

Н. Д. Вайсфельд¹, Ю. С. Процеров², А. В. Толкачов²

**ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПРО КОЛИВАННЯ КРУГОВОГО
АБО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПУ НА ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРИ**

¹ Кингс Колледж Лондон Великобританія, Стренд, Лондон, WC2R 2LS;
e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk;

² Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова,
вул. Дворянська, 2, 65082, Одеса, Україна;
e-mail: protserov@onu.edu.ua, e-mail: andr.tolkach@gmail.com

Abstract. The article is devoted to a new approach to solving the dynamic contact problem of steady-state vibrations of a circular or annular stamp on an elastic foundation is considered. In contrast to traditional approaches that reduce the solution of the problem to an integral Fredholm equation of the second kind or a paired integral equation, the authors propose a method that reduces the solution to a single singular integral equation. This equation admits an efficient solution by the method of orthogonal polynomials. The dependence of contact stresses on the frequency of loading and the mass of the stamp is analyzed.

Keywords: dynamic contact problem, circular stamp, annular stamp, singular integral equation, method of orthogonal polynomials.

Вступ.

Динамічні контактні задачі теорії пружності відіграють важливу роль у розв'язанні реальних проблем, таких як дизайн матеріалів, розробка технологій і дослідження поведінки конструкцій під впливом зовнішніх навантажень. Різноманітні методи моделювання таких задач вимагають як числових підходів (метод скінченних елементів, метод граничних елементів), так і аналітичних. Останні надають можливість якісно оцінити вплив параметрів контакту, таких як коефіцієнт тертя, жорсткість контактних поверхонь, форма тіла на динаміку задач, розподіл напружень, деформацій та зносу в зоні контакту. Ці данні є важливими для проектування оптимальних матеріалів, підвищення надійності конструкцій та прогнозування зносу машинних деталей.

Зацікавленість вчених цією проблематикою відображено у багатьох сучасних працях, які спираються на матеріали попередніх класичних досліджень. Сучасні дослідження суттєво поширюють класичні результати, які отримано авторами, чії праці заклали основу сучасної контактної механіки. Основи теорії контактної взаємодії пружних тіл було розвинуто в роботах [2, 3, 5, 6, 13 – 16, 18, 21].

Ці теоретичні засади дозволили розширити клас контактних задач новими проблемами. В [10] досліджено контактну взаємодію під час тиску пружного кільцевого штампу на пружний півпростір з початковими напруженнями. Контактну задачу для двох однакових накладок з початковими напруженнями розв'язано в [11]. Осесиметричний випадок нестационарного вдавлювання тупого твердого тіла в пружний шар проаналізовано в [19]. Теоретичні засади взаємодії пружного штампу та півпростору з початковими (залишковими) напруженнями розроблено в [17]. Асимптотичний аналіз

моделі контактної взаємодії між штампами еліптичної форми на квазікласичній основі проведено в [9]. Вивчення контактної взаємодії об'єктів з текстурованими поверхнями досліджено у колективній монографії [2].

Інтерес до контактних задач теорії пружності, як бачимо, не зникає. Розв'язано нові задачі методом граничного елемента для пружнодинамічного контакту тіл [7]. Новий спеціальний метод розв'язання контактних задач за наявності тертя запропоновано у праці [8]. Вплив жорсткості на контактну взаємодію тіл з покриттям проаналізовано у [12].

Але попри наявність багатьох досліджень у напрямку контактних динамічних задач, багато питань залишаються невизначеними. Особливо це стосується розробки нових аналітичних методів розв'язання. У роботі, що пропонується, розроблено такий новий підхід, який застосовано для дослідження встановлених коливань кругового або кільцевого штампу на пружному півпросторі. Розв'язок контактної задачі зведено до сингулярного інтегрального рівняння, яке допускає ефективне розв'язання методом ортогональних многочленів.

§1. Постановка задачі.

Розглянемо в циліндричній системі координат (r, φ, z) пружний півпростір $0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq z < \infty$. Нехай в нього вдавлюється без урахування сил тертя абсолютно тверде тіло у вигляді кругового $0 \leq r < a$ або кільцевого $b < r < a$ штампу з плоскою основою під дією нормально прикладеної сили $Pe^{i\omega t}$, яка рівномірно розподілена по поверхні штампа. В цьому випадку задача буде осесиметричною, тобто всі величини не залежать від змінної φ , а залежність від часу виражатиметься в них множителем $e^{i\omega t}$. Позначимо через $f(r)e^{i\omega t}$ контактне напруження між штампом та пружним півпростором, через $\delta(t) = \delta_0 e^{i\omega t}$ – переміщення штампа в напрямку осі Oz , а через $u_r(r, z)e^{i\omega t}$ та $u_z(r, z)e^{i\omega t}$ – переміщення точок півпростору. Амплітуди останніх мусять задовольняти системі рівнянь Ляме, яка скорочена на спільний множник $e^{i\omega t}$

