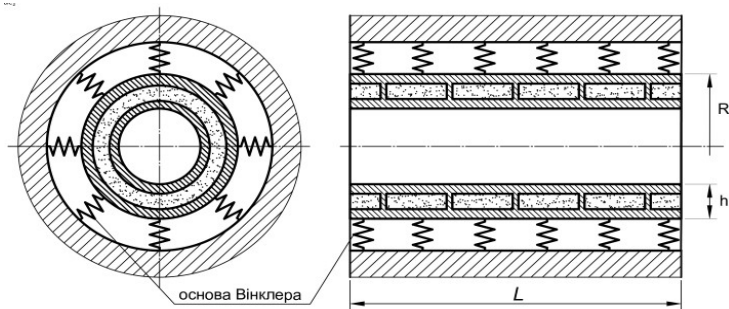


Рис. 2

Скінченно-елементна модель створювалася за використанням тривимірного об’ємного скінченного елемента типу Solid, який по деформативним якостям звуження і викривлення, та іншим показникам відповідав вимогам забезпечення розрахункової сітки на скінченно-елементному рівні [9]. У варіанті тришарової циліндричної структури без полімерного заповнювача кількість скінченних елементів складала у внутрішній несучій оболонці 9600 елементів, зовнішній – 9600, а в армуючих ребрах – 1200. Кількість скінченних елементів легкого заповнювача (пінопласту) дорівнювала 8400. Загальна кількість скінченних елементів у моделі без пінопласту складала 20400 елементів і 27280 вузлів. А при наявності пінопласту такі дані дорівнюють: 28800 елементів і 32400 вузлів. Пружна основа моделювалась у рамках гіпотези Вінклера установкою скінченних елементів типу Spring, розташованих по довжині оболонки. Ці елементи дозволили створити пружні сполучення між вузлами скінченно-елементної сітки з жорсткістю в залежності від значень параметра Вінклера C_1 при їхньому переміщенні по заданих ступенях свободи. Загальна кількість таких елементів в скінченно-елементній моделі складала 3240.

При такій розбивці скінченно-елементної моделі на елементи і вузли забезпечується практична збіжність результатів розрахунків [9].

Створена скінченно-елементна модель оболонки відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій в тришаровій структурі з енергією мас та доданих інерційних сил згідно принципу Д'аламбера:

$$\Pi = E - W, \quad (2.5)$$

де E – потенціальна енергія деформацій тришарової циліндричної оболонки і основи Вінклера, а W – потенціал прикладених сил.

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (2.5) матиме наступний вигляд:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)}. \quad (2.6)$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.7)$$

записуються наступним чином:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; \quad \{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}.$$

Розглянуто симетричний тришаровий циліндричний елемент на пружній основі Вінклера з дискретно-симетричним легким заповнювачем, армованим ребрами жорсткості.

В цьому випадку несучі оболонки мають однакову товщину і виготовлені з однакових матеріалів. Дослідження напружено-деформованого стану зазначеного тришарового елемента розглянуто при наступних геометричних і фізико-механічних параметрах: $L/h_1 = 200$; $h_1 = h_2 = 0,002$ м; $R = 0,1$ м; $h/R = 0,4$; $H_j/h_1 = 18$; $F_j = 3,6 \cdot 10^{-4}$ м²; $E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,33$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $C_1 = 1 \cdot 10^8$ Н/м³; $C_1 = 1 \cdot 10^9$ Н/м³.

Згідно наведених даних симетричний тришаровий циліндричний елемент виготовлений з сплаву АМГ-6.

Задача розв'язана методом скінченних елементів, хід якого наведений вище.

Отримані числові результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану симетричної тришарової пружної структури циліндричного типу на пружній основі Вінклера в будь який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \leq t \leq 40T$).

