

С.Ю.Бабич, Ю.П.Глухов

РЕАКЦІЯ СТИСЛИВОГО ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО ПІВПРОСТОРУ ІЗ ЗАХИСНИМ ПОКРИТТЯМ НА РУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: gluchov.uriy@gmail.com*

Abstract. A prestressed incompressible half-space with inhomogeneity in the form of a thin surface layer is considered. The concentrated force moves along the free surface of the protective layer at a constant speed at a certain angle to the surface of the half-space. The solution of the problem was obtained using the method of integral Fourier transforms. The material with elastic potential of harmonic type is chosen for a numerical analysis. The effect of the moving load, initial stresses, and mechanical parameters of the elements of the layered base on the main characteristics of its stress-strain state is studied.

Key words: compressible half-space, initial (residual) stresses, moving load.

Вступ.

В даній статті розглянуто задачу про дію рухомого поверхневого навантаження на пружний стисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Дослідження спрямовано на вивчення закономірностей хвильових процесів в пружних тілах при врахуванні ряду ускладнюючих факторів: захисного покриття, початкових напружень, умов контакту елементів шаруватого середовища, різних швидкостей руху поверхневого навантаження. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі під дією рухомого навантаження розглядалася в роботі [2]. Шаруваті середовища з початковими напруженнями досліджувалися в роботах [4 – 8] та інших.

§1. Постановка задачі.

Розглянемо попередньо напружений стисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Матеріал півпростору – ізотропний нелінійно-пружний в ненапруженому стані з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропного матеріалу будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей вибраних систем координат.

Початковий напружено-деформований стан півпростору вважається однорідним і визначається компонентами вектора переміщень відповідно до формули

$$u_j^0 = \delta_{mj}(\lambda_m - 1)x_m \quad (m, j = \overline{1, 3}), \quad (1.1)$$

де λ_j – подовження ($\lambda_j = \text{const}; j = \overline{1, 3}$), δ_{mj} – символ Кронекера, і наступними компонентами тензора узагальнених напружень

$$\sigma_{11}^0 \neq 0; \sigma_{22}^0 \neq 0; \sigma_{33}^0 \neq 0. \quad (1.2)$$

Шар і півпростір віднесені до декартової системи координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , які вводяться в початковому деформованому стані і пов'язані з лагранжевими координатами (x_1, x_2, x_3) , що вводяться в природному стані, співвідношеннями

$$\xi_j = \lambda_j x_j. \quad (1.3)$$

Граничні поверхні елементів є плоскі і паралельні між собою. Координатна площина $\xi_1 O \xi_3$ співпадає з вільною поверхнею захисного шару. Шар займає область $-h \leq \xi_2 \leq 0$, а півпростір – область $\xi_2 + h \leq 0$.

До вільної границі шару ($\xi_2 = 0$) прикладено лінійне навантаження P , що рухається з постійною швидкістю v під кутом α протягом великого проміжку часу і не залежить від координати ξ_3 [2]. Відносно систем координат, пов'язаних з цим навантаженням, існує плоский деформований усталений стан

$$u_1 = u_1(\xi_1, \xi_2, t); u_2 = u_2(\xi_1, \xi_2, t); u_3 \equiv 0. \quad (1.4)$$

Визначимо координати рухомої системи наступним чином

$$y_1 = \xi_1 - vt; y_2 = \xi_2. \quad (1.5)$$

Передбачається, що картина деформацій інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням.

Також передбачається, що напруження, яке виникає за рахунок дії навантаження, значно менше за початкові напруження. Вказане припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності для тіл з початковими напруженнями [1] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

Шар товщиною h моделюється зосередженими масами з густиною ρ_1 .

При вище зазначених припущеннях з урахуванням загальних розв'язків плоских динамічних задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями рівняння усталеного руху півпростору для стисливих тіл в рухомій системі координат (1.5) можна записати у вигляді [1]

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (1.6)$$

Функції η_j в рівняннях руху (1.6) визначаються із рівнянь

$$\eta^4 + 2A\eta^2 + A_1 = 0, \quad (1.7)$$

де

$$2A\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} = \tilde{\omega}_{2222}(\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) + \tilde{\omega}_{2112}(\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2) - (\tilde{\omega}_{2121} + \tilde{\omega}_{1122})^2; \\ A_1\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} = (\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2)(\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2). \quad (1.8)$$

В формулах (1.8) ρ – густина матеріалу півпростору в природному стані, $\tilde{\omega}$ – параметри, що характеризують матеріал півпростору [1].

Значення функцій $\eta_1^2(v)$ і $\eta_2^2(v)$ визначають вид рівнянь руху (1.7) і відповідно вибір форми їх розв'язку.

Вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають рівнянням руху (1.7), досліджений в статті [4]. В даній статті дано оцінку можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Вказано необхідні і достатні умови існування кратних коренів. Для матеріалів із різними пружними потенціалами виконано чисельні дослідження. Отримані результати використаємо нижче при дослідженні напружено-деформованого стану стисливого півпростору з початковими напруженнями.

В координатах рухомої системи координат (1.5) співвідношення пружності для стисливих тіл мають вигляд

$$\tilde{Q}_{mj} = \tilde{\omega}_{mj\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta}; \quad (m, j, \alpha, \beta = 1, 2). \quad (1.9)$$

Представлення загальних розв'язків рівнянь руху для стисливих тіл мають вигляд [1]

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tilde{\beta}_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 \chi^{(1)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(2)}; \\ u_2 &= -\tilde{\beta}_{21}^{(2)} \frac{\partial^2 \chi^{(2)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{\beta}_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(1)}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

де

$$\tilde{\beta}_{i1}^{(i)} = \tilde{\omega}_{2ji1} + \tilde{\omega}_{1ji2}; \quad \tilde{\beta}_{i1}^{(j)} = \tilde{\omega}_{1j1} - \tilde{\rho}v^2; \quad \tilde{\beta}_{i2}^{(j)} = \tilde{\omega}_{2jj2}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (1.11)$$

Розглянемо два випадки контакту між шаром і півпростором при $y_2 = -h$: жорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = P\delta(y_1)\sin\alpha + \rho_1 h \ddot{u}_1; \quad \tilde{Q}_{22} = P\delta(y_1)\cos\alpha + \rho_1 h \ddot{u}_2; \quad (1.12)$$

нежорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = 0; \quad \tilde{Q}_{22} = P\delta(y_1)\cos\alpha + \rho_1 h \ddot{u}_2. \quad (1.13)$$

Тут $\delta(y_1)$ – функція Дірака.