$$\begin{aligned} \Delta u_r - \frac{1}{r^2} u_r + \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] &= -\frac{\omega^2}{c_2^2} u_r; \\ \Delta u_z + \mu_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] &= -\frac{\omega^2}{c_2^2} u_z, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де оператор $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$; $c_2^2 = G\rho_0^{-1}$; $c_1^2 = (\lambda + 2G)\rho_0^{-1} = 2(1 - \mu)\mu_0 c_2^2$; μ – коефіцієнт Пуассона; λ, G – коефіцієнти Ляме; ρ_0 – щільність пружного півпростору; c_1, c_2 – швидкості поздовжньої та поперечної хвиль у півпросторі.

Систему (1.1) доповнимо крайовими умовами відносно амплітуд напружень

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=0} &= 2G\mu_0 \left[\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + (1 - \mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z=0} = -f(r); \\ \tau_{rz}|_{z=0} &= G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

§2. Отримання переміщень півпростору.

Перейдемо до безрозмірних координат $\rho = ra^{-1}$, $\zeta = za^{-1}$ та величин $u(\rho, \zeta) = u_r(a\rho, a\zeta)$, $w(\rho, \zeta) = u_z(a\rho, a\zeta)$. Згідно з роботою Попова [22] введемо функцію

$$Z(\rho, \zeta) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho u) \quad (2.1)$$

та запишемо систему рівнянь (1.1) у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta u - \frac{1}{\rho^2} u + \mu_0 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(Z + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) &= -\chi_2^2 u; \\ \Delta w + \mu_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(Z + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) &= -\chi_2^2 w, \end{aligned}$$

де $\chi_j^2 = a\omega^2 c_j^{-2}$, $j=1, 2$. Якщо тепер до першого рівняння застосувати оператор $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cdot)$, то отримана система набуде вигляду

$$\begin{aligned} \Delta Z + \mu_0 \nabla_\rho \left(Z + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) &= -\chi_2^2 Z; \\ \Delta w + \mu_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(Z + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) &= -\chi_2^2 w, \end{aligned} \quad (2.2)$$

де оператор $\nabla_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$. Використовуючи вказані заміни, крайові умови (1.2) можна записати у вигляді

$$2G\mu_0 \left[\mu Z + (1-\mu) \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=0} = -p(\rho); \quad \left[\frac{\partial Z}{\partial \zeta} + \nabla_\rho w \right]_{\zeta=0} = 0; \quad p(\rho) = f(a\rho). \quad (2.3)$$

До системи (2.2) та крайових умов (2.3) застосуємо інтегральне перетворення Ганкеля

$$\langle Z_\alpha(\zeta), w_\alpha(\zeta), p_\alpha \rangle = \int_0^\infty \langle Z(\rho, \zeta), w(\rho, \zeta), p(\rho) \rangle J_0(\alpha\rho) \rho d\rho$$

з формулою обернення $\langle Z, w, p \rangle = \int_0^\infty \langle Z_\alpha, w_\alpha, p_\alpha \rangle J_0(\alpha\rho) \alpha d\alpha$, де $J_0(x)$ функція Бесселя. В результаті отримуємо одновимірну крайову задачу

$$\begin{aligned} Z_\alpha''(\zeta) - \gamma^2 q_1^2 Z_\alpha(\zeta) - \mu_0 \alpha^2 w_\alpha'(\zeta) &= 0; \\ w_\alpha''(\zeta) - \gamma^2 q_2^2 w_\alpha(\zeta) + \gamma^2 \mu_0 Z_\alpha'(\zeta) &= 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$2G\mu_0 [\mu Z_\alpha(0) + (1-\mu) w_\alpha'(0)] = -p_\alpha, \quad Z_\alpha'(0) - \alpha^2 w_\alpha(0) = 0. \quad (2.5)$$

Тут $\gamma^2 = c_1^2 c_2^{-2} = 1 + \mu_0$; $q_j = \sqrt{\alpha^2 - \chi_j^2}$, $j=1, 2$.

Запишемо систему (2.4) у векторному вигляді

$$L[\bar{y}(\zeta)] = I\bar{y}''(\zeta) + B\bar{y}'(\zeta) + C\bar{y}(\zeta) = 0, \quad (2.6)$$

де

$$\bar{y}(\zeta) = \begin{pmatrix} Z_\alpha(\zeta) \\ w_\alpha(\zeta) \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_0\alpha^2 \\ \gamma^{-2}\mu_0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -\gamma^2q_1^2 & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}q_2^2 \end{pmatrix},$$

I – одинична матриця.