На рис. 3, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^8$ Н/м³) від поздовжньої координати x . Торці оболонки жорстко защемлені. Тут і в подальших графіках крива 1 відповідає величині u_3^1 внутрішньої несучої оболонки симетричного циліндричного елемента, а крива 2 – величині u_3^2 зовнішньої несучої оболонки симетричної циліндричної структури в момент часу $t = 4,8T$ (час досягнення максимального значення величин u_3^1 (1) і u_3^2 (2)). Легкий заповнювач відсутній. Для порівняння на цих же графіках для пружної основи Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^9$ Н/м³) відповідні криві зображені пунктирною лінією при $t = 4,8T$.

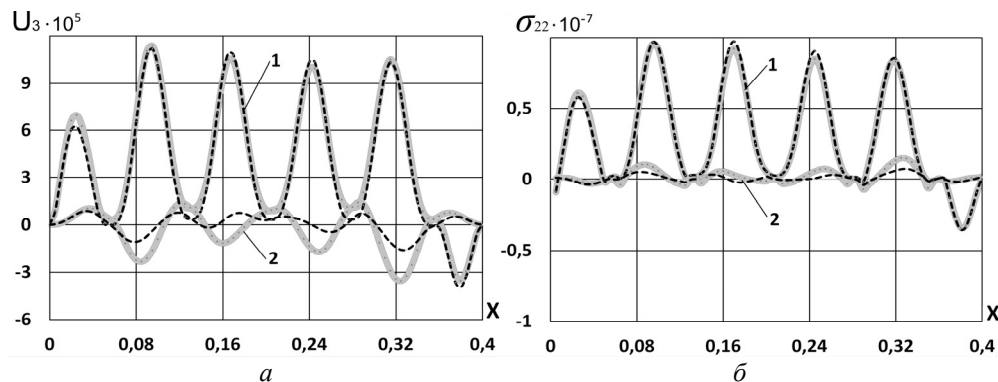


Рис. 3

На рис. 3, б показано залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок на пружній основі Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$) від координати x . Тут і в подальших графіках крива 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішньої несучої симетричної циліндричної оболонки, а крива 2 – величині σ_{22}^2 зовнішньої несучої симетричної циліндричної оболонки в момент часу $t = 4,8T$ (час досягнення максимального значення величин σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2)). Легкий заповнювач відсутній. Для порівняння на цих же графіках для пружної основи Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$) відповідні криві зображені пунктирною лінією при $t = 4,8T$.

В табл. 1 наведено перші п'ять власних частот в залежності від значень параметра Вінклера C_1 при жорсткому защемленні торців тришарової циліндричної оболонки без пінопласту.

Таблиця 1

C_1	Ω , Гц				
0	1841,684	3501,007	3943,935	4376,332	5008,519
$1 \cdot 10^8$	1874,789	3516,459	3958,706	4377,149	5017,519
$1 \cdot 10^9$	2145,852	3649,621	4086,997	4383,748	5095,277

Аналіз графіків показує, що тут і в подальших випадках порівнюються величини максимальних нормальних прогинів u_3^1 при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$, які практично співпадають з аналогічними величинами при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$, а для u_3^2 при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ в 2,5 рази менші, ніж при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$. Перші власні частоти при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ на 2% більші, ніж в оболонки без пружної основи, а при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ на 17% більші, ніж в оболонки без пружної основи.

На графіках рис. 4, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ – суцільна лінія при $t = 4,3T$; $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ – пунктирна лінія при $t = 4,8T$) від поздовжньої координати x . Торці оболонки жорстко защемлені. Пінопласт $E_1^1/E_1^t = 50$.

На рис. 4, б показано відповідні залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів циліндричної структури від координати x .

