

О.Л.Кіпніс

**АНАЛІЗ ТОЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОНТАКТ З ВІДРИВОМ НА
НАПІВНЕСКІНЧЕНОМУ ПРОМІЖКУ ДВОХ ПРУЖНИХ СМУГ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: a.l.kipnis@gmail.com*

Abstract. A smooth receding contact of two different elastic strips under the action of a load uniformly distributed over a semi-infinite interval on the upper edge of the upper strip is considered. Based on the exact solution of the problem, a nature of the change of contact stresses and the dependence of the separation parameter on the elastic modulus of materials is studied for different values of the ratio of the thicknesses and rigidities of the strips. In particular, the limiting cases are considered when the ratio of strip rigidities and the ratio of their thickness increase indefinitely.

Key words: receding contact, elastic strip, contact stress, Wiener – Hopf method, asymptotic behavior of the roots of transcendental equations.

Вступ.

Контакт з відривом [1] – явище при якому область контакту зменшується під дією навантаження, а розмір цієї області при цьому не залежить від величини навантаження. Наявність відриву при взаємодії двох тіл можна встановити при розв'язанні відповідної задачі контактної механіки у спрощеній постановці, коли припускається відсутність відриву. При аналізі поведінки контактних напружень задачі виявиться, що в певній частині області контакту ці напруження додатні, що свідчить про наявність безконтактних зон між поверхнями тіл, що контактують. Так, в задачі про пружну смугу, що без тертя лежить на жорсткій основі та знаходиться під дією рівномірно розподіленого на напівнескінченному проміжку навантаження контактні напруження є від'ємними лише на напівнескінченному інтервалі, що є проекцією інтервалу дії навантаження на спільну межу смуги і основи та на скінченному відрізку поза цим інтервалом, довжина якого складає 0,903 від ширини смуги. Розв'язання ж відповідної задачі за наявності відриву [4] дає точне значення указанного параметру – 0,391 від ширини пружної смуги.

Вперше контакт з відривом досліджується в роботах [2, 18], присвячених задачам про дію відповідно зосередженої сили та штампа на пружну смугу, що лежить на пружній півплощині. З обох боків поза скінченим інтервалом контакту спостерігається відрив смуги від півплощини. Також у [2] розглянуто осесиметричну задачу про контакт з відривом пружного шару та півпростору і круговою областю контакту між ними.

В роботі [15] досліджено контакт жорсткого кругового диска і пружної смуги, яка спирається на дві опори. Відрив смуги від диску відбувається в середній частині області контакту.

В [16, 17] розглянуто симетричні задачі про фрикційний контакт з відривом пружної смуги та пружної півплощини з ідентичними пружними сталими. В роботі [16] навантаження рівномірно розподілене в усіх точках верхньої межі смуги окрім інтервалу скінченної довжини. В роботі [17] смуга знаходиться під дією навантаження, розподіленого на скінченному інтервалі; розглядаються три різні типи геометрії навантаження.

В [13] розглянуто осесиметричну задачу про фрикційний контакт з відривом пружного напівнескінченного шару від такого ж пружного півпростору під дією на шар зосередженої сили, в [14] – під дією навантаження, що рівномірно розподілене всюди, крім диску скінченного радіусу, в [12] – під дією навантаження, що рівномірно розподілене всередині диску скінченного радіусу.

В роботі [4] з використанням методу Вінера – Гопфа побудовано точний розв’язок задачі про контакт з відривом пружної смуги та жорсткої основи при дії на смугу розподіленого на напівнескінченному проміжку навантаження сталої інтенсивності.

Задачі про контакт з відривом *двох різних смуг* в літературі не розглядалися.

Разом з тим, явище відриву є типовим, наприклад, для шаруватих композитів, коли за наявності біля вільної кромки деталі зони непростежування, довжина якої значно перевищує товщину шарів композита, між шарами композита відбувається міжфазне тріскування матеріалу [11].

В представленій роботі досліджується гладкий контакт з відривом двох різних пружних смуг. Вважається, що нижня межа нижньої смуги жорстко зашкреплена, а верхня межа верхньої смуги перебуває під дією навантаження сталої інтенсивності, яке розподілене на напівнескінченному проміжку. На певній відстані (яка потребує визначення) від проекції точки кінця прикладання навантаження на спільну межу смуг відбувається відрив верхньої смуги від нижньої.

Нижче на основі точного розв’язку відповідної плоскої задачі лінійної теорії пружності, побудованого за допомогою методу Вінера – Гопфа та одержаної в [3] формули для визначення контактних напружень, а також рівняння для встановлення відстані від проекції точки кінця прикладання навантаження на спільну межу смуг до точки початку відриву досліджено характер зміни контактних напружень і залежність указаної відстані від відношення модулів зсуву матеріалів смуг та від відношення товщини однієї смуги до товщини іншої. Проаналізовано граничні випадки, коли одна зі смуг є абсолютно жорсткою та коли одна із смуг є набагато товщою за іншу. Для ефективного проведення числових підрахунків одержано формули для асимптотичної поведінки коренів трансцендентних рівнянь, які фігурують в задачі.