Розв'язок векторного рівняння (2.6) будується на основі розв'язку матричного рівняння $L[Y(\zeta)] = 0$. Розв'язок останнього шукаємо у вигляді $Y(\zeta) = e^{s\zeta}I$. Тоді $L[e^{s\zeta}I] = M(s)e^{s\zeta}$, де матриця

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \gamma^2q_1^2 & -\mu_0\alpha^2s \\ \gamma^{-2}\mu_0s & s^2 - \gamma^{-2}q_2^2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язком матричного рівняння буде матриця $Y(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{s\zeta} M^{-1}(s) ds$, де

$$M^{-1}(s) = \frac{1}{(s^2 - q_1^2)(s^2 - q_2^2)} \begin{pmatrix} s^2 - \gamma^{-2}q_2^2 & \mu_0\alpha^2s \\ -\gamma^{-2}\mu_0s & s^2 - \gamma^2q_1^2 \end{pmatrix},$$

C – замкнутий контур, що охоплює прості полюси $s_{1,2} = \pm q_1$ та $s_{3,4} = \pm q_2$.

Відокремлюємо розв'язок, який спадає при $\zeta \rightarrow \infty$, та обчислюємо за допомогою теорії лишків контурні інтеграли для полюсів $s_2 = -q_1$ та $s_4 = -q_2$. Через це отримуємо

$$Y(\zeta) = -\frac{1}{2\chi_2^2} \begin{pmatrix} \alpha^2q_1^{-1}e^{-q_1\zeta} - q_2e^{-q_2\zeta} & -\gamma^2\alpha^2(e^{-q_1\zeta} - e^{-q_2\zeta}) \\ e^{-q_1\zeta} - e^{-q_2\zeta} & -\gamma^2(q_1e^{-q_1\zeta} - \alpha^2q_2^{-1}e^{-q_2\zeta}) \end{pmatrix}.$$

Розв'язком векторного рівняння (2.6) буде вектор $\bar{y}(\zeta) = Y(\zeta) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, де A і B – невідомі сталі. Після задоволення крайовим умовам (2.5), отримуємо розв'язок крайової задачі (2.4) – (2.5)

$$Z_\alpha(\zeta) = \frac{\alpha^2 p_\alpha}{GR(\alpha)} \left[(2\alpha^2 - \chi_2^2) e^{-q_1\zeta} - 2q_1q_2 e^{-q_2\zeta} \right];$$

$$w_\alpha(\zeta) = \frac{q_1 p_\alpha}{GR(\alpha)} \left[(2\alpha^2 - \chi_2^2) e^{-q_1\zeta} - 2\alpha^2 e^{-q_2\zeta} \right], \quad \text{де } R(\alpha) = (2\alpha^2 - \chi_2^2)^2 - 4\alpha^2 q_1 q_2.$$

З метою знайти трансформанту $u_\alpha(\zeta)$ застосуємо перетворення Ганкеля до співвідношення (2.1) та після інтегрування частинами отримуємо

$$Z_\alpha(\zeta) = \alpha \int_0^\infty u(\rho, \zeta) J_1(\alpha\rho) \rho d\rho.$$

Звідки з формул обернення випливає, що

$$u(\rho, \zeta) = \int_0^\infty Z_\alpha(\zeta) J_1(\alpha\rho) d\rho = \frac{1}{G} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 p_\alpha}{R(\alpha)} \left[(2\alpha^2 - \chi_2^2) e^{-q_1\zeta} - 2q_1q_2 e^{-q_2\zeta} \right] J_1(\alpha\rho) d\alpha;$$

$$w(\rho, \zeta) = \frac{1}{G} \int_0^\infty \frac{q_1 p_\alpha}{R(\alpha)} \left[(2\alpha^2 - \chi_2^2) e^{-q_1\zeta} - 2\alpha^2 e^{-q_2\zeta} \right] J_0(\alpha\rho) \alpha d\alpha.$$

Отримані вирази збігаються з наведеними у монографії [20]. Для отримання переміщення на межі пружного півпростору під дією контактного навантаження $p(\rho)$

слід в цих формулах підставити $p_\alpha = \int_0^\infty p(\xi) J_0(\alpha\xi) \xi d\xi$ та покласти $\zeta = 0$

$$w(\rho, 0) = \int_0^\infty K_\zeta(\rho, \xi) p(\xi) \xi d\xi; \quad u(\rho, 0) = \int_0^\infty K_\rho(\rho, \xi) p(\xi) \xi d\xi,$$

де ядра осесиметричної основи мають вигляд

$$K_\zeta(\rho, \xi) = -\frac{\chi_2^2}{G} \int_0^\infty \frac{q_1}{R(\alpha)} J_0(\alpha\xi) J_0(\alpha\rho) \alpha d\alpha; \quad (2.7)$$

$$K_\rho(\rho, \xi) = \frac{1}{G} \int_0^\infty \frac{2\alpha^2 - \chi_2^2 - 2q_1q_2}{R(\alpha)} J_0(\alpha\xi) J_1(\alpha\rho) \alpha^2 d\alpha.$$

Якщо прирівняти нулю знаменник $R(\alpha) = (2\alpha^2 - \chi_2^2)^2 - 4\alpha^2 q_1 q_2 = 0$ у виразах (2.7), отримаємо відоме рівняння Релея [20]. Його коренем є число $\alpha = \chi_R = a\omega c_R^{-1}$, пов'язане зі швидкістю c_R поширення хвиль Релея ($\chi_1 < \chi_2 < \chi_R$).