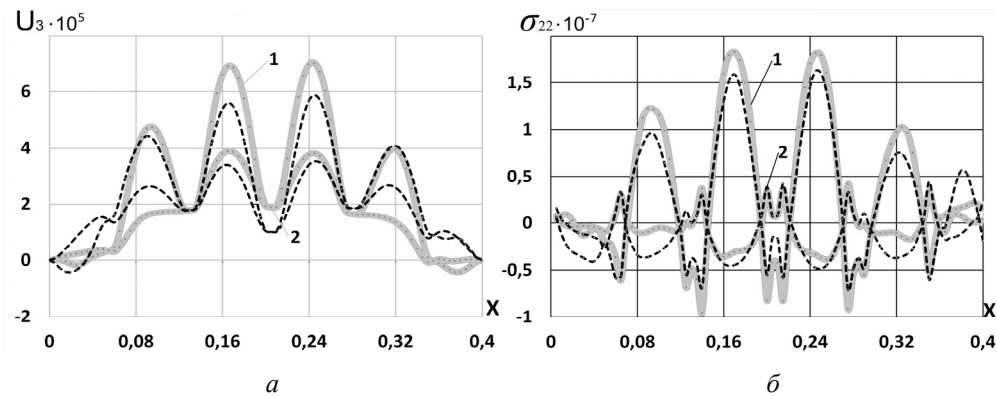


Рис. 4

В табл. 2 приведені перші п'ять власних частот в залежності від значень параметра Вінклера C_1 при жорсткому защемленні торців тришарової циліндричної оболонки. Пінопласт $E_1^1/E_1^t = 50$.

Таблиця 2

C_1	Ω , Гц				
0	2107,741	4027,234	4616,565	4812,985	5893,552
$1 \cdot 10^8$	2135,816	4039,956	4630,913	4813,586	5903,477
$1 \cdot 10^9$	2372,428	4151,64	4757,461	4818,805	5991,165

В даному випадку величини максимальних нормальних прогинів u_3^1 при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ на 20% менші за аналогічні величини при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$, а для u_3^2 при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ в 2 рази менші, ніж при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$. Перші власні частоти при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ на 1,5% більші, ніж в оболонки без пружної основи, а при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ на 12,5% більші, ніж в оболонки без пружної основи.

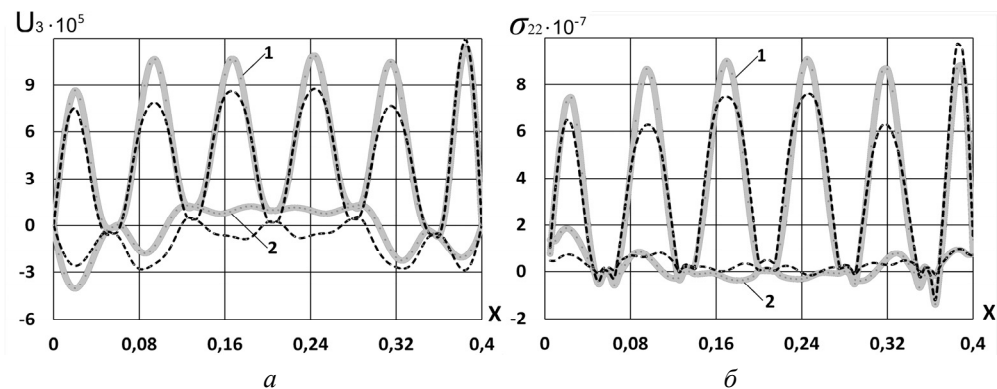


Рис. 5

На рис. 5, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ – суцільна лінія при $t = 4,75T$; $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ – пунктирна лінія при $t = 4,6T$) від поздовжньої координати x . Торці оболонки шарнірно оперті без пінопласту, при $t = 4,6T$.

На рис. 5, б показано відповідні залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x .

В табл. 3 наведено перші п'ять власних частот в залежності від значень параметра Вінклера C_1 при шарнірно опертих торцях без пінопласту.

Таблиця 3

C_1	$\Omega, \text{Гц}$				
0	1703,096	3310,181	3501,399	3905,674	4603,395
$1 \cdot 10^8$	1738,591	3326,553	3501,659	3920,334	4612,494
$1 \cdot 10^9$	2026,75	3467,863	3503,956	4047,841	4691,154

З графіків випливає, що величини максимальних нормальних прогинів u_3^1 при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ на 37% менші за аналогічні величини при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$, а для u_3^2 при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ на 20% більші, ніж при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$. Перші власні частоти при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ на 2% більші, ніж в оболонки без пружної основи, а при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ на 19% більші, ніж в оболонки без пружної основи.

