

І.В.Янчевський<sup>1</sup>, В.О.Ліскін<sup>1</sup>, О.Х.Остос<sup>2</sup>

**ВИЗНАЧЕННЯ РАДІАЦІЙНОЇ СИЛИ, ЩО ДІЄ НА СФЕРИЧНЕ ТІЛО  
В ЗАПОВНЕНІЙ СТИСЛИВОЮ РІДИНОЮ НАПІВНЕСКІНЧЕНІЙ  
ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОРОЖНИНІ**

<sup>1</sup>Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,  
просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua;  
<sup>2</sup>Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,  
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: ostos.o@inmech.kyiv.ua

**Abstract.** Based on the solution of the problem of scattering of a plane harmonic wave on the rigid spherical body in a liquid-filled semi-infinite cylindrical cavity, the acting on the body radiation force is determined as a function of the primary wave frequency, physical and geometrical parameters of the mechanical system. The full potential of the wave field is presented in a convenient for calculation form. The numerical results for the radiation force are obtained and its features at individual frequencies of the operating wave are shown. The described technique allows us to calculate both the radiation force with the necessary accuracy and to determine the incident wave frequency for the implementation of the controlled movement of the spherical body located in the cylindrical cavity and its localization.

**Key words:** semi-infinite cylindrical cavity, compressible liquid, plane acoustic wave, spherical body, «conditionally resonant» frequencies, acoustic radiation force.

**Вступ.**

У різноманітних галузях науки і техніки, зокрема у медицині, нафтогазовидобувній галузі, хімічній промисловості, виникає потреба у контрольованому маніпулюванні поведінкою занурених у рідину частинок, наприклад, для їх сортування, перемішування, акустичної очистки рідини, дегазації, тощо. Таке керування може бути реалізовано за рахунок так званої акустичної радіаційної сили, що діє на частинки в результаті формування у рідині певного акустичного сигналу. Цим обумовлений інтерес науковців до досліджень, присвячених питанням взаємодії акустичних хвиль з перешкодами і діючих на ці перешкоди радіаційних сил.

До теперішнього часу проведені численні дослідження для плоских хвиль, що діють на частинки сферичної чи циліндричної форми в необмеженому акустичному просторі і отримані фундаментальні результати [1, 2, 3]. Слід зазначити, що основи теорії обчислення радіаційного тиску запропоновано Л.В. Кінгом ще у 1934 році [4]. У цій роботі зазначено, що радіаційна сила є величиною другого порядку і виникає через те, що середній за період коливання первинної хвилі імпульс змінюється в деякому об'ємі і, відповідно, визначає сталу в часі складову діючого на занурене тіло силу. Дойніков [1] узагальнив цю теорію на випадок в'язкого середовища. Мітрі [11] досліджував дію акустичного тиску на занурені у рідину частинки при різних типах первинних звукових полів. Експериментальні дані про діючі на частинки радіаційні сили отримано авторами робіт [3, 9]. Кубенко, О. Жук та Я. Жук [14, 15] розглянули дію плоскої хвилі на рідке та жорстке сферичне тіло, занурене в нескінченну цилінд-

ричну порожнину з ідеальною стисливою рідиною. На основі цих результатів колективом авторів роботи виведені функції радіаційної сили для випадку деформівної пружної кулі [12] і виконані розрахунки радіаційної сили методом скінченних елементів, результати яких наведені у публікації [13] для жорсткої кулі у циліндричній порожнині зі східчастим переходом її радіусу. В [16] представлена методика розрахунку радіаційної сили, що діє на тверду сферичну частинку, яка розташована у заповненій ідеальною стисливою рідиною вузькій податливій трубці. При цьому вважається, що дифракційне акустичне поле в околі сферичної частинки формується первинною стоячою звуковою хвилею, частота якої відома, а вузлова її точка співпадає з центром частинки.

У роботі [8] дано постановку і одержано аналітичний розв'язок гідроакустичної задачі про визначення гідродинамічних процесів в заповненій рідиною напівнескінченній циліндричній порожнині, що містить тверде сферичне тіло і знаходиться під дією плоскої акустичної хвилі. Однак питання про діючу на сферичне тіло радіаційну силу у цій роботі не розглядалося. Метою даної роботи є одержання числових значень та їх аналіз для радіаційної сили, що діє на сферичне тіло у напівнескінченній циліндричній порожнині в залежності від частоти діючої плоскої хвилі та фізико-механічних і геометричних параметрів механічної системи. Робота спирається на публікації [5, 6, 8].