Перетворимо вирази (2.7). Враховуючи поведінку підінтегральних функцій при $\alpha \rightarrow \infty$, виділимо в них частини, що слабо збігаються

$$K_\zeta(\rho, \xi) = \frac{1 + \mu_0}{2G\mu_0} \left[W_{00}(\rho, \xi) + \int_0^\infty \frac{R_1(\alpha)}{R(\alpha)} J_0(\alpha\xi) J_0(\alpha\rho) d\alpha \right]; \quad (2.8)$$

$$K_\rho(\rho, \xi) = -\frac{1}{2G\mu_0} \left[W_{10}(\rho, \zeta) - (1 + \mu_0) \int_0^\infty \frac{R_2(\alpha)}{R(\alpha)} J_0(\alpha\xi) J_1(\alpha\rho) d\alpha \right].$$

Тут $W_{0j}(\rho, \xi) = \int_0^\infty J_0(\alpha\xi) J_j(\alpha\rho) d\alpha$, $j=0, 1$ – розривний інтеграл Вебера – Шафхейтліна,

$$R_1(\alpha) = 2(\chi_1^2 - \chi_2^2)\alpha q_1 - (2\alpha^2 - \chi_2^2)^2 + \alpha^2 q_1 q_2;$$

$$R_2(\alpha) = 4\alpha^4 - 2\alpha^2(\chi_1^2 + \chi_2^2 + 2q_1 q_2) + \chi_1^2 \chi_2^2.$$

При цьому $R_j(\alpha) R^{-1}(\alpha) = O(\alpha^{-2})$, $j=1, 2$. Це дає можливість ефективного застосування методу контурного інтегрування для їх обчислення.

У формулах (2.8) підінтегральні функції містять багатозначні функції $q_j = \sqrt{\alpha^2 - \chi_j^2}$, $j=1, 2$, що мають точки розгалуження $\alpha = \pm\chi_1$ та $\alpha = \pm\chi_2$, а також вони мають простий полюс у точці $\alpha = \chi_R$. У площині комплексного змінного $\alpha = \beta + i\tau$ проведемо розрізи, що попарно з'єднують точки розгалуження, та зафіксуємо гілки багатозначних функцій: $q_1 > 0$ коли $|\alpha| > \chi_1$ і $q_2 > 0$ коли $|\alpha| > \chi_2$, $q_1 = i\sqrt{\chi_1^2 - \alpha^2}$, $q_2 = i\sqrt{\chi_2^2 - \alpha^2}$ на верхніх берегах розрізів і $q_1 = -i\sqrt{\chi_1^2 - \alpha^2}$, $q_2 = -i\sqrt{\chi_2^2 - \alpha^2}$ на нижніх берегах розрізів. При такій фіксації від місця застосування навантаження енергія йтиме в нескінченність з кожним з двох можливих типів хвиль. Для того, щоб

потік енергії в релєвській хвилі був спрямований від місця застосування навантаження, введемо в середовище згасання [1]. Далі, продовживши підінтегральні вирази у (2.8) на проміжок $(-\infty; 0)$ і проводячи інтегрування в комплексній площині з розрізами, отримуємо