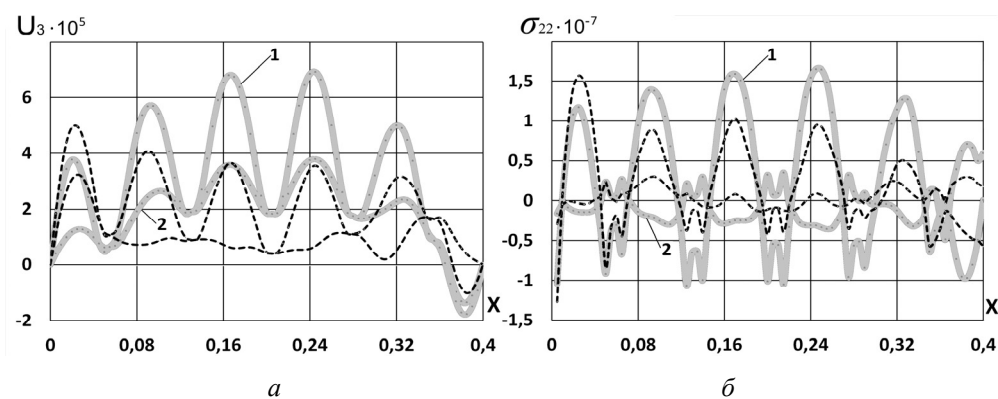


Рис. 6

На рис. 6, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ – суцільна лінія при $t = 4,3T$; $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ – пунктирна лінія при $t = 4,758T$) від поздовжньої координати x . Торці оболонки шарнірно оперті, пінопласт $E_1^1/E_1^t = 50$ при $t = 4,3T$.

На рис. 6, б показано відповідні залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x .

В табл. 4 приведені перші п'ять власних частот в залежності від значень параметрів Вінклера при шарнірно опертих торцях. Пінопласт $E_1^1/E_1^t = 50$.

Таблиця 4

C_1	$\Omega, \text{Гц}$				
0	2206,926	4276,453	4716,843	6072,317	6205,657
$1 \cdot 10^8$	2233,913	4289,592	4730,95	6080,627	6215,72
$1 \cdot 10^9$	2462,49	4405,532	4855,539	6154,562	6305,179

Наявність пінопласту показує, що величини максимальних нормальних прогинів u_3^1 при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ в 1,5 рази менші за аналогічні величини при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$, а для u_3^2 при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ на 48% менші, ніж при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$. Перші власні частоти при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ на 1,2% більші, ніж в оболонки без пружної основи, а при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ на 11,5% більші, ніж в оболонки без пружної основи.