§1. Постановка задачі і її точний розв’язок.

В умовах плоскої деформації в рамках статичної задачі лінійної теорії пружності розглянемо гладкий контакт двох нескінченних в горизонтальному напрямку пружних смуг: $0 \leq y \leq h_1$ та $-h_2 \leq y \leq 0$. Матеріали смуг характеризуються коефіцієнтами Пуассона ν_1 та ν_2 , відповідно, та модулями зсуву G_1 та G_2 . Верхня грань $y = h_1$ верхньої смуги знаходиться під дією розподіленого на напівнескінченному проміжку навантаження сталої інтенсивності p , в той час як нижня грань $y = -h_2$ нижньої смуги жорстко зашкреплена. Припустимо, що на проміжку $0 < x < \infty$ нижньої межі $y = 0$ верхньої смуги, віддаленому на відстань l_1 від проекції $x = -l_1$ точки кінця прикладання навантаження, відбувається відрив першої смуги від другої (рис. 1). Розмір l_1 наперед невідомий і підлягає визначенню.

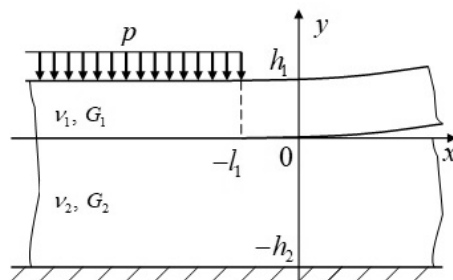


Рис. 1

Граничні умови сформульованої задачі наступні:

$$\sigma_y^{(1)} \Big|_{y=h_1} = \begin{cases} -p, & x \leq -l_1, \\ 0, & x > -l_1, \end{cases} \quad \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0, h_1} = 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad (1.1)$$

$$u_y^{(1)} \Big|_{y=0} = u_y^{(2)} \Big|_{y=0}, \quad -\infty < x \leq 0; \quad \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = \sigma_y^{(2)} \Big|_{y=0}, \quad -\infty < x \leq 0;$$

$$\sigma_y^{(1,2)} \Big|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < \infty; \quad \tau_{xy}^{(2)} \Big|_{y=0} = 0, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$u_y^{(2)} \Big|_{y=-h_2} = 0, \quad u_x^{(2)} \Big|_{y=-h_2} = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

де верхній індекс «1» відповідає верхній, а індекс «2» – нижній смузі.

Точний аналітичний розв'язок сформульованої задачі теорії пружності побудовано в [3] за допомогою метода Вінера – Гопфа [6] у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Фур'є [8, 9] та методів теорії аналітичних функцій [5, 10].

Має місце наступне рівняння для визначення невідомого розміру $l_1 = h_1 a^*$ – відстані від проекції точки кінця прикладання навантаження на спільну межу смуг до точки початку відриву:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^*(s_k^*) e^{-is_k^* a^*}}{s_k^{*3} \Delta^*(s_k^*) K^-(s_k^*)} = 0 \quad (1.2)$$

та формула для нормальних напружень в області контакту $x < 0$:

$$\sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = \begin{cases} p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{s_k^* \Delta^*(s_k^*)} \left[\lambda_1^*(s_k^*) e^{-is_k^* (\xi+a)} - i \Phi^+(-s_k^*) \lambda^*(s_k^*) e^{is_k^* \xi} \right], & -a^* \leq \xi < 0, \\ p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{s_k^* \Delta^*(s_k^*)} \left[-\lambda_1^*(s_k^*) e^{is_k^* (\xi+a)} - i \Phi^+(-s_k^*) \lambda^*(s_k^*) e^{is_k^* \xi} \right] - p, & \xi < -a^* \end{cases} \quad (1.3)$$

(всі величини та функції, що фігурують в указаних представленнях, визначені в роботі [3]).

§2. Асимптотична поведінка коренів двох трансцендентних рівнянь.

Для числового підрахунку значень функцій, що входять в вирази (1.2) і (1.3), необхідною є наявність значень коренів наступних трансцендентних рівнянь:

$$\lambda^*(\tau) \equiv (\text{sh}^2 \tau - \tau^2) \Delta_1(\tau) = 0; \quad (2.1)$$

$$\Delta^*(\tau) \equiv (\text{sh} 2\tau + 2\tau) \Delta_1(\tau) + 2 \frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} \frac{G_1}{G_2} [(3-4\nu_2) \text{sh} 2\alpha\tau - 2\alpha\tau] (\text{sh}^2 \tau - \tau^2) = 0; \quad (2.2)$$

$$\Delta_1(\tau) = (3-4\nu_2)(\text{ch} 2\alpha\tau - 1) + 2(\alpha\tau)^2 + 8(1-\nu_2)^2, \quad \alpha = h_2/h_1,$$

які містять елементарні гіперболічні та степеневі функції. Кожне з рівнянь (2.1), (2.2) має скінченну кількість дійсних та зліченну кількість комплексних коренів.