$$\begin{aligned}
K_{\xi}(\rho, \xi) &= \frac{1+\mu_0}{2G\mu_0} \left[W_{00}(\rho, \xi) + \pi i \frac{R_1(\chi_R)}{R'(\chi_R)} J_0(\chi_R \xi) J_0(\chi_R \rho) + \right. \\
&+ 2i(\chi_2^2 - \chi_1^2) \int_0^{\chi_1} \frac{\alpha \sqrt{\chi_1^2 - \alpha^2}}{(2\alpha^2 - \chi_2^2)^2 + 4\alpha^2 \sqrt{\chi_1^2 - \alpha^2} \sqrt{\chi_2^2 - \alpha^2}} J_0(\alpha \xi) J_0(\alpha \rho) d\alpha + \\
&\left. + 8i(\chi_2^2 - \chi_1^2) \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{\alpha^3 (\alpha^2 - \chi_1^2) \sqrt{\chi_2^2 - \alpha^2}}{(2\alpha^2 - \chi_2^2)^4 + 16\alpha^4 (\alpha^2 - \chi_1^2) (\chi_2^2 - \alpha^2)} J_0(\alpha \xi) J_0(\alpha \rho) d\alpha \right]; \quad (2.9) \\
K_{\rho}(\rho, \xi) &= -\frac{1}{2G\mu_0} \left[W_{10}(\rho, \xi) - (1+\mu_0) \pi i \frac{R_2(\chi_R)}{R'(\chi_R)} J_0(\alpha \xi) J_1(\alpha \rho) + \right. \\
&\left. + (1+\mu_0) (\chi_2^2 - \chi_1^2) i \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{\alpha^2 (2\alpha^2 - \chi_2^2) \sqrt{\alpha^2 - \chi_1^2} \sqrt{\chi_2^2 - \alpha^2}}{(2\alpha^2 - \chi_2^2)^4 + 16\alpha^4 (\alpha^2 - \chi_1^2) (\chi_2^2 - \alpha^2)} J_0(\alpha \xi) J_1(\alpha \rho) d\alpha \right].
\end{aligned}$$

Для отримання залежності від часу слід вирази (2.9) помножити на $e^{i\omega t}$. Після отримання виразів для вертикального та радіального переміщень поверхні пружного півпростору, приступимо до розв'язку контактних задач.

§3. Контактна задача для кругового штамп.

Нехай в пружний півпростір вдавлюється круговий штамп, який в безрозмірних координатах займає область $0 \leq \rho < 1$. Для знаходження невідомого контактного напруження $p(\rho)$ по аналогії зі статичною постановкою [3] маємо інтегральне рівняння

$$2\pi \int_0^1 K_{\xi}(\rho, \xi) p(\xi) \xi d\xi = \delta_0, \quad 0 \leq \rho < 1.$$

Рівняння руху штамп

$$2\pi a^2 \int_0^1 p(\rho) \rho d\rho = P + m_0 \omega^2 \delta_0, \quad (3.1)$$

де m_0 маса штамп, дає додаткову умову для знаходження величини δ_0 .

Враховуючи подання (2.9), інтегральне рівняння запишемо у вигляді

$$\int_0^1 [W_{00}(\rho, \xi) + iM(\rho, \xi)] p(\xi) \xi d\xi = \frac{G}{2\pi(1-\mu)} \delta_0, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (3.2)$$

де

$$\begin{aligned}
M(\rho, \xi) &= \pi \frac{R_1(\chi_R)}{R'(\chi_R)} J_0(\chi_R \xi) J_0(\chi_R \rho) + \\
&+ 2(\chi_2^2 - \chi_1^2) \int_0^{\chi_1} \frac{\alpha \sqrt{\chi_1^2 - \alpha^2}}{(2\alpha^2 - \chi_2^2)^2 + 4\alpha^2 \sqrt{\chi_1^2 - \alpha^2} \sqrt{\chi_2^2 - \alpha^2}} J_0(\alpha \xi) J_0(\alpha \rho) d\alpha +
\end{aligned}$$

$$+8(\chi_2^2 - \chi_1^2) \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{\alpha^3 (\alpha^2 - \chi_1^2) \sqrt{\chi_2^2 - \alpha^2}}{(2\alpha^2 - \chi_2^2)^4 + 16\alpha^4 (\alpha^2 - \chi_1^2) (\chi_2^2 - \alpha^2)} J_0(\alpha\xi) J_0(\alpha\rho) d\alpha.$$

Відзначимо, що ядро інтегрального рівняння (3.2) є комплексним, але тоді контактне напруження $p(\rho)$ і переміщення δ_0 також будуть комплексними величинами.

Наявність спектрального співвідношення

$$\int_0^1 W_{00}(\rho, \xi) \frac{P_{2n}(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} \xi d\xi = \lambda_n P_{2n}(\sqrt{1-\rho^2}); \quad \lambda_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2, \quad n \geq 1,$$

де $P_n(\xi)$ є многочлени Лежандра, дає можливість застосувати до розв'язання рівняння (3.2) метод ортогональних многочленів [4]. Згідно з цим методом розв'язок шукаємо у вигляді розвинення

$$p(\rho) = \frac{\delta_0}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{n=0}^{\infty} P_n P_{2n}(\sqrt{1-\rho^2}). \quad (3.3)$$

Реалізуючи схему методу ортогональних многочленів, приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розвинення (3.3)

$$g_m + i \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} g_n = \frac{G}{2\pi(1-\mu)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta_{m0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad \delta_{m0} = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 0, & m > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Тут

$$g_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{4m+1}} p_m; \quad A_{mn} = \sqrt{\frac{(4m+1)(4n+1)}{\lambda_m \lambda_n}} \int_0^1 \frac{P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho d\rho \int_0^1 M(\rho, \xi) \frac{P_{2n}(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} \xi d\xi.$$