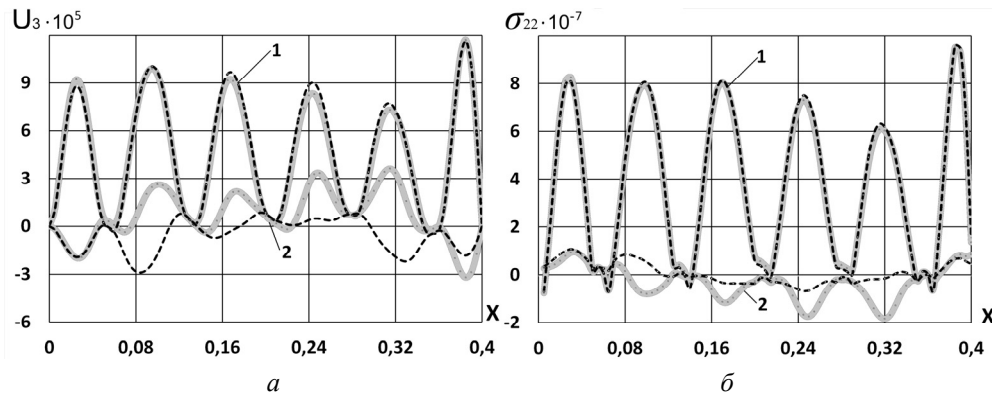


Рис. 7

На графіках рис. 7, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ – суцільна лінія при $t = 4,65T$; $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ – пунктирна лінія при $t = 4,65T$) від позовдовжньої координати x . Верхній торець тришарової оболонки шарнірно опертий $u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0$ ($i = 1, 2$); нижній – жорстко защемлений $u_1^i = u_3^i = \phi_1^i = 0$ ($i = 1, 2$), без пінопласту при $t = 4,65T$.

На рис. 7, б показано відповідні залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x .

В табл. 5 приведені перші п'ять власних частот в залежності від значень параметра Вінклера. Верхній торець тришарової оболонки шарнірно опертий $u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0$ ($i = 1, 2$), а нижній – жорстко защемлений $u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0$ ($i = 2$), без пінопласту при $t = 4,65T$.

Таблиця 5

C_1	Ω , Гц				
0	1616,238	2251,753	3253,683	3837,233	3901,847
$1 \cdot 10^8$	1652,572	2251,989	3268,18	3852,189	3902,001
$1 \cdot 10^9$	1944,419	2253,953	3389,808	3903,337	3981,998

При такому закріпленні торців величини максимальних нормальних прогинів u_3^1 при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ практично співпадають з аналогічними величинами при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$, а для u_3^2 при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ в 2 рази менші, ніж при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$. Перші власні частоти при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ на 2% більші, ніж в оболонки без пружної основи, а при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ на 20% більші, ніж в оболонки без пружної основи.

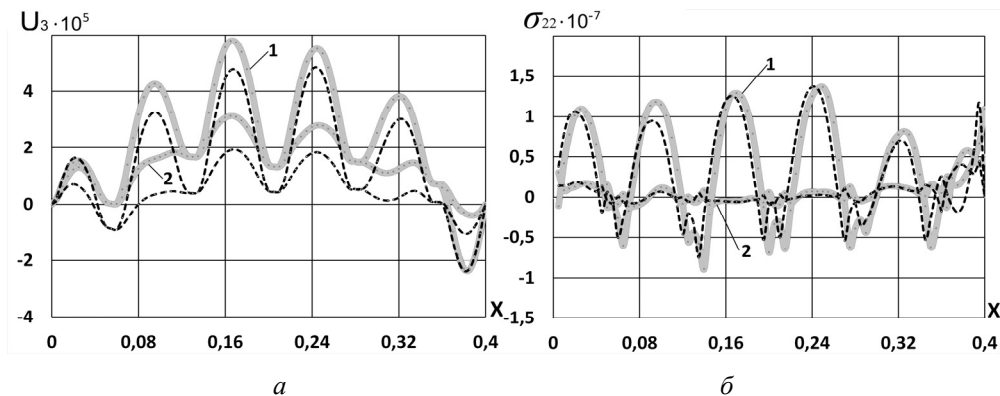


Рис. 8

На графіках рис. 8, а показано залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 (1) і u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок симетричної тришарової циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера ($C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ – суцільна лінія при $t = 4,65T$, $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ – пунктирна лінія при $t = 4,65T$) від поздовжньої координати x . Верхній торець тришарової оболонки шарнірно опертий $u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0$ ($i = 1, 2$), а нижній – жорстко защемлений $u_1^t = u_3^t = \phi_1^t = 0$ ($t = 1, 2$), пінопласт $E_1^1/E_1^t = 50$.

На рис. 8, б показано відповідні залежності максимальних величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих оболонок від координати x .

В табл. 6 приведені перші п'ять власних частот в залежності від значень параметра Вінклера C_1 . Верхній торець тришарової оболонки шарнірно опертий $u_1^i = u_3^i = M_{11}^i = 0$ ($i = 1, 2$), а нижній – жорстко защемлений $u_1^t = u_3^t = \phi_1^t = 0$ ($t = 1, 2$), пінопласт $E_1^1/E_1^t = 50$.