### 1. Постановка задачі.

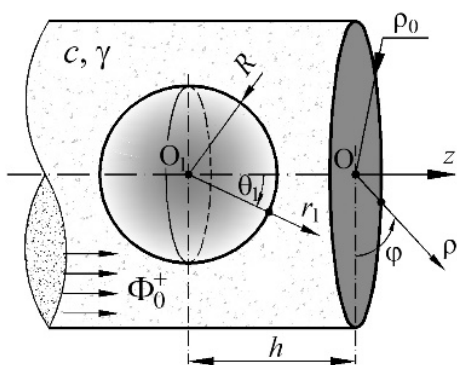


Рис. 1

У циліндричній системі координат  $(\rho, z, \varphi)$  розглянемо напівнескінченну кругову циліндричну порожнину радіусом  $\rho_0$ , яка заповнена ідеальною стисливою рідиною густиною  $\gamma$  та швидкістю розповсюдження в ній звуку  $c$ . Торць порожнини співпадає з площиною  $z = 0$ , а сама порожнина належить області  $z < 0$  (рис. 1). На осі порожнини на відстані  $h$  від її торця розташований центр твердого сферичного включення радіусом  $R$ . З центром сферичного тіла  $O_1$  суміщено початок сферичної системи координат  $(r_1, \theta_1, \varphi)$ .

Вважатимемо, що уздовж додатного напрямку осі  $z$  рухається гармонічна плоска хвиля з потенціалом

$$\Phi_0^+ = D(\omega)e^{i\omega(z-t)}, \quad (1)$$

де  $D(\omega)$  – амплітуда потенціалу;  $\omega$  – кругова частота;  $t$  – час.

З використанням отриманих у роботі [8] результатів повний потенціал хвильового поля у порожнині  $\Psi$  в пов'язаній з тілом сферичній системі координат  $(r_1, \theta_1)$  у зручній для наступних обчислень формі запишеться таким чином:

$$\Psi(r_1, \theta_1, t) = \Phi(r_1, \theta_1)e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

де  $\Phi$  – розв'язок рівняння Гельмгольца

$$\Phi(r_1, \theta_1) = i \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(1)} \left( y_n(\omega r_1) - \frac{y_n'(\omega R)}{j_n'(\omega R)} j_n(\omega r_1) \right) P_n(\cos \theta_1); \quad (3)$$

$J_n, y_n$  – сферичні функції 1-го і 2-го роду;  $J_n', y_n'$  – похідні відповідних функцій за радіальною координатою  $r_1$ ;  $P_n$  – поліном Лежандра;  $X_n^{(1)}$  – розв'язок нескінченної

лінійної системи алгебраїчних рівнянь, до якої зведена розглянута у публікації [8] задача (для скорочення обсягу даної роботи ця система не наведена).

Слід зазначити, що вирази (1) і (2) записані з використанням безрозмірних позначень, згідно до яких час  $t$  віднесено до  $\rho_0/c$ ; кругова частота  $\omega$  – до  $c/\rho_0$ ; лінійні розміри ( $z, r_1, \rho_1$ ) – до радіусу порожнини  $\rho_0$ ; тиск  $p$  – до  $\gamma c^2$ ; потенціал  $\Psi$  – до  $\rho_0 c$ .

Необхідно визначити акустичну радіаційну силу, яка діє на сферичну частинку у порожнині під дією падаючої хвилі з потенціалом (1).

## 2. Основні співвідношення для визначення радіаційної сили.

В загальному випадку сила, що діє на розташовану у ідеальній стисливій рідині кулю у безрозмірному форматі з урахуванням складових другого порядку може бути записана наступним чином [10, 11, 13]:

$$\vec{F} = -\iint_S \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 \right] \cdot \vec{n} + (v_n \cdot \vec{n} + v_\tau \cdot \vec{\tau}) \cdot v_n \right\} dS \quad (r_1 = R), \quad (4)$$

де  $\vec{n}, \vec{\tau}$  – орти нормалі та дотичної до поверхні кулі;  $S$  – обмежуюча кулю поверхня;  $v_n, v_\tau$  – нормальна та дотична складові швидкості точок рідини;  $\psi = \text{Re}(\Psi)$  – дійсна частина потенціалу швидкості.

При цьому шукана радіаційна сила обчислюється шляхом осереднення за періодом падаючої звукової хвилі  $T = 2\pi/\omega$  гідродинамічної сили  $\vec{F}(t)$  (4) [16]:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{F} dt. \quad (5)$$

З урахуванням (2) і (3) для потенціалу  $\psi$  отримаємо

$$\psi(r_1, \theta_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \tilde{\mathfrak{R}}_n(r_1) \sin(\omega t) + \tilde{\mathfrak{I}}_n(r_1) \cos(\omega t) \right] P_n(\cos \theta_1),$$