Зазначимо, що якщо значення τ_0 є коренем рівняння (2.1) або (2.2), то коренями відповідного рівняння будуть також $-\tau_0$ та їх комплексно спряжені значення $\bar{\tau}_0$,

$-\bar{\tau}_0$. Виходячи з означеної симетричності гілок рівнянь (2.1) та (2.2) далі будемо досліджувати лише корені цих рівнянь з першої координатної чверті комплексної площини ($\operatorname{Re} \tau \geq 0, \operatorname{Im} \tau > 0$).

В ході числового дослідження параметрів задачі було реалізовано процедуру, відповідно до якої перші за модулем значення коренів рівнянь (2.1) та (2.2) знаходяться за допомогою методу Ньютона, значення ж наступних коренів цих трансцендентних рівнянь (після досягнення достатньої точності наближення) знаходяться за допомогою асимптотичних формул, отриманих за методикою, викладеною у [7].

Розглянемо рівняння (2.1).

Асимптотичні формули для коренів, породжених першим множником

$$\operatorname{sh}^2 \tau - \tau^2 \equiv (\operatorname{sh} \tau - \tau)(\operatorname{sh} \tau + \tau) = 0, \quad (2.3)$$

наведено у [7].

Серед множини коренів, породжених другим множником

$$\Delta_1(\tau) \equiv (3 - 4\nu_2)(\operatorname{ch} 2\alpha\tau - 1) + 2(\alpha\tau)^2 + 8(1 - \nu_2)^2 = 0 \quad (2.4)$$

найменшим за модулем є суто уявний корінь. Асимптотична поведінка коренів цього рівняння з першої координатної чверті ($\operatorname{Re} \tau \geq 0, \operatorname{Im} \tau > 0$) є наступною:

$$\tau_k^{(0)} = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{4\pi^2 k^2}{3 - 4\nu_2} + i \frac{\pi k}{\alpha} + o(1), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

В табл. 1 наведено числові значення перших за модулем коренів рівняння (2.4) з першої чверті, а також асимптотичні значення коренів, отриманих за формулою (2.5) для випадку $\alpha = 1; \nu_2 = 0,3$.

Таблиця 1

k	$\tau_k^{(0)}; \alpha = 1$		k	$\tau_k^{(0)}; \alpha = 1$	
	Числові значення	Асимптотичні значення		Числові значення	Асимптотичні значення
0	0,91278i		6	3,3407+18,672i	3,3357+18,8496i
1	1,4538+2,5704i	1,544+3,1416i	7	3,4943+21,8321i	3,4899+21,9912i
2	2,2331+5,9131i	2,2371+6,283i	8	3,6273+24,9884i	3,6234+25,1327i
3	2,6472+9,1397i	2,6426+9,4249i	9	3,7446+28,1419i	3,7412+28,2743i
4	2,936+12,3311i	2,9303+12,5664i	10	3,8497+31,2934i	3,8466+31,4159i
5	3,1589+15,5062i	3,1534+15,7080i	11	3,9419+34,5575i	3,9447+34,4434i

Отже, множина ζ_k^* , $k = 1, 2, \dots$ коренів рівняння $\lambda^*(s) = 0$ із півплощини $\operatorname{Im} s < 0$ складається з відповідних коренів рівняння (2.3), а також значень $-\tau_k^{(0)}, \overline{\tau_k^{(0)}}$, $k = 1, 2, \dots$.

Проведемо дослідження асимптотичної поведінки коренів рівняння (2.2).

Рівняння $\Delta^*(\tau) = 0$ має простий корінь $\tau_0 = 0$ та дві множини простих коренів, аналогічні за структурою до множини коренів рівняння (2.4). При цьому корінь другої множини з найменшою уявною частиною завжди є суто уявним, а інших суто уявних коренів ці множини не містять.