Таблиця 6

C_1	Ω , Гц				
0	1855,547	2461,253	3902,218	4355,632	4477,051
$1 \cdot 10^8$	1886,09	2461,476	3914,254	4355,712	4491,393
$1 \cdot 10^9$	2139,569	2463,429	4017,491	4356,42	4610,051

Для такого випадку величини максимальних нормальних прогинів u_3^1 при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ на 20% менші в порівнянні з аналогічними величинами при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$, а для u_3^2 при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ на 65% менші, ніж при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$. Перші власні частоти при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ на 2% більші, ніж в оболонки без пружної основи, а при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ на 15% більші, ніж в оболонки без пружної основи.

Висновки.

Результати досліджень вказують на важливість врахування умов задачі: закріплення торців, наявності пінопласту та величини пружної основи при аналізі динамічних процесів в тришарових циліндричних оболонках. Наприклад: при $C_1 = 1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^3$ перші власні частоти тришарової оболонки без пінопласту з жорстко защемленими торцями на 5,88% більші від оболонки з шарнірно опертими торцями і на 10,36% більші від

оболонки, у якій верхній торець оболонки шарнірно опертий, а нижній – жорстко зашкелений. наявність пінопласту змінює характер залежності перших власних частот тришарових циліндричних оболонок: так максимальна перша власна частота тришарової оболонки з шарнірно опертими торцями стає на 3,8% більшою від першої власної частоти оболонки з жорстко зашкеленими торцями і на 15,1% більшою від першої власної частоти оболонки, у якій верхній торець оболонки шарнірно опертий, а нижній – жорстко зашкелений. Подальші розрахунки при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$ зберігають подібну тенденцію залежності перших власних частот тришарових циліндричних оболонок. Отримані дані розрахунків можуть бути використані для проектування нових тришарових елементів конструкцій сучасної техніки та оцінки їх частотних характеристик. Дослідження динамічних процесів в таких складних тришарових структурах при значній зміні їх геометричних і фізичних параметрів представляє значний інтерес для конструкторських розробок.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено динаміку тришарових циліндричних елементів з неоднорідним заповнювачем, які спираються на пружну основу Вінклера за різних граничних умов. У легкому заповнювачі відстані між ребрами значно більші за розміри поперечних перерізів ребер. Тому застосовано теорію незалежних статичних і кінематичних гіпотез для кожного шару. Відповідно до варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, отримано рівняння руху тришарових циліндричних оболонок на пружній основі Вінклера і природні граничні умови з використанням моделі теорії оболонок і стержнів Тимошенка. Це дозволило створити адекватну скінченно-елементну модель для тришарових циліндричних оболонок, які виготовлені з різних матеріалів, і отримати чисельні результати характеру динамічної поведінки тришарової конструкції на пружній основі методом скінченних елементів. Досліджено вплив фізико-механічних параметрів шарів циліндричних конструкцій на власні частоти, способів закріплення їх торців, параметра пружної основи оболонок на їх динаміку при осесиметричному внутрішньому імпульсному навантаженні. виявлено нові механічні ефекти.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динаміка, тришаровий циліндричний елемент, неоднорідний заповнювач, пружна основа Вінклера, власні частоти, граничні умови, розподілене нестационарне навантаження, метод скінченних елементів, механічні явища.