де введені наступні позначення:

$$\tilde{\mathfrak{R}}_n = \text{Re} \left\{ X_m^{(1)} \right\} \left( y_m(\omega r_1) - \frac{y'_m(\omega R)}{j'_m(\omega R)} j_m(\omega r_1) \right);$$

$$\tilde{\mathfrak{I}}_n = -\text{Im} \left\{ X_m^{(1)} \right\} \left( y_m(\omega r_1) - \frac{y'_m(\omega R)}{j'_m(\omega R)} j_m(\omega r_1) \right).$$

Оскільки поле швидкостей рідини в порожнині симетричне відносно осі  $Oz$ , то зазначена у (4) гідродинамічна сила спрямована уздовж цієї осі і формула для відмінної від нуля її складової запишеться наступним чином [11, 12]:

$$F_z = F_r + F_{r\theta} + F_\theta + F_t, \quad (6)$$

де

$$F_r = -\pi R^2 \int_0^\pi \left( \frac{\partial \psi}{\partial r_1} \right)_{r_1=R}^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1; \quad F_{r\theta} = 2\pi R \int_0^\pi \left( \frac{\partial \psi}{\partial r_1} \right)_{r_1=R} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} \right)_{r_1=R} \sin^2 \theta_1 d\theta_1;$$

$$F_\theta = \pi \int_0^\pi \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} \right)_{r_1=R}^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1; \quad F_t = -\pi R^2 \int_0^\pi \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{r_1=R}^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1. \quad (7)$$

Для твердого недеформівного і нерухомого сферичного тіла перший і другий доданки у правій частині (6) дорівнюють нулеві ( $\partial\psi/\partial r_1|_{r_1=R} \equiv 0$ ) і при подальших обчисленнях вони можуть не враховуватися. Тому формулу (6) для обчислення радіаційної сили перепишемо в такому вигляді:

$$F_z = F_\theta + F_t . \quad (8)$$

Використовуючи наступні рівності [7]:

$$\int_{-1}^1 \mu(1-\mu^2) \frac{dP_m(\mu)}{d\mu} \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} d\mu = \begin{cases} \frac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}, & m = n+1, \\ 0, & m \neq n+1 \end{cases} \quad (\mu = \cos \theta_1);$$

$$\int_{-1}^1 \mu P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}, & m = n+1, \\ 0, & m \neq n+1, \end{cases}$$

при інтегруванні (7) одержимо наступні вирази для обчислення складових гідродинамічної сили  $F_z$  (8)

$$F_\theta = 4\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+3)} \left[ \mathfrak{R}_m \mathfrak{R}_{m+1} \sin^2(\omega t) + \mathfrak{I}_m \mathfrak{I}_{m+1} \cos^2(\omega t) \right];$$

$$F_t = -4\pi \omega^2 R^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} \left[ \mathfrak{R}_m \mathfrak{R}_{m+1} \cos^2(\omega t) + \mathfrak{I}_m \mathfrak{I}_{m+1} \sin^2(\omega t) \right],$$

де  $\mathfrak{R}_m = \tilde{\mathfrak{R}}_m(R)$ ;  $\mathfrak{I}_m = \tilde{\mathfrak{I}}_m(R)$ .

Слід зазначити, що у цих виразах, як і у формулі (4), опущені доданки, котрі при осередненні за періодом падаючої хвилі обертаються в нуль.

Далі з урахуванням (5) і (8) отримаємо остаточний вираз для обчислення радіаційної сили, що діє на тверде сферичне тіло в циліндричній порожнині з ідеальною стисливою рідиною під дією плоскої хвилі

$$\langle F_z \rangle = 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} \left[ m(m+2) - \omega^2 R^2 \right] (\mathfrak{R}_m \mathfrak{R}_{m+1} + \mathfrak{I}_m \mathfrak{I}_{m+1}). \quad (9)$$

Структура виразу (9) є подібною до представлених у роботах [12, 14]. Ключовою її відмінністю є оптимізована формула для обчислення її складових  $\mathfrak{R}_m$  і  $\mathfrak{I}_m$ .

З метою нормування результатів (9) та зручності їх аналізу, іноді використовується безрозмірна функція радіаційної сили  $Y_{st}$  [11, 12], яка є питомою радіаційною силою на одиницю густини енергії падаючої хвилі і одиницю площі її дії:

$$Y_{st} = \langle F_z \rangle / S_c E_p , \quad (10)$$

де  $E_p = \omega^2 D^2 / 2$  – безрозмірене середнє значення густини енергії падаючої хвилі;  $D$  – амплітуда потенціалу швидкості (1);  $S_c = \pi R^2$  – площа поперечного перерізу сферичного тіла.

### 3. Обчислення і аналіз радіаційних сил.

При проведенні чисельних експериментів за нормуючі параметри були використані швидкість звуку  $c = 1500$  м/с і густина  $\gamma = 1000$  кг/м<sup>3</sup> (вода). Вважалося, що безрозмірна амплітуда тиску плоскої акустичної хвилі, яка рухається уздовж осі циліндричної порожнини, дорівнює одиниці ( $D(\omega) = 1/i\omega$ ). Обчислення радіаційної сили виконані для безрозмірних частот  $0 < \omega \leq 10$  з дискретним кроком 0,05.