При обчисленні коефіцієнтів A_{mn} можуть бути використані інтеграли

$$\int_0^1 \frac{P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}} J_0(\alpha\rho) \rho d\rho = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} J_{2m+\frac{1}{2}}(\alpha).$$

Після розв'язання системи (3.4) та знаходження контактного напруження

$$p(\rho) = \frac{\delta_0}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^{\infty} g_m \sqrt{\frac{4m+1}{\lambda_m}} P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2})$$

з рівняння (3.1) знаходимо переміщення

$$\delta_0 = \frac{P}{2a^2 g_0 \sqrt{2\pi - m_0 \omega^2}}.$$

Оскільки коефіцієнт δ_0 є комплексним, то це переміщення можна записати у вигляді $\delta(t) = |\delta_0| e^{i(\omega t + \psi)}$, де $\psi = \arg \delta_0$ є кут зсуву фаз між штампом, що коливається, та прикладеною до нього силою P , а $|\delta_0|$ є амплітуда коливань.

§4. Контактна задача для кільцевого штапу.

Нехай тепер в пружній півпростір вдавлюється кільцевий штамп, який в безрозмірних координатах займає область $\varepsilon < \rho < 1$, $\varepsilon = ba^{-1}$. В цьому випадку рівняння для знаходження контактного напруження та переміщення штапу мають наступний вигляд

$$\int_{\varepsilon}^1 [W_{00}(\rho, \xi) + iM(\rho, \xi)] p(\xi) \xi d\xi = \frac{G}{2\pi(1-\mu)} \delta_0, \quad \varepsilon \leq \rho < 1; \quad (4.1)$$

$$2\pi a^2 \int_{\varepsilon}^1 p(\rho) \rho d\rho = P + m_0 \omega^2 \delta_0. \quad (4.2)$$

Для розв'язання інтегрального рівняння (4.1) використаємо, що

$$W_{00}(\rho, \xi) = \frac{2}{\pi(\rho + \xi)} K\left(\frac{2\sqrt{\rho\xi}}{\rho + \xi}\right),$$

де $K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ повний еліптичний інтеграл I-го роду.

Підставимо це подання в інтегральне рівняння та зробимо в ньому заміни змінної, яка зводить проміжок інтегрування $(\varepsilon; 1)$ до проміжку $(-1; 1)$

$$\rho = \varepsilon \exp\left(\frac{1+x}{\lambda}\right); \quad \xi = \varepsilon \exp\left(\frac{1+y}{\lambda}\right); \quad \lambda = -\frac{2}{\ln \varepsilon}.$$

Прийдемо до інтегрального рівняння

$$\int_{-1}^1 \left[\operatorname{sch} \frac{x-y}{2\lambda} K\left(\operatorname{sch} \frac{x-y}{2\lambda}\right) + iM^*(x, y) \right] p^*(y) dy = h(x) \delta_0, \quad -1 < x < 1, \quad (4.3)$$

де

$$M^*(x, y) = \pi \varepsilon \exp\left(\frac{x+y+2}{2\lambda}\right) M\left(\varepsilon \exp\left(\frac{1+x}{\lambda}\right), \varepsilon \exp\left(\frac{1+y}{\lambda}\right)\right);$$

$$p^*(y) = \exp\left(\frac{1+y}{2\lambda}\right) p\left(\varepsilon \exp\left(\frac{1+y}{\lambda}\right)\right); \quad h(x) = \frac{G\lambda}{2(1-\mu)} \exp\left(\frac{1+x}{2\lambda}\right); \quad \operatorname{sch}(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}.$$

З теорії повних еліптичних інтегралів відомо, що ядро інтегрального рівняння (4.3) $l(x) = \operatorname{sch}\left(\frac{x}{2\lambda}\right) K\left(\operatorname{sch}\left(\frac{x}{2\lambda}\right)\right)$ має логарифмічну особливість в точці $x=0$ та

може бути представлено у вигляді $l(x) = \ln \frac{1}{|x|} + l^*(x)$, де функція $l^*(x)$ парна, неперервна разом зі своєю похідною та $\lim_{x \rightarrow 0} l^*(x) = \ln(8\lambda)$. Отже, рівняння (4.1) можна

записати у вигляді

$$\int_{-1}^1 \left[\ln \frac{1}{|x-y|} + l^*(x-y) + iM^*(x, y) \right] p^*(y) dy = h(x) \delta_0, \quad -1 < x < 1. \quad (4.4)$$

Вид сингулярної частини ядра та наявність спектрального співвідношення

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = \sigma_n T_n(x), \quad \sigma_n = \begin{cases} \pi \ln 2, & n=0; \\ \frac{\pi}{n}, & n=1, 2, \dots, \end{cases}$$

де $T_n(x)$ є многочлени Чебишева I-го роду, також дає нам можливість використання методу ортогональних многочленів для розв'язання інтегрального рівняння (4.4).