Таким чином, задача зводиться до розв'язку рівнянь руху (1.6) при граничних умовах (1.12) або (1.13).

Розглянемо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (1.7).

Нерівні корені. В представленні загального розв'язку (1.10) прийmemo

$$\chi = \tilde{\beta}_{11}^{(1)} \chi^{(1)}; \quad \chi^{(2)} = 0, \quad (1.14)$$

тоді вирази (1.10) з урахуванням (1.14) приймають вигляд

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1 \partial y_2}; \quad u_2 = \left(\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi, \quad (1.15)$$

де

$$\beta_1 = \tilde{\beta}_{21}^{(1)} / \tilde{\beta}_{11}^{(1)}; \quad \beta_2 = \tilde{\beta}_{22}^{(1)} / \tilde{\beta}_{11}^{(1)}. \quad (1.16)$$

Функція $\chi(y_1, y_2)$ визначається з рівняння

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi = 0. \quad (1.17)$$

У випадку нерівних коренів можна використовувати і інше представлення розв'язку. Введемо позначення

$$\Phi = -\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2}; \quad \Psi = \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1}; \quad \chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)}. \quad (1.18)$$

Після підстановки (1.18) в (1.6) і (1.15) отримаємо

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Phi = 0; \quad \left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi = 0; \quad (1.19)$$

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial y_2}; \quad u_2 = \alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \alpha_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}, \quad (1.20)$$

де

$$\alpha_1 = \beta_1 \eta_1^{-2} - \beta_2; \quad \alpha_2 = \beta_1 - \eta_2^2 \beta_2. \quad (1.21)$$

У випадку відсутності початкових напружень рівняння (1.19) співпадають з хвильовими рівняннями класичної теорії пружності, а вирази для переміщень (1.20) є узагальненням на випадок тіл з початковими напруженнями представлення розв'язків у вигляді Ляме. Функції Φ і Ψ є, відповідно, повздовжніми і поперечними потенціалами для тіл з початковими напруженнями.

В задачі, що розглядається, переміщення визначаються з точністю до довільної константи, тому будемо в подальшому оперувати не з переміщеннями, а з швидкостями переміщень. Напруження і швидкості переміщень в півпросторі через функцію χ в координатах (y_1, y_2) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj} &= \left(\alpha_{jj}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{jj}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_2}; \\ \tilde{Q}_{mj} &= \left(\alpha_{mj}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{mj}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_1}; \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j; \\ \dot{u}_1 &= v \frac{\partial^3 \chi}{\partial y_1^2 \partial y_2}; \quad \dot{u}_2 = -v \left(\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_1}.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Вирази для напружень і швидкостей переміщень у півпросторі через потенціали Φ і Ψ мають вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj} &= (\eta_1^2 \alpha_{jj}^{(2)} - \alpha_{jj}^{(1)}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} + (\alpha_{jj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{jj}^{(2)}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2}; \\ \tilde{Q}_{mj} &= (\eta_1^{-2} \alpha_{mj}^{(1)} - \alpha_{mj}^{(2)}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} + (\alpha_{mj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{mj}^{(2)}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2} \quad (m, j = 1, 2; m \neq j); \\ \dot{u}_1 &= -v \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2} \right); \quad \dot{u}_2 = -v \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2} \right).\end{aligned}\quad (1.23)$$

Тут введені наступні позначення

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} &= \tilde{\omega}_{jj22} \beta_1 - \tilde{\omega}_{jj11}; \quad \tilde{\alpha}_{jj}^{(2)} = \tilde{\omega}_{jj22} \beta_2; \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} &= \tilde{\omega}_{mj21} \beta_1; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} = \tilde{\omega}_{mj21} \beta_2 - \tilde{\omega}_{mj12} \quad (m, j = 1, 2; m \neq j).\end{aligned}\quad (1.24)$$

Таким чином, задача про усталений рух стисливого шаруватого півпростору під дією рухомого навантаження у випадку нерівних коренів зводиться до знаходження функції χ або функцій Φ , Ψ із граничних умов (1.12) або (1.13) при позначеннях (1.9) і (1.15) або (1.9) і (1.20), відповідно. Компоненти напружено-деформованого стану двошарового стисливого півпростору визначаються по формулам (1.22) або (1.23).

Рівні корені. Розглянемо випадок, коли $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. Скористаємося загальним представленням розв'язку (1.10). Напруження і швидкості переміщень в шаруватому півпросторі у випадку рівних коренів через функції $\chi^{(j)}$ визначаються за формулами

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj} &= \left(\tilde{\alpha}_{jj}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{jj}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1} + \left(\tilde{\alpha}_{jj}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{jj}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2}; \\ \tilde{Q}_{mj} &= \left(\tilde{\alpha}_{mj}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{mj}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_2} + \left(\tilde{\alpha}_{mj}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{mj}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_1} \quad (m, j = 1, 2; m \neq j);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= v \left[\tilde{\beta}_{11}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi^{(1)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left(\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{d\chi^{(2)}}{dy_1} \right]; \\ \dot{u}_2 &= v \left[\tilde{\beta}_{21}^{(2)} \frac{\partial^3 \chi^{(2)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left(\tilde{\beta}_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{d\chi^{(1)}}{dy_1} \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