1. Головка К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках (ред. А.Н. Гузь). – Киев: Изд.-полигр. центр «Киевский университет», 2012. – 541 с.
2. Кравец В.Г., Луговой П.З., Прокопенко Н.Я. Влияние подкрепления и упругого основания на колебания прямоугольных в плане пологих ребристых цилиндрических оболочек // Вісник НТУУ (КПІ), Серія «Гірництво». – 2011. – **20**. – С. 20 – 26.
3. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Динаміка конструктивно-неоднорідних структур (ред. О.М. Гузь). – Київ: Видавництво Ліра, 2022. – 326 с.
4. Мейш Ю.А. Динамическое поведение дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек на упругом основании при нестационарной нагрузке // Збірник наук. праць Дніпродзержинського держ. техн. ун-ту: тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки». – 2013. – **2**, № 22. – С. 105 – 110.
5. Мейш Ю.А. Колебания циліндричних дискретно підкріплених оболонок на пружній основі при нестационарных навантаженнях // Вісник Нац. транспортного ун-ту: Ч. 2. – 2012. – **26**. – С. 578 – 583.
6. Мейш Ю.А. Вимушені коливання поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі при нестационарных навантаженнях // Вісник Нац. транспортного ун-ту. – 2016. – № 1. – С. 267 – 274.
7. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – Москва: Госстройиздат. 1954. – 56 с.
8. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. – Киев: Сталь, 2002 – 597 с.

9. Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. – Москва: ДМК Пресс, 2013. – 784 с.
10. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
11. Успехи механики: (ред. А.Н. Гузь): в 6-ти томах. В кн.: Т.3. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. – Киев: «А.С.К.», 2007. – С. 141 – 175.
12. Frostig Y., Thomsen O.T. Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**. – P. 1697 – 1724.
13. Kheirikhah M.M., Khalili S.M.R., Malekzadeh Fard K. Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory // European J. of Mechanics A/Solids. – 2011. – **31** – P. 54 – 66.
14. Kuznetsova E.L., Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium // Mechanics of Solids. – 2015. – **50**, N 3. – P. 359 – 366.
15. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core under Local Loads // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 359 – 367.
16. Li B., Fu T. Analysis of vibration characteristics of auxetic sandwich cylindrical shells resting on elastic foundation // J. of Sandwich Struct. and Materials – 2022. – **24**, N 5. – P. 1865 – 1882.
17. Lugovyi P.Z., Gaidaichuk V.V., Skosarenko Yu.V., Kotenko K.E. Stress-Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core Under Nonstationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 4 – P. 395 – 404.
18. Meish V.F., Shantsel S E. Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 12. – P. 1501 – 1507.
19. Mouthanna A. Bakhy Sadeq H. Al-Waily M. Analytical Study of Free Vibration Characteristics For Sandwich Cylindrical Shell With Single Phase Metal Core // Engng. and Technology J. – 2023. – **41**, N 3. – P. 1010 – 1025.
20. Paliwad D.N., Singh S. Free Vibrations of Orthotropic Cylindrical Shell on Elastic Foundation // AIAA J. – 2012. – **37**, N 9. – P. 1135 – 1139.
21. Parand A., Alibeigloo A. Static and vibration analysis of sandwich cylindrical shell with functionally graded core and viscoelastic interface using DQM // Composites Part B: Engineering. – 2017. – **126**. – 1 – 16.
22. Rosen A., Singer J. Vibrations and Buckling of Axially Loaded Stiffened Cylindrical Shells with Elastic Restraints // Int. J. Solid Struct. – 1976. – **12**, N 8. – P. 577 – 588.
23. Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Arshad S. Vibrational Study of Fluid-Filled Functionally Graded Cylindrical Shells Resting on Elastic Foundations // Int. Scholarly Research Notices. – 2011. – **2011**. – P. 1 – 13.
24. Skosarenko Yu.V. Free Vibrations of a Ribbed Cylindrical Shell Interacting with Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 575 – 581.
25. Skosarenko Yu.V. The Stress-Strain State of a Ribbed Cylindrical Shell Interacting Elastic Foundation under Short – Term Loads // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 92 – 102.
26. Sofiyev A.H., Hui D., Najafov A.M., Turkaslan S., Dorofeyevskaya N., Yuan G.Q. Influences of shear stresses and rotary inertia on the vibration of functionally graded coated sandwich cylindrical shells resting on the Pasternak elastic foundation // J. of Sandwich Struct. and Materials. – 2015. – **17**. N 6. – P. 691 – 720.

Надійшла 31.10.2023

Затверджена до друку 16.04.2024