Розв'язок шукаємо у вигляді розвинення

$$p^*(y) = \frac{\delta_0}{\sqrt{1-y^2}} \sum_{n=0}^{\infty} p_n^* T_n(y).$$

Реалізуючи схему цього методу, приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розвинення

$$g_m + \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^* g_n = h_m^*, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Тут

$$A_{mn}^* = \frac{1}{\sqrt{\gamma_m \gamma_n}} \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \int_{-1}^1 [I^*(x-y) + iM^*(x,y)] \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy, \quad g_m = \sqrt{\gamma_m} p_m^*;$$

$$h_m^* = \frac{1}{\sqrt{\gamma_m}} \int_{-1}^1 h(x) \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\gamma_m}} \frac{G\pi\lambda}{2(1-\mu)} e^{\frac{1}{2\lambda}} I_m\left(\frac{1}{2\lambda}\right); \quad \gamma_m = \pi^2 \begin{cases} \ln 2, & m = 0; \\ (2m)^{-1}, & m > 0; \end{cases}$$

$I_m(x)$ – модифікована функція Бесселя.

Враховуючи проведені заміни, умова (4.2) рівноваги штампу набуде вигляду

$$2\pi a^2 \varepsilon^2 \lambda^{-1} \int_{-1}^1 p^*(x) \exp\left(3 \frac{1+x}{2\lambda}\right) dx = P + m_0 \omega^2 \delta_0. \quad (4.6)$$

Розв'язавши систему (4.5) та знайшовши контактне напруження

$$p_n^*(x) = \frac{\delta_0}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{\sqrt{\gamma_n}} T_n(x),$$

з умови (4.6) знаходимо

$$\delta_0 = P \left[2\pi^2 a^2 \varepsilon^2 \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{\sqrt{\gamma_n}} I_n\left(\frac{3}{2\lambda}\right) - m_0 \omega^2 \right]^{-1}.$$

Так само як і у випадку кругового штампу, ми можемо записати

$$\delta(t) = |\delta_0| e^{i(\omega t + \psi)}; \quad \psi = \arg \delta_0.$$

§5. Числові результати.

Слід зазначити, що недіагональні елементи матриць нескінченних систем (3.4) та (4.5) швидко зменшуються, тому для розв'язання їх методом редукції достатньо було взяти 4–5 рівнянь.

Для числової ілюстрації результатів побудованих розв'язків припустимо, що для пружного півпростору $\mu = 0,25$ і $c_2 = 1000$ м/с. Радіус кругового штампу візьмемо $a = 5$ м, радіуси кільцевого штампу – $b = 3$ м і $a = 5$ м. В обох випадках величина прикладеної сили $P = 400$ кг. Графіки амплітуд контактних напружень, поділених на G , тобто $A = |p(\rho)| G^{-1}$, представлені на рис. 1 (круговий штамп) і рис. 2 (кільцевий штамп). На обох графіках крива 1 відповідає випадку $\omega = 10$ с⁻¹, $m_0 = 100$ кг, крива 2 – випадку $\omega = 10$ с⁻¹, $m_0 = 200$ кг, а криві 3 і 4 – випадкам $\omega = 20$ с⁻¹, $m_0 = 100$ кг та $\omega = 20$ с⁻¹, $m_0 = 200$ кг, відповідно.

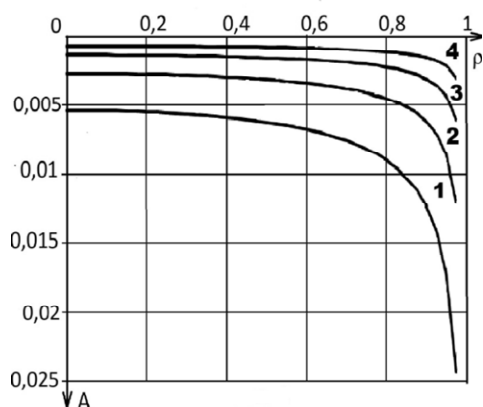


Рис. 1

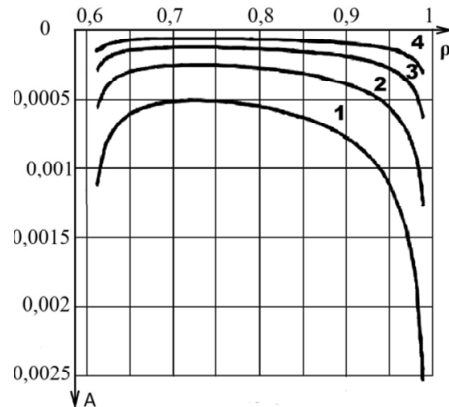


Рис. 2

З результатів обчислень випливає, що амплітуди контактних напружень зменшуються, коли збільшується частота або маса штамп. Також зі збільшенням частоти зменшується і амплітуда $|\delta_0|$ переміщення на межі пружного півпростору.