У формулах (1.25) використовуються наступні позначення:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{jj}^{(11)} &= \tilde{\omega}_{jj22}(\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) - \tilde{\omega}_{jj11}(\tilde{\omega}_{2211} + \tilde{\omega}_{1212}); \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(21)} &= \tilde{\omega}_{jj22}\tilde{\omega}_{2112}; \quad \tilde{\alpha}_{jj}^{(12)} = \tilde{\omega}_{jj11}(\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(22)} &= \tilde{\omega}_{jj11}\tilde{\omega}_{2222} - \tilde{\omega}_{jj22}(\tilde{\omega}_{2121} + \tilde{\omega}_{1122}); \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(11)} = \tilde{\omega}_{mj21}(\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2); \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(21)} &= \tilde{\omega}_{mj21}\tilde{\omega}_{2112} - \tilde{\omega}_{mj12}(\tilde{\omega}_{2211} + \tilde{\omega}_{1212}); \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(22)} = \tilde{\omega}_{mj12}\tilde{\omega}_{2222}; \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(12)} &= \tilde{\omega}_{mj12}(\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2) - \tilde{\omega}_{mj21}(\tilde{\omega}_{2121} + \tilde{\omega}_{1122}) \quad (m, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Таким чином, задача про усталений рух двошарового стисливого півпростору під дією навантаження, що рухається з постійною швидкістю, у випадку рівних коренів рівнянь (1.7) зводиться до визначення функцій $\chi^{(j)}$ з рівнянь (1.12) або (1.13). Компоненти напружено-деформованого стану стисливого півпростору визначаються за формулами (1.25).

§2. Розв'язок задачі в області зображень Фур'є.

Розв'язок задачі знайдемо з допомогою інтегрального перетворення Фур'є по змінній y_1

$$f^F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1) e^{-iky_1} dy_1 \quad (2.1)$$

і відповідної формули оберненого перетворення

$$f(y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} f^F(k) e^{iky_1} dk; \quad \gamma > 0. \quad (2.2)$$

Застосовуючи перетворення Фур'є до рівнянь (1.6), отримаємо

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \chi^{(j)F} = 0; \quad j=1,2. \quad (2.3)$$

Визначимо розв'язок задачі для випадків нерівних і рівних коренів характеристичного рівняння та різних умов контакту шару і півпростору. Розв'язок запишемо в загальному вигляді для будь-якої швидкості руху навантаження (дозвучової, трансзвукової і надзвукової).

Нерівні корені. Рівняння руху (1.17) і (1.19) в просторі зображень можна відповідно записати

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \chi^F = 0; \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \Phi^F = 0; \quad \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \Psi^F = 0. \quad (2.5)$$

Розв'язок трансформованих рівнянь (2.4) з урахуванням згасання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\chi^F = \sum_{m=1}^2 C_m e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}, \quad (2.6)$$

де C_m , $m=1, 2$ – константи інтегрування.

Тут $k_j \equiv \sigma = |k|/k$, якщо $\eta_j^2 > 0$ і $k_j = i$, якщо $\eta_j^2 < 0$. У випадку, якщо η_j мають комплексні значення, то в представленні розв'язку (2.6) необхідно покласти $k_j = 1$; $\eta_j = \sigma \operatorname{Re} \eta_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \eta_j$; $j=1, 2$.

Розв'язок рівнянь (2.5) для потенціалів Φ^F і Ψ^F будемо шукати у вигляді

$$\Phi^F = C_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)}; \quad \Psi^F = C_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)}, \quad (2.7)$$

де C_1, C_2 – константи інтегрування.

Зауважимо, що для скінченності значень функцій χ^F , Φ^F і Ψ^F необхідно, щоб $\operatorname{Re} \eta_j > 0$.

Трансформовані вирази для напружень, переміщень і швидкостей переміщень з урахуванням представлення розв'язків (2.6) мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj}^F &= -k^3 \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_{jj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \tilde{Q}_{pj}^F &= -ik^3 \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_{pj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)} \quad (j, p=1, 2; j \neq p); \\ u_1^F &= -ik^2 \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad u_2^F = -k^2 \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \dot{u}_1^F &= -k^3 v \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad \dot{u}_2^F = ik^3 v \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} &= \eta_1 (\tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{jj}^{(2)} \eta_1^2); \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} = \eta_2 (\tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{jj}^{(2)} \eta_2^2); \\ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} &= \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} \eta_1^2; \quad \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} = \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} \eta_2^2 \quad (j, m=1, 2; j \neq m); \\ \tilde{\gamma}_1^{(1)} &= \eta_1; \quad \tilde{\gamma}_1^{(2)} = \eta_2; \quad \tilde{\gamma}_2^{(1)} = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 \eta_1^2; \quad \tilde{\gamma}_2^{(2)} = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 \eta_2^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Використовуючи представлення розв'язків (2.7), в просторі зображень Фур'є параметри, що характеризують напружено-деформований стан півпростору, можна записати

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj}^F &= k^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} \gamma_{jj}^{(m)} C_m e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \tilde{Q}_{pj}^F &= -ik^2 \sum_{m=1}^2 (-i)^{m-1} C_m \gamma_{pj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)} \quad (j, p=1, 2; j \neq p); \\ u_1^F &= ik \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_m \gamma_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad u_2^F = k \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_m \gamma_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \dot{u}_1^F &= vk^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_m \gamma_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad \dot{u}_2^F = -ivk^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} \gamma_2^{(m)} C_m e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

де

$$\begin{aligned}
\gamma_{jj}^{(1)} &= \alpha_{jj}^{(1)} - \eta_1^2 \alpha_{jj}^{(2)}; \quad \gamma_{jj}^{(2)} = k_2 \eta_2 (\alpha_{jj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{jj}^{(2)}); \\
\gamma_{mj}^{(1)} &= k_1 \eta_1 (\alpha_{mj}^{(2)} \eta_1^{-2} - \alpha_{mj}^{(1)}); \quad \gamma_{mj}^{(2)} = \alpha_{mj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{mj}^{(2)} \quad (j, m = 1, 2; j \neq m); \\
\gamma_1^{(1)} &= 1; \quad \gamma_1^{(2)} = k_2 \eta_2; \quad \gamma_2^{(1)} = \alpha_1 k_1 \eta_1; \quad \gamma_2^{(2)} = \alpha_2.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Підставляючи вирази (2.8) в трансформовані граничні умови (1.12) і (1.13), маємо системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_m , $m = 1, 2$ (представлення розв'язку через функцію χ)

$$\begin{aligned}
(\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k \tilde{v}^2 k_1 \tilde{\gamma}_1^{(1)}) C_1 + (\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k \tilde{v}^2 k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)}) C_2 &= i k^{-3} P \sin \alpha; \\
(k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)}) C_1 + (k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)}) C_2 &= -k^{-3} P \cos \alpha
\end{aligned} \tag{2.12}$$