На рис. 2, *a* кривою 2 представлено нормоване значення радіаційної сили (10), що діє на сферичне тіло радіусом  $R = 0,25$ , центр якого віддалений від торця циліндричної порожнини на відстань  $h = 1$ . Крива 0 на цьому рисунку наведена для порівняння і відображає значення  $Y_{st}$  у випадку розташування сферичного тіла у безмежному акустичному середовищі. Слід зазначити, що ця задача також може бути розв'язана за допомогою наведених у роботі [8] співвідношень, поклавши у розрахунковій системі рівнянь (3.9) коефіцієнти  $Q_{0n0m}^{(2)}$ ,  $q_{mn}^{(2)}$  і  $q_{mn}^{(2)}$  рівними нулеві. У випадку прирівнювання нулеві коефіцієнтів  $Q_{0n0m}^{(2)}$  і  $q_{mn}^{(2)}$  отримаємо задачу обчислення радіаційної сили, що діє на сферичну кулю у нескінченній циліндричній порожнині.

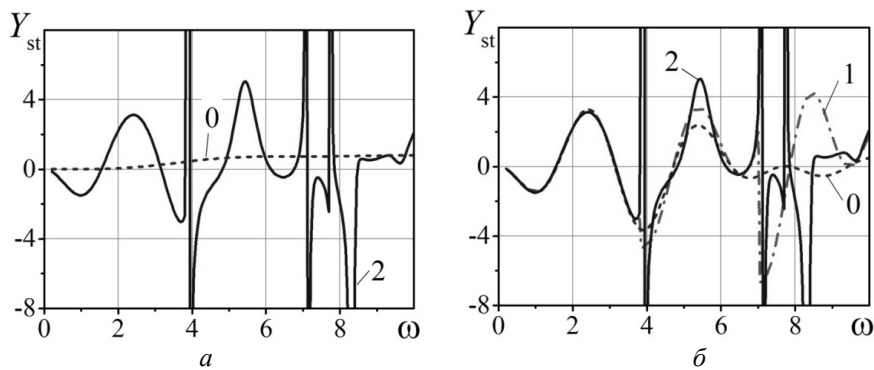


Рис. 2

Зображена на рис. 2, *a* крива 0 повністю узгоджується з результатами, отриманими іншими авторами [2], що є одним із свідчень коректності отриманих результатів з розрахунку радіаційної сили. Виявлено також, що у випадку біжучої плоскої хвилі, потенціал якої задається виразом (1), радіаційна сила, яка діє на сферичне тіло у нескінченній циліндричній порожнині, дорівнює нулеві, що дещо відрізняється від вже наявних у літературі висновків [13, 14].

Із порівняння представлених на рис. 2, *a* кривих можна помітити, що на фоні монотонного зростання радіаційної сили, обчисленої для тіла у безмежному середовищі (крива 0), ця сила у напівнескінченній циліндричній порожнині зі зміною частоти змінює знак і має різко виражені максимуми (крива 2). Зазначені максимуми спостерігаються на т.зв. «умовно резонансних» частотах для даної механічної системи, які детально проаналізовані у роботі [4]. Слід зазначити, що ці частоти є близькими до власних частот коливань рідини у поперечному перерізі циліндричної порожнини поза межею сферичного тіла радіусом  $R$ , до власних частот коливань рідини у поперечному перерізі, що проходить через центр тіла і у осьовому перерізі з торцевою границею порожнини і границею кулі. Відомо, що зазначені власні частоти можуть бути обчислені на підставі рівнянь  $J_1(\omega\rho_0) = 0$ ;  $J_1(\omega\rho_0)Y_1(\omega R) - J_1(\omega R)Y_1(\omega\rho_0) = 0$  і  $\sin(\omega(h-R)) = 0$ , відповідно. І для  $R = 0,25$  в діапазоні сканування безрозмірної частоти  $0 < \omega \leq 10$  отримаємо наступні значення – 3,832; 4,448; 6,614; 7,016 і 8,537. Уточнені значення «умовно резонансних» частот можуть бути виявлені виключно на

підставі аналізу наведеної у роботі [4] розрахункової системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.9), при яких детермінант матриці зазначеної системи близький до нуля. Від'ємні значення кривої 2 на рис. 2, а, свідчать про протилежний до напрямку поширення падаючої хвилі напрямок дії радіаційної сили, яка може штовхати тіло до джерела випромінювання.