The research is supported by European project funded by Horizon 2020 Framework Programme for Research and Innovation (2014-2020) (H2020-MSCA-RISE-2020) Grant Agreement number 101008140 EffectFact «Effective Factorisation techniques for matrix-functions: Developing theory, numerical methods and impactful applications».

РЕЗЮМЕ. Розглянуто осесиметричну контактну задачу про усталені коливання кругового або кільцевого штамп на пружному півпросторі без врахування сил тертя. Отримано зручні та ефективні формули для переміщень пружної основи. Ці формули використано при формулюванні інтегральних рівнянь відносно невідомого контактного напруження, що дозволило застосувати для розв'язання метод ортогональних многочленів. Проведено дослідження залежності амплітуд контактних напружень від маси та частоти коливань штамп.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динамічна контактна задача, круговий або кільцевий штамп, сингулярне інтегральне рівняння, метод ортогональних многочленів.

1. Гринченко В.Г., Мелешко В.В. Гармонічні коливання та хвилі в пружних тілах. – Київ: Наук. думка, – 1981. – 284 с.
2. Мартиняк Р.М., Маланчук Н.І., Кузьменко В.І., Михальчук Г.Й., Чумак К.А., Ткачук М.М., Стреляєв Ю.М., Клімчук Т.В., Острик В.І., Щокотова О.М. Контактна механіка. Фрикційна і адгезійна взаємодія поверхонь. – Львів: Видавництво Вікторія Кундельська, 2022. – 254 с.
3. Попов Г.Я. Контактні задачі для лінійно-деформівної основи. – Київ, Вища школа, 1982. – 167 с.
4. Попов Г.Я., Реут В.В., Моїсєєв М.Г., Вайсфельд Н.Д. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів. – Одеса: Астропрінт, 2010. – 120 с.
5. Сеймов В.Н. Динамічні контактні задачі. – Київ: Наук. думка, 1976. – 284 с.
6. Улітко А.Ф. Векторні розкладення в просторовій теорії пружності. – Київ: Академперіодика, 2002. – 264 с.
7. Aimi A., Credico G.Di., Gimperlain H. Time domain boundary elements for elastodynamic contact // Computer Methods in Appl. Mech. and Engng. – 2023. – 415. – 116296.
8. Abide S., Barboteu M., et al. Inexact primal-dual active set method for solving elastodynamics frictional contact problems // Computers and Mathem. with Applications. – 2021. – 82. – P. 36 – 59.
9. Argatov I.I. Asymptotic Models of Contact Interaction among Elliptic Punches on a Semiclassical Foundation // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, N 1. – P. 67 – 83.
10. Babych S.Yu., Yarets'ka N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 3. – P. 297 – 305.

11. *Babych S.Yu., Dikhtyaruk N.N., Degtyar S.V.* Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 6. – P. 629 – 635.
12. *Balci M.N.* The influence of interface stiffness ratio on elastodynamic contact mechanics of graded coatings // *Surface and Coating Technologies.* – 2019. – **375**. – P. 489 – 507.
13. *Bower A.* *Applied Mechanics of Solids.* – New York: CRC Press, 2012. – 794 p.
14. *Galin L., Moss H., Sneddon I.* *Contact Problems in the Theory of Elasticity.* – Raleigh: North Carolina State College, 1961. – 233 p.
15. *Gladwell G.M.L.* *Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity.* – New York: Springer Science and Business Media, 1980. – 716 p.
16. *Guz A.N.* *Fundamentals of the Three-dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies.* – Berlin: Springer Science and Business Media, 2013. – 557 p.
17. *Guz A.N., Rudnitsky T.V.* Contact Interaction for an Elastic Punch and an Elastic Half-space with Initial (Residual) Stresses // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 12. – P. 1325 – 1335.
18. *Johnson K.L.* *Contact Mechanics.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 452 p.
19. *Kubenko V.D., Marchenko T.A.* Nonstationary Indentation of a Blunt Rigid Body into an Elastic Layer: an Anaxisymmetric Problem // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 7. – P. 747 – 756.
20. *Nowacki W.* *Teoria Sprezystosci.* – Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970. – 872 p.
21. *Ostrik V., Ulitko A.* *Wiener-Hopf Method in Contact Problems of Elasticity.* – Kyiv: Nauk. dumka, 2006. – 328 p.
22. *Popov G.Ya.* New Transforms for the Resolving Equations in Elastic Theory and New Integral Transforms, with Applications to Boundary-Value Problems of Mechanics // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 12. – P. 1400 – 1424.

Надійшла 11.08.2023

Затверджена до друку 16.04.2024