у випадку жорсткого контакту і

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} C_1 + \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} C_2 &= 0; \\
(k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)}) C_1 + (k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)}) C_2 &= -k^{-3} P \cos \alpha
\end{aligned} \tag{2.13}$$

у випадку нежорсткого контакту.

Аналогічні системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_m ($m = 1, 2$) отримаємо, використовуючи граничні умови (1.12) і (1.13) та вирази (2.10) (представлення розв'язку через функції Φ і Ψ)

$$\begin{aligned}
(\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(1)}) C_1 + i(\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(2)}) C_2 &= -i k^{-2} P \sin \alpha; \\
(\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)}) C_1 + i(\tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)}) C_2 &= k^{-2} P \cos \alpha
\end{aligned} \tag{2.14}$$

у випадку жорсткого контакту і

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} C_1 + i \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} C_2 &= 0; \\
(\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)}) C_1 + i(\tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)}) C_2 &= k^{-2} P \cos \alpha
\end{aligned} \tag{2.15}$$

у випадку нежорсткого контакту.

Таким чином, задача про усталений рух шаруватого півпростору під дією поверхневого рухомого навантаження в просторі зображень Фур'є у випадку нерівних коренів в залежності від умов контакту між шаром і півпростором та вибраного представлення розв'язку задачі зводиться до розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь (2.12) – (2.15).

Розв'язок систем алгебраїчних рівнянь (2.12) і (2.13) можна записати як

$$C_m = k^{-3} \Delta^{-1} U_m \quad (m = 1, 2), \tag{2.16}$$

де у випадку жорсткого контакту

$$\begin{aligned}
\Delta &= \rho_1^2 h^2 k^2 \tilde{v}^4 (k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_2^{(1)} - k_1 \tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_1^{(1)}) + \\
&+ \rho_1 h k v^2 \left[k_2 k_1 (\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \tilde{\gamma}_1^{(2)} - \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \tilde{\gamma}_1^{(1)}) + (\tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)}) \right] + (k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} - k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)}); \\
U_m &= (-1)^m P \left[i(k_j \tilde{\gamma}_{22}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)}) \sin \alpha + (\tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 k_j \tilde{\gamma}_1^{(j)}) \cos \alpha \right] \quad (j, m = 1, 2; j \neq m),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

а у випадку нежорсткого контакту

$$\Delta = \rho_1 h k v^2 (\tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)}) + k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} - k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)};$$

$$U_m = (-1)^{m+1} P \tilde{\gamma}_{21}^{(j)} \cos \alpha \quad (j, m = 1, 2; j \neq m). \quad (2.18)$$

Оригінали напружень і швидкостей переміщень отримаємо, скориставшись формулами (2.8), (2.17) або (2.18) (в залежності від умов контакту) і оберненим перетворенням Фур'є (2.2)

$$\tilde{Q}_{jj} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(k_1 \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + k_2 \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk;$$

$$\tilde{Q}_{mj} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(\tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \quad m, j = 1, 2; \quad j \neq m;$$

$$\dot{u}_1 = -\frac{v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(k_1 \tilde{\gamma}_1^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk;$$

$$\dot{u}_2 = \frac{iv}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \tilde{\Delta}^{-1} \left(\tilde{\gamma}_2^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + \tilde{\gamma}_2^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk. \quad (2.19)$$

Розв'язок систем алгебраїчних рівнянь (2.14) і (2.15) має вигляд

$$C_m = k^{-2} \Delta^{-1} U_m; \quad m = 1, 2. \quad (2.20)$$

Тут у випадку жорсткого контакту

$$\Delta = \rho_1^2 h^2 k^2 v^4 (\tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_2^{(1)}) + \rho_1 h k v^2 \left[(\tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)}) + (\tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)}) \right] +$$

$$+ (\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)});$$

$$U_m = -i^{m-1} P \left[i (\tilde{\gamma}_{22}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)}) \sin \alpha + (\tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(j)}) \cos \alpha \right]$$

$$(j, m = 1, 2; j \neq m), \quad (2.21)$$

а у випадку нежорсткого контакту

$$\Delta = \rho_1 h k v^2 (\tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)}) + \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} - \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)};$$

$$U_m = i^{m-1} P \tilde{\gamma}_{21}^{(j)} \cos \alpha \quad (j, m = 1, 2; j \neq m). \quad (2.22)$$

В цьому випадку розв'язок задачі через параметри, що характеризують напружено-деформований стан, можна записати, використовуючи формули (2.2), (2.10), (2.21) або (2.22):

$$\tilde{Q}_{jj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(\tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + i \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk;$$

$$\tilde{Q}_{mj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(i \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} - \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk;$$

$$\dot{u}_m = (-i)^{m-1} \frac{v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(\tilde{\gamma}_m^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + i \tilde{\gamma}_m^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk$$

$$(j, m = 1, 2; j \neq m). \quad (2.23)$$

Рівні корені. Розв'язок трансформованих рівнянь (2.3) у випадку рівних коренів рівнянь (1.7) ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$) з урахуванням згасання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\chi^{(j)F} = \left[C_1^{(j)} + |k|\eta(y_2 + h)C_2^{(j)} \right] e^{k|\eta(y_2+h)} \quad (j = 1, 2), \quad (2.24)$$

де $C_1^{(j)}, C_2^{(j)}$ – константи інтегрування.