Очевидно, що дифракційні процеси у зображеній на рис. 1 механічній системі з потенціалом падаючої хвилі у вигляді (1) є ідентичними до дифракційних процесів у механічній системі з нескінченною циліндричною порожниною, на осі якої розташовані два однакові сферичні тіла – «реальний» у центрі сферичної системи координат  $(r_1, \theta_1, \varphi)$  (рис. 1) і «уявний» з координатою центру  $z = +h$  циліндричної системи  $(\rho, z, \varphi)$ . Збуджуюча у цьому випадку зовнішня хвиля як суперпозиція прямої (1) та зворотної є «стоячою» хвилею, вузол якої розташований на відстані  $h$  від центру «реального» сферичного тіла ( $z = 0$ ). З математичної точки зору така хвиля може бути описана потенціалом швидкості  $\Phi_0^{+-} = D(\omega) e^{i\omega(z-t)} [e^{-i\omega h} + (-1)^n e^{i\omega h}]$  [7]. Реалізація зазначеної стоячої хвилі у нескінченній циліндричній порожнині з одним сферичним тілом призводить до виникнення радіаційної сили на тіло (крива 1 на рис. 2, б), порядок якої є співвимірним з випадком напівнескінченної порожнини (крива 2 на рис. 2). Суттєве зростання значення радіаційної сили у випадку стоячої хвилі спостерігається і для сферичного тіла у безмежному рідкому середовищі (крива 0 на рис. 2, б).

З аналізу зображеної на рис. 2, б кривої 0 випливає, що при  $\omega > 7$  спостерігаються близькі до нуля значення радіаційної сили на сферичне тіло у безмежному середовищі. Відмінність між кривими 0 і 1 відображає вплив твердої циліндричної границі порожнини на дифракційні процеси в околі сферичного тіла, які суттєвим чином проявляються на частотах, близьких до частот власних коливань рідини у поперечному перерізі порожнини –  $\omega_1 \approx 3,832$  і  $\omega_2 \approx 7,016$ . В околі цих частот відбувається стрімкий ріст значень радіаційної сили з різкою зміною напрямку її дії. Стрибокподібна зміна радіаційної сили на сферичне тіло у напівнескінченній порожнині (крива 2 на рис. 2) свідчить про вагомий вплив торцевої її стінки на гідродинамічні параметри рідини, а радіаційна сила в околі «умовно резонансних» частот може змінювати як пікове значення, так і напрямок.

Слід зазначити, що нульові значення радіаційної сили мають місце як при стрибкоподібній зміні її напрямку при частотах близьких до «умовно резонансних», так і на частотах, для яких виконується рівність  $\sin(2h\omega) = 0$  (див. також [7]).

Очевидно, що зі збільшенням радіуса сферичного тіла зазначені явища проявляються з більшою інтенсивністю. Так, на рис. 3 наведено графік залежності акустичної радіаційної сили від частоти для випадку, коли радіус сферичного тіла дорівнює 0,5, а відстань від його центру до торця порожнини –  $h = 1,0$ . При цьому, як і на рис. 2, б, досліджено вплив частоти стоячої хвилі на діючу на сферичне тіло радіаційну силу.