Асимптотична поведінка першої множини коренів рівняння (2.2) (при $\operatorname{Im} \tau \rightarrow \infty$) з першої координатної чверті ($\operatorname{Re} \tau \geq 0, \operatorname{Im} \tau > 0$) є наступною:

$$\tau_k^{(1)} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left[\frac{4A\pi^2 k^2}{1+A} + \frac{4i\pi k}{1+A} \right] + i\pi(k-1/2) + o(1), \quad k \rightarrow \infty, \alpha > 1;$$

$$\tau_k^{(1)} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left[\frac{4\pi k}{a(1+A)} (\pi k(1-aA) + i(a-A)) \right] + i\pi k + o(1), \quad k \rightarrow \infty, \alpha = 1; \quad (2.6)$$

$$\tau_k^{(1)} = \frac{1}{2\alpha} \operatorname{Ln} \left[\frac{4\pi^2 k^2}{a(1+A)} - \frac{4Ai\pi k}{a(1+A)} \right] + \frac{i\pi k}{\alpha} + o(1), \quad k \rightarrow \infty, \alpha < 1,$$

де $A = \frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} \frac{G_1}{G_2}$; $a = 3 - 4\nu_2$. В наведених вище формулах комплексні логарифми розуміються у сенсі їх головного значення.

Асимптотична поведінка другої множини коренів рівняння (2.2) (при $\operatorname{Re} \tau \rightarrow \infty$) з першої координатної чверті ($\operatorname{Re} \tau \geq 0, \operatorname{Im} \tau > 0$) є наступною:

$$\tau_k^{(2)} = \frac{1}{2\alpha} \ln \left[\frac{4(A+\alpha)}{aA} \pi k \right] + \frac{i\pi(k+1/4)}{\alpha} + o(1), \quad k \rightarrow \infty, \alpha > 1;$$

$$\tau_k^{(2)} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{4(A+1)}{aA-1} \pi k \right] + i\pi(k+1/4) + o(1), \quad k \rightarrow \infty, \alpha = 1; \quad (2.7)$$

$$\tau_k^{(2)} = \frac{1}{2} \ln \left[4 \left(\frac{A}{\alpha} + 1 \right) \pi k \right] + i\pi(k-1/4) + o(1), \quad k \rightarrow \infty, \alpha < 1.$$

В табл. 2 наведено числові значення перших коренів $\tau_k^{(1)}$ першої множини та $\tau_k^{(2)}$ другої множини рівняння (2.2) з першої чверті, а також асимптотичні значення відповідних коренів, отриманих за формулами (2.6), (2.7) для випадку $\alpha = 2$; $G_1/G_2 = 0,5$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

Таблиця 2

k	$\tau_k^{(1)}; \alpha = 2; G_1/G_2 = 0,5$		k	$\tau_k^{(2)}; \alpha = 2; G_1/G_2 = 0,5$	
	Числові значення	Асимптотичні значення		Числові значення	Асимптотичні значення
1	0,7779+1,1718i	1,3736+1,8543i	0	0,4563 i	
2	1,7449+4,5074i	2,0058+4,8665i	1	0,8873+1,9686i	0,8882+1,9635i
3	2,2275+7,688i	2,3982+7,9585i	2	1,0419+3,2086i	1,0615+3,5343i
4	2,5545+10,851i	2,6811+11,0745i	3	1,1515+5,0851i	1,1628+5,1051i
5	2,8015+14,009i	2,902+14,2005i	4	1,2611+6,4687i	1,2347+6,6759i
6	2,9998+17,163i	3,0831+17,3316i	5	1,2674+8,2331i	1,2905+8,2467i
7	3,1655+20,314i	3,2365+20,4657i	6	1,3711+9,6637i	1,3361+9,8175i
8	3,3076+23,464i	3,3696+23,6017i	7	1,3485+11,380i	1,3746+11,3883i
9	3,4321+26,612i	3,487+26,7388i	8	1,4442+12,8356i	1,4080+12,9591i
10	3,5428+29,76i	3,5922+29,8769i	9	1,4109+14,5262i	1,4375+14,5299i
11	3,643+32,907i	3,6873+33,0156i	10	1,4991+15,9966i	1,4638+16,1007i
12	3,7332+36,053i	3,7742+36,1548i	11	1,4614+17,6704i	1,4876+17,6715i

Таким чином множина $s_k^*, k = 1, 2, \dots$ коренів рівняння $\Delta^*(\tau) = 0$ з півплощини $\operatorname{Im} s < 0$ складається зі значень $-\tau_k^{(1)}, \overline{\tau_k^{(1)}}, -\tau_k^{(2)}, \overline{\tau_k^{(2)}}, k = 1, 2, \dots$.

Наявність асимптотичних формул (2.5) – (2.7) для коренів трансцендентних рівнянь (2.3), (2.4) дає змогу використовувати їх у якості нульового наближення при застосуванні методу Ньютона, а також дозволяє контролювати кількість знайдених коренів, запобігаючи їх «втраті» в ході обчислень.

§3. Аналіз одержаних результатів.

З використанням рівняння (1.2) дослідимо спочатку залежність безрозмірної відстані l_1/h_1 між абсцисами точки кінця прикладання навантаження та точки початку відриву від відношення модулів зсуву G_1/G_2 матеріалів смуг при різних (фіксованих) значеннях відношення товщин смуг h_2/h_1 (тут і надалі покладено $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

На рис. 