Введемо постійні інтегрування

$$iC_m^{(2)} = C_m; \quad C_m^{(1)} = C_m \quad (m = \overline{1, 4}). \quad (2.25)$$

Трансформовані вирази для напружень, переміщень і швидкостей переміщень (1.25) з урахуванням (2.24) і (2.25) мають вигляд

$$\tilde{Q}_{mj}^F = -i^{1-\delta_{mj}} k^3 \left\{ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} [C_1 + |k|\eta(y_2 + h)C_2] + \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} C_2 \right\} e^{k|\eta(y_2+h)};$$

$$u_j^F = -i^{\delta_{1j}} k^2 \left\{ \tilde{\gamma}_j^{(1)} [C_1 + |k|\eta(y_2 + h)C_2] + \tilde{\gamma}_j^{(2)} C_2 \right\} e^{k|\eta(y_2+h)};$$

$$\dot{u}_j^F = i^{2-\delta_{2j}} \nu k^3 \left\{ \tilde{\gamma}_j^{(1)} [C_1 + |k|\eta(y_2 + h)C_2] + \tilde{\gamma}_j^{(2)} C_2 \right\} e^{k|\eta(y_2+h)}; \quad j, m = 1, 2, \quad (2.26)$$

де

$$\tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} = \tilde{z}_{jj}^{(2)} + \sigma\eta\tilde{z}_{jj}^{(1)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(3)} = \tilde{z}_{jj}^{(2)} - \sigma\eta\tilde{z}_{jj}^{(1)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} = \sigma\eta(\tilde{z}_{jj}^{(1)} - \tilde{\zeta}_{jj}^{(1)}) - \tilde{\zeta}_{jj}^{(2)};$$

$$\tilde{\gamma}_{jj}^{(4)} = \sigma\eta(\tilde{z}_{jj}^{(1)} - \tilde{\zeta}_{jj}^{(1)}) + \tilde{\zeta}_{jj}^{(2)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} = \tilde{z}_{jj}^{(1)} - \sigma\eta\tilde{z}_{jj}^{(2)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(3)} = \tilde{z}_{jj}^{(1)} + \sigma\eta\tilde{z}_{jj}^{(2)};$$

$$\tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} = -\sigma\eta(\tilde{z}_{mj}^{(2)} - \tilde{\zeta}_{mj}^{(2)}) - \tilde{\zeta}_{mj}^{(1)}; \quad \tilde{\gamma}_{mj}^{(4)} = -\sigma\eta(\tilde{z}_{mj}^{(2)} - \tilde{\zeta}_{mj}^{(2)}) + \tilde{\zeta}_{mj}^{(1)};$$

$$\tilde{z}_{mj}^{(p)} = \tilde{\alpha}_{mj}^{(1p)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2p)}\eta^2; \quad \tilde{\zeta}_{mj}^{(p)} = 2\tilde{\alpha}_{mj}^{(2p)}\eta^2; \quad j, m, p = 1, 2;$$

$$\gamma_1^{(1)} = -\tau_1^{(1)} + \tau_1^{(2)}; \quad \gamma_1^{(2)} = \tau_1^{(2)} + \tau_1^{(3)}; \quad \gamma_1^{(3)} = -\tau_1^{(1)} - \tau_1^{(2)};$$

$$\gamma_1^{(4)} = \tau_1^{(2)} - \tau_1^{(3)}; \quad \gamma_2^{(1)} = \tau_2^{(1)} + \tau_2^{(2)}; \quad \gamma_2^{(2)} = \tau_2^{(2)} - \tau_2^{(3)};$$

$$\gamma_2^{(3)} = \tau_2^{(1)} - \tau_2^{(2)}; \quad \gamma_2^{(4)} = \tau_2^{(2)} + \tau_2^{(3)};$$

$$\tau_m^{(1)} = \tilde{\beta}_{m1}^{(1)} - \tilde{\beta}_{m2}^{(1)}\eta^2; \quad \tau_m^{(2)} = \sigma\eta\tilde{\beta}_{m1}^{(m)}; \quad \tau_m^{(3)} = 2\tilde{\beta}_{m2}^{(j)}\eta^2;$$

$$m, j = 1, 2; \quad m \neq j. \quad (2.27)$$

Підставляючи вирази (2.26) в трансформовані граничні умови (1.12) або (1.13), отримаємо системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_m, m = 1, 2$, у випадку жорсткого контакту

$$\begin{aligned} & \left(\sigma\eta\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k \nu^2 \tilde{\gamma}_1^{(1)} \right) C_1 + \left(\sigma\eta\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k \nu^2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} \right) C_2 = i k^{-3} P \sin \alpha; \\ & \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} - \rho_1 h k \sigma \eta \nu^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)} \right) C_1 - \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \rho_1 h k \sigma \eta \nu^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)} \right) C_2 = k^{-3} P \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.28)$$

а у випадку нежорсткого контакту

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)}C_1 + \tilde{\gamma}_{21}^{(2)}C_2 &= 0; \\ \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} - \rho_1 h k \sigma \eta v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)}\right)C_1 - \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \rho_1 h k \sigma \eta v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)}\right)C_2 &= k^{-3} P \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Таким чином, задача про усталений рух нестисливого півпростору під дією поверхневого рухомого навантаження в просторі зображень Фур'є у випадку рівних коренів зводиться до розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь (2.28) або (2.29) в залежності від умов контакту захисного шару і півпростору.