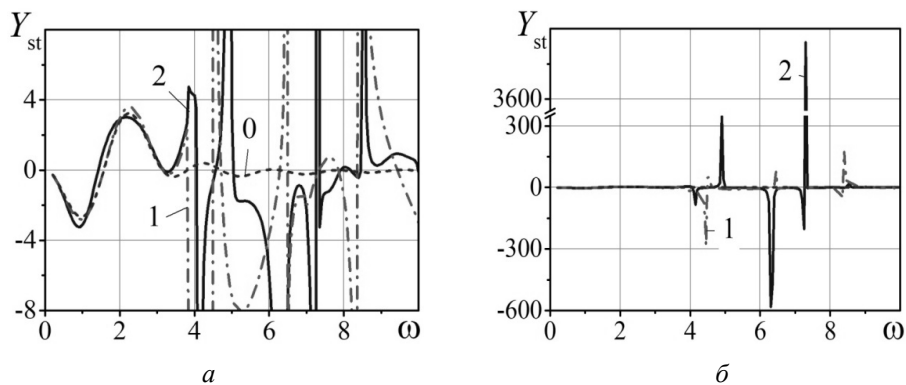


Рис. 3

З аналізу представлених на рис. 3, *a* кривих випливає, що на досить широкому діапазоні частоти стоячої хвилі значення діючої на сферичне тіло у нескінченній циліндричній порожнині радіаційної сили (крива 1) є співвимірними зі значеннями цієї сили у випадку напівнескінченної порожнини (крива 2). При низьких частотах ( $\omega < \omega_1$ ) ці сили фактично однакові і приблизно дорівнюють радіаційній силі на сферичне тіло у безмежному середовищі (крива 0). В той же час на частотах, близьких до «умовно резонансних», вплив торцевої стінки циліндричної порожнини стає більш помітним, про що свідчать графіки функцій нормованої радіаційної сили на рис. 3, *б*, який відрізняється від наведеного на рис. 3, *a* іншою шкалою для осі ординат. Зображена на рис. 3, *б* крива 2 показує, що на «умовно резонансних» частотах радіаційна сила, що діє на тіло у напівнескінченній порожнині, може на порядок перевищувати пікові значення сили на тіло у нескінченній циліндричній порожнині. Зокрема, при  $\omega \approx \omega_2$  дифракційне поле від стоячої хвилі намагається змістити тіло у додатному напрямку осі  $z$  циліндричної системи координат ( $Y_{st} = 3842 > 0$ ), а при  $\omega \approx 6,3$  – у протилежному ( $Y_{st} = -582 < 0$ ).

Вплив значення радіусу  $R$  сферичного тіла та відстані  $h$  від його центру до торця напівнескінченної циліндричної порожнини на нормовані значення радіаційної сили відображають представлені на рис. 4, *a* криві, які побудовані для випадку поширюваної вздовж додатної осі  $z$  плоскої хвилі для різних значень  $R$  і  $h$ : крива 1 побудована для  $R = 0,25$  і  $h = 1,0$  (див. також крива 2 на рис. 2); крива 2 – для  $R = 0,50$  і  $h = 1,0$ ; крива 3 – для  $R = 0,75$  і  $h = 1,0$ . Ці ж криві зображені на рис. 4, *б* зі зменшеним масштабом для осі ординат.

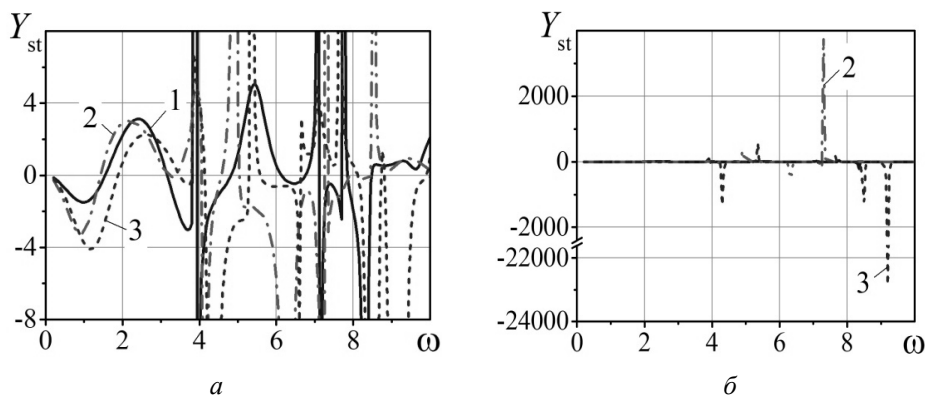


Рис. 4

З порівняння зображених на рис. 4, *a* кривих слідує, що для частот падаючої хвилі, відмінних від «умовно резонансних», нормовані значення радіаційної сили мають один порядок. На малих частотах ( $\omega < 1,5$ ) екстремальне значення радіаційної сили є від'ємним і збільшується за модулем як при збільшенні радіусу сферичного тіла, так і при зменшенні відстані від його центру до торця порожнини. Для частот, більших за першу власну частоту радіальних коливань рідини у циліндричній порожнині ( $\omega > \omega_1$ ), характер зміни радіаційної сили стає більш складним і на сканованому діапазоні частот ( $\omega \leq 10$ ) має низку локальних максимумів та мінімумів.

Більш помітним вплив геометричних параметрів механічної системи на порядок значень і напрямок радіаційної сили проявляється саме в околі «умовно резонансних» частот системи, про що свідчать криві на рис. 4, *б*. Пікові значення радіальної сили при  $R = 0,25$  і  $h = 1,0$  суттєво менші за екстремальні значення для іншого набору розрахункових значень і лінія 1 фактично збігається з віссю абсцис. Максимальне

додатне значення сили для сферичного тіла з радіусом  $R = 0,50$  має місце на частоті падаючої хвилі  $\omega \approx \omega_2$  при  $h = 1,0$  (крива 2), а максимальне від'ємне значення – при  $h = 0,75$  і  $\omega \approx 9,2$  (крива 3). Зсув «умовної резонансної» частоти для кривої 3 у порівнянні з кривою 2 обумовлений зміною найкоротшої відстані між границею сферичного тіла і торцем циліндричної порожнини, а збільшення за модулем радіаційної сили (приблизно в 6 разів) обумовлене більш складним дифракційним полем у зменшеному просторі рідини між границею сферичного тіла і напівнескінченної циліндричної порожнини.

Підсумовуючи описане вище можна зробити наступні висновки. На малих значеннях частоти падаючої хвилі значення радіаційної сили можна спрогнозувати на підставі певної математичної обробки результатів числових експериментів. При додатних значеннях радіаційної сили падаюча хвиля намагається змістити сферичне тіло у напрямку її поширення. Від'ємні значення сили свідчать про те, що вони направлені протилежно напрямку поширення хвилі і, відповідно, можуть тягнути сферичне тіло до джерела випромінювання. Разом з тим екстремальні значення радіаційної сили спостерігаються на частотах, близьких до «умовно резонансних» частот досліджуваної механічної системи [8], які більші за першу власну частоту радіальних коливань рідини у циліндричній порожнині. Напрямок дії і порядок радіаційної сили на цих частотах наперед передбачити досить складно і можна визначити виключно на підставі представлених у даній роботі розрахункових виразів. Разом з тим самі значення «умовно резонансних» частот можна визначити з аналізу детермінанта наведеної у публікації [8] розрахункової системи алгебраїчних рівнянь (3.9). Звісно, що наявність торцевої границі у механічній системі «сферичне тіло – акустичне середовище – напівнескінченна циліндрична порожнина» обумовлює як появу додаткових «умовно резонансних» частот у порівнянні з системою «сферичне тіло – акустичне середовище – нескінченна циліндрична порожнина», так і суттєве зростання екстремальних значень радіаційної сили на сферичне тіло. Суттєве зростання радіаційної сили має місце також і при зменшенні зазору між границею сферичного тіла і границями напівнескінченної порожнини. Екстремальні значення радіаційної сили спостерігаються для досить вузьких діапазонів частоти падаючої хвилі, що свідчить про високу чутливість динаміки сферичного тіла від  $\omega$ . Для деяких діапазонів частот в околі «умовно резонансних» характерна стрімка зміна значень радіаційної сили зі зміною знаку.

Для забезпечення напрямленого руху сферичного тіла за рахунок зовнішньої падаючої акустичної хвилі необхідно постійно змінювати частоту даної хвилі, оскільки при зміні положення тіла, зміні відстані від його центру до торця порожнини, змінюються і значення «умовно резонансних» частот. І якщо для механічної системи із заданим  $h$  на певній частоті  $\omega$  має місце додатне значення радіаційної сили, то із зміною відстані  $h$  дія плоскої хвилі на тій самій частоті  $\omega$  може призвести до від'ємних значень радіаційної сили і, відповідно, звести ефективність керованого таким чином руху сферичного тіла нанівець. Підбір частоти падаючої хвилі в залежності від геометричних і фізичних параметрів механічної системи «сферичне тіло – акустичне середовище – напівнескінченна циліндрична порожнина» для забезпечення ефективного керованого руху сферичного тіла і дозволяють представлені у даній роботі розрахункові вирази.

### **Висновки.**

У роботі викладена методика розрахунку радіаційної сили, що діє на сферичне тіло у заповненій ідеальною стисливою рідиною напівнескінченній циліндричній порожнині. При цьому вважається, що радіаційна сила обумовлена складним дифракційним полем в околі сферичного тіла, джерелом якого є поширювана уздовж осі порожнини плоска хвиля із заданою амплітудою потенціалу швидкості. Як вхідні дані виступили представлені у публікації [8] результати, а сама радіаційна сила, обчислена як осереднене за періодом первинної хвилі значення гідродинамічної сили, що діє на

сферичне тіло зі сторони акустичного середовища. Виконані числові розрахунки показали, що на малих частотах нормоване значення радіаційної сили слабо залежить від наявності торцевої границі порожнини. Суттєвий вплив торця на радіаційну силу спостерігається на частотах, більших за першу власну частоту радіальних коливань рідини у поперечному перерізі циліндричної порожнини. Зі зменшенням зазору між границями сферичного тіла і порожнини цей вплив стає більш помітним. Пікові значення радіаційної частоти мають місце для частот падаючої хвилі, які є близькими до «умовно резонансних» частот механічної системи «сферичне тіло – акустичне середовище – напівнескінченна циліндрична порожнина». І якщо значення цих частот можна визначити на підставі аналізу розрахункової системи рівнянь, то наперед спрогнозувати порядок значень і напрямок дії радіаційної сили на сферичне тіло представляє собою досить складне завдання. Для розрахунку цих сил можуть бути застосовані викладені у даній роботі співвідношення, які дозволяють проводити обчислення із необхідною точністю з врахуванням геометричних та фізичних параметрів механічної системи.

На підставі наведених співвідношень можна також визначити частоту падаючої хвилі в залежності від параметрів механічної системи для реалізації заданого керованого руху сферичного тіла у порожнині, що може бути використане в низці прикладних застосувань.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за підтримки Національного фонду досліджень України (конкурс «Підтримка досліджень провідних та молодих учених», Проєкт 2020.02/0112 «Дифракційні процеси і радіаційні сили в обмежених гідропружних системах»).