Розв'язок систем алгебраїчних рівнянь (2.28) і (2.29) можна представити у вигляді (2.16), де у випадку жорсткого контакту

$$\begin{aligned} \Delta &= \sigma \eta \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \right) - \\ &- \rho_1 h k v^2 \left[\eta^2 \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \right) - \left(\tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \right) \right] - \rho_1^2 h^2 k^2 v^4 \sigma \eta \left(\tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_2^{(1)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} \right); \\ U_m &= P \left[i \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(j)} - \rho_1 h k \sigma \eta v^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right) \sin \alpha + (-1)^m \left(\sigma \eta \tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right) \cos \alpha \right]; \\ & \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m, \end{aligned} \quad (2.30)$$

а у випадку нежорсткого контакту

$$\begin{aligned} \Delta &= \rho_1 h k v^2 \eta^2 \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \right) - \sigma \eta \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \right); \\ U_m &= (-1)^j P \sigma \eta \tilde{\gamma}_{21}^{(j)} \cos \alpha; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Відповідно оригінали напружень і швидкостей переміщень, використовуючи формули (2.26), (2.30) або (2.31) і (2.2), можна записати:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 - \left[\tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} - \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} |k| \eta (y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk; \\ \tilde{Q}_{mj} &= -\frac{i\eta}{2\pi} \int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} \sigma \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 + \left[\tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} + \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} \eta |k| (y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk; \\ & \quad m, j = 1, 2; \quad j \neq m; \\ \dot{u}_1 &= -\frac{v}{2\pi} \int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_1^{(1)} U_1 + \left[\tilde{\gamma}_1^{(2)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)} |k| \eta (y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk; \\ \dot{u}_2 &= \frac{iv}{2\pi} \int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} \sigma \eta \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_2^{(1)} U_1 - \left[\tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} |k| \eta (y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Таким чином, напружено-деформований стан попередньо напруженого стисливого півпростору з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару визначається із виразів (2.19), (2.23) і (2.32) в залежності від механічних параметрів поверхневого шару і півпростору, швидкості руху навантаження, початкових напружень і координат точки, що досліджується.

§3. Чисельні дослідження.

З отриманих результатів випливає, що розрахунок інтегралів оберненого перетворення істотно залежить від швидкості руху навантаження. Методику обчислення таких інтегралів наведено в роботах [2, 9].

Як приклад розглянемо півпростір з пружним потенціалом гармонічного типу. Припустимо, що початковий деформований стан плоский ($\lambda_3 = 1$) і поверхневе навантаження відсутнє ($S_0^{22} = 0$).

Пружний потенціал гармонічного типу має вигляд [1]

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda s_1^2 + \mu s_2,$$

де λ , μ – коефіцієнти Ляме. Величини s_1 і s_2 – перший і другий інваріанти тензора деформацій лінійної теорії пружності, віднесені до головних осей.

Вирази для складових тензора $\tilde{\omega}$ для теорії скінченних (великих) початкових деформацій і першого варіанту теорії малих початкових деформацій мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1111} &= \frac{2\mu\lambda_1(1-\nu)^2}{(1-2\nu)(1-\nu\lambda_1)}; \quad \tilde{\omega}_{2222} = \frac{2\mu(1-\nu\lambda_1)}{\lambda_1(1-2\nu)}; \quad \tilde{\omega}_{2112} = \frac{2\mu(1-\nu\lambda_1)}{1+\lambda_1(1-2\nu)}; \\ \tilde{\omega}_{1221} &= \frac{2\mu\lambda_1^2(1-\nu)^2}{(1-\nu\lambda_1)[1+\lambda_1(1-2\nu)]}; \quad \tilde{\omega}_{2211} = \tilde{\omega}_{1122} = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}; \quad \tilde{\omega}_{1212} = \tilde{\omega}_{2121} = \frac{2\mu(1-\nu\lambda_1)}{1+\lambda_1(1-2\nu)}. \end{aligned}$$

Тут ν – коефіцієнт Пуассона для матеріалу півпростору. Для представлених нижче графіків $P = \mu$; $\nu = 0,3$; $\alpha = \pi/2$.

Проаналізуємо, як початкові напруження в основі впливають на характеристики напружено-деформованого стану при різних швидкостях навантаження і умовах контакту захисного шару і півпростору.

Для півпростору із стисливого матеріалу з гармонічним потенціалом обчислення проводилися при дозвукових $\nu < c_{12}$, трансзвукових $c_{12} < \nu < c_{11}$ і надзвукових $\nu > c_{11}$ швидкостях руху навантаження. Тут через c_{11} і c_{12} позначено швидкості поширення в напрямку осі Oy_1 відповідно повздовжніх і поперечних поляризованих хвиль в необмеженому тілі з початковими напруженнями ($\tilde{\rho}c_{ij}^2 = \tilde{\omega}_{ijji}$; $i, j=1, 2$) [2].

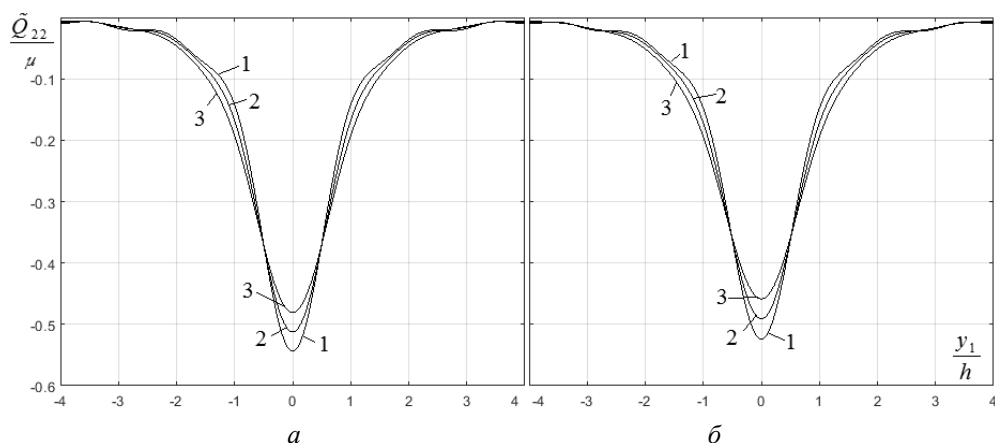


Рис. 1

На рис. 1 – 5 показано розподіл узагальненого напруження \tilde{Q}_{22} при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для різних умов контакту захисного шару та півпростору (a – нежорсткий контакт; b – жорсткий контакт) і різних швидкостей руху поверхневого навантаження.

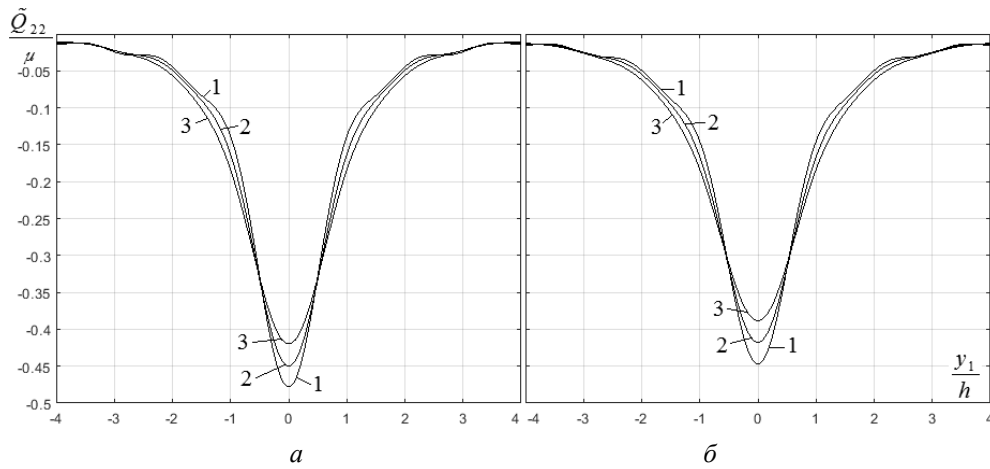


Рис. 2

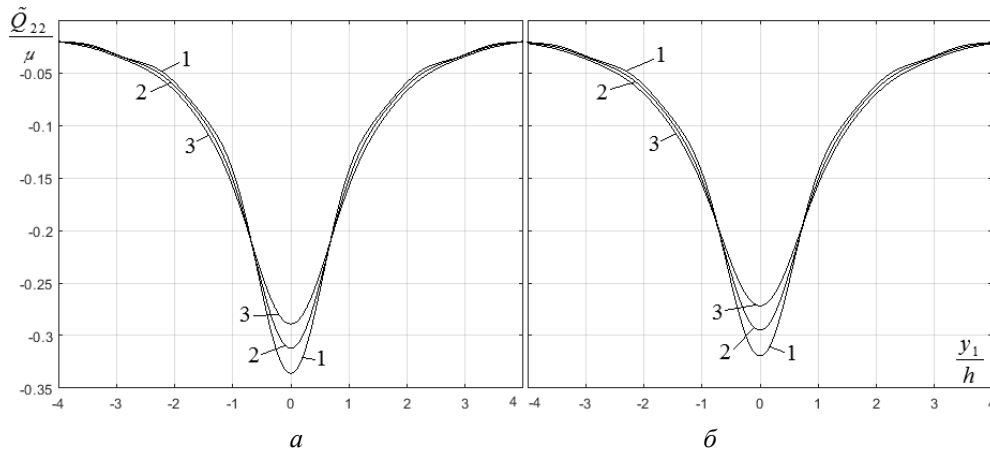


Рис. 3

На приведених графіках аналізуються точки півпростору, які збігаються в природному стані. Криві 1, 2 і 3 на рис. 1 – 5 відповідають значенням початкового видовження $\lambda_1 = 0,9$; $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_1 = 1,1$.

У випадку, коли $v < c_{12}$, були досліджені тільки докритичні швидкості навантаження [2] (рис. 1 – 3). Епюри на рис. 1 відповідають значенням $\rho/\rho_1 = 0,5$; $v^2 = 0,2c_s^2$; на рис. 2 – значенням $\rho/\rho_1 = 0,5$; $v^2 = 0,4c_s^2$; на рис. 3 – $\rho/\rho_1 = 0,25$; $v^2 = 0,2c_s^2$. Тут $c_0^2 = \mu/\rho$.

Для таких дозвукових швидкостей навантаження графіки величин, що характеризують напружено-деформований стан, симетричні по відношенню до точки прикладання навантаження.

Аналіз отриманих числових результатів для дозвукових швидкостей руху навантаження дозволяє зробити наступні висновки.

Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи і їх залежність від початкових напружень, визначаються координатами даної точки.

Найбільше початкові напруження впливають на напружено-деформований стан основи в зоні прикладання поверхневого навантаження.

Існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

При заданих λ_1 значення величин, що характеризують напружено-деформований стан основи, при стиску більше, ніж при розтязі.

Зі збільшенням швидкості руху навантаження напруження і швидкості переміщення зменшуються (рис. 1 і рис. 2).

Напруження і швидкості переміщення також зменшуються у випадку більш жорсткого поверхневого шару (рис. 1 і рис. 3).

Зі збільшенням швидкості руху навантаження в дозвуковій області характер впливу початкових напружень майже не змінюється.

Значення величин, що характеризують напружено-деформований стан півпростору при нежорсткому контакті більше, ніж при жорсткому контакті.

При жорсткому контакті вплив швидкості і початкових напружень менший, ніж при нежорсткому контакті.

На рис. 4 показано зміну узагальненого напруження \tilde{Q}_{22} у випадку, коли $c_{12} < v < c_{11}$. Швидкість навантаження становить $v^2 = 2c_0^2$. Для трансзвукової швидкості навантаження епори величин, що досліджуються, асиметричні по відношенню до точки прикладання навантаження. При цьому пряма хвиля загасає набагато швидше, ніж зворотня.