**РЕЗЮМЕ.** На основі розв'язку задачі розсіювання плоскої гармонічної хвилі на твердому сферичному тілі в заповненій рідиною напівнескінченній циліндричній порожнині визначено радіаційну силу, що діє на тіло, як функцію частоти первинної хвилі, фізичних і геометричних параметрів механічної системи. Повний потенціал хвильового поля записано у зручній для обчислень формі. Проведені чисельні експерименти показали, що присутність торцевої стінки циліндричної порожнини суттєво впливає на значення діючої на сферичне тіло радіаційної сили для частот, що перевищують першу власну частоту радіальних коливань рідини в циліндричній порожнині. Зі зменшенням зазору між границями тіла та порожнини, а також при частотах падаючої хвилі, близьких до «умовно резонансних» для досліджуваної механічної системи, значення радіаційної сили суттєво зростають. Викладена методика дозволяє розраховувати як радіаційну силу з необхідною точністю, так і визначити частоти падаючої хвилі для реалізації контрольованого руху розташованого в циліндричній порожнині сферичного тіла та його локалізації.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** напівнескінченна циліндрична порожнина, стислива рідина, плоска акустична хвиля, сферичне тіло, «умовно резонансні» частоти, радіаційна сила.

1. *Doinikov A.A.* Acoustic radiation force on a spherical particle in a viscous heat-conducting fluid // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1997. – **101**, N 2. – P. 713 – 740.
2. *Gol'dberg Z.A.* Acoustic radiation pressure. Chapter II in book: *High-Intensity Ultrasonic Fields*, (ed. Rozenberg L.D.) – New York: Springer Science + Business Media, 1971. – P. 74 – 133.
3. *Hasegawa T., Saka K., Inoue N., Kiichiro M.* Acoustic radiation force experienced by a solid cylinder in a plane progressive sound field // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1988. – **83**, N 5. – P. 1770 – 1775.
4. *King L.V.* On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* – 1934. – **147**, N 861. – P. 246 – 265.
5. *Kubenko V.D., Yanchevskii I.V.* Abnormal frequencies in a semi-infinite cylindrical vessel filled with a fluid and dynamically excited by a spherical oscillator // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 2. – P. 141 – 155.
6. *Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V.* "Resonance" phenomenon of kinematic excitation by a spherical body in a semi-infinite cylindrical vessel filled with liquid // *Acta Mechanica.* – 2019. – **230**, N 3. – P. 1009 – 1025.

7. Kubenko V.D., Yanchevs'kyi I.V. Diffraction Field and Radiation Force for a Liquid Bubble in a Dissimilar Fluid in an Infinite Cylindrical Cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2023. – **59**, N 3. – P. 257–269.
8. Kubenko V.D., Yanchevs'kyi I.V., Zhuk Ya.O., Liskin V.O. Hydrodynamic Characteristics of a Plane Wave Interacting with a Spherical Body in a Semi-Infinite Cylindrical Cavity Filled with a Compressible Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2023. – **59**, N 2. – P. 131–144.
9. Lee J., Teh S.Y., Lee A., Kim H.H., Lee C., Shung K.K. Transverse acoustic trapping using a Gaussian focused ultrasound // *Ultrasound in Med. and Biol.* – 2010. – **36**, N 2. – P. 350–355.
10. Miri A.K., Mitri F.G. Acoustic radiation force on a spherical contrast agent shell near a vessel porous wall – theory // *Ultrasound in Med. and Biol.* – 2011. – **37**, N 2. – P. 301–311.
11. Mitri F.G. Acoustic scattering of a high-order Bessel beam by an elastic sphere // *Ann. Phys.* – 2008. – **323**, N 11. – P. 2840–2850.
12. Shi J., Zhang X., Chen R., Zhang G. Acoustic radiation force of a solid elastic sphere immersed in a cylindrical cavity filled with ideal fluid // *Wave Motion.* – 2018. – **80**. – P. 37–46.
13. Shi J., Li Sh., Deng Y., Zhang X., Zhang G. Analysis of acoustic radiation force on a rigid sphere in a fluid-filled cylindrical cavity with an abruptly changed cross-section // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2020. – **147**, N 1. – P. 516–524.
14. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Y.A. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2012. – **132**, N 4. – P. 2189–2197.
15. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Y.A. Acoustic radiation acting on a liquid sphere in a circular cylinder filled with a fluid. // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 5. – P. 501–511.
16. Zhuk O.P., Kubenko V.D., Zhuk Y.O., Yanchevskyi I.V. Acoustic Radiation Pressure on a Solid Sphere in a Compliant Cylindrical Tube Filled with a Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 1. – P. 30–42.

Надійшла 08.06.2023

Затверджена до друку 16.04.2024