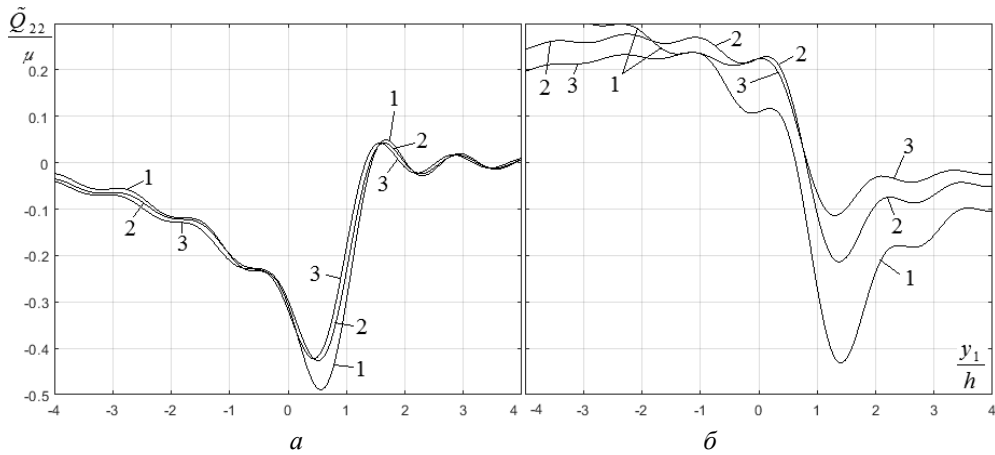


Рис. 4

Аналіз отриманих результатів показує, що наявність початкових напружень впливає на розподіл напружень і швидкостей переміщень в півпросторі. Цей вплив різний в залежності від положення даної точки півпростору щодо точки прикладання навантаження.

Значення напружень та швидкостей переміщень, як і у випадку $v < c_{12}$, при нежорсткому контакті більше, ніж при жорсткому контакті, але при жорсткому контакті існує значна залежність цих параметрів від початкових напружень.

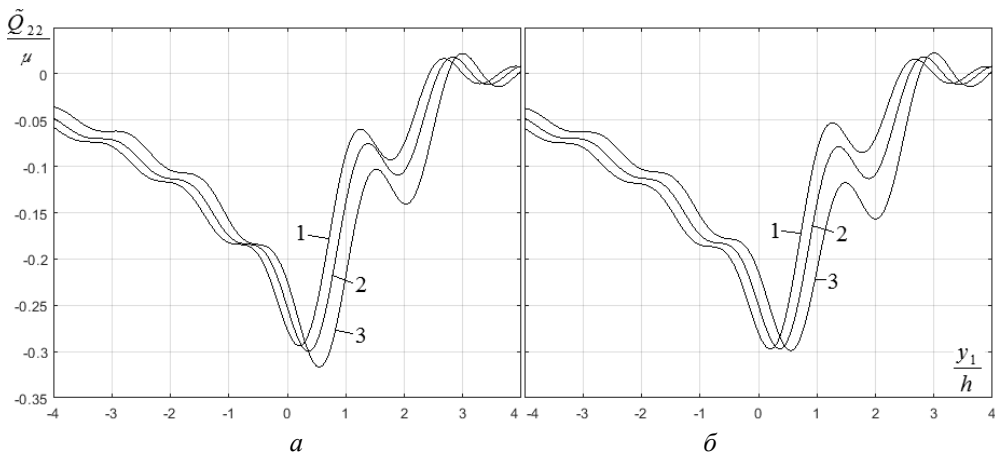


Рис. 5

Так само, як і у випадку, коли $v < c_{12}$, існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

На рис. 5 показано результати для складової напруження \tilde{Q}_{22} для швидкості навантаження $v^2 = 6c_s^2$ (надзвукова швидкість $v > c_{11}$). Видно, що зі збільшенням швидкості симетрія все більше порушується, а пряма хвиля згасає набагато швидше. При цьому вона не зникає повністю. Пов'язано це, мабуть, з шаруватістю середовища. Слід зазначити, що якісно подібна картина спостерігалася і в роботі [2].

Залежність параметрів напружено-деформованого стану від початкових напружень і умов контакту має такий же якісний характер, як і у випадку, коли $c_{12} < v < c_{11}$.

Висновки.

В даній роботі розглянуто плоску динамічну задачу про вплив рухомого навантаження на попередньо напружений стисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Розв'язок задачі отримано із застосуванням методу інтегральних перетворень Фур'є в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями. Аналітичні результати приведені в загальному вигляді для матеріалів з довільним пружним потенціалом, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження. Чисельні розрахунки були проведені в рамках теорії скінченних початкових деформацій для матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень, умов контакту, механічних параметрів елементів шаруватої основи на основні характеристики її напружено-деформованого стану. Актуальність результатів дослідження пов'язана з можливістю їх використання при створенні якісно нових матеріалів, конструкцій і будівельних споруд.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто попередньо напружений стисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Зосереджена сила рухається по вільній поверхні захисного шару з постійною швидкістю під певним кутом до поверхні півпростору. Розв'язок задачі отримано із застосуванням методу інтегральних перетворень Фур'є. Для числового аналізу розглядався матеріал з пружним потенціалом гармонічного типу. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень, умов контакту і механічних параметрів елементів шаруватої основи на основні характеристики її напружено-деформованого стану.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стисливий півпростір, початкові (залишкові) напруження, рухоме навантаження.

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: «А.С.К», 2004. – 672 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
3. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. – Киев: Наук. думка, 1977. – 151 с.
4. Babich S.Yu., Gluchov Yu.P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 1. – P. 43 – 52.
5. Bagno O.M. Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 6. – P. 644 – 654.
6. Bagno O.M. Effect of a Viscous Compressible Liquid Layer on the Surface Instability of an Incompressible Elastic Half-Space with Finite Prestrains // Int. Appl. Mech. – 2022. – 58, N 6. – P. 645 – 652.
7. Bagno O.M. Effect of Fluid Viscosity on Generalized Lamb Waves in a System Consisting of an Elastic Layer and a Viscous Fluid Layer // Int. Appl. Mech. – 2023. – 59, N 2. – P. 166 – 174.
8. Guz O.M., Bagno O.M. Effect of the Initial Stresses on Waves in the System Consisting of a Viscous Fluid Layer and a Compressible Elastic Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 1. – P. 1 – 10.
9. Wright J.P., Baron M.L. Exponentially decaying pressure pulse moving with contact velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic half space) // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1970 – 37, N 1. – P. 148 – 159.

Надійшла 27.06.2023

Затверджена до друку 16.04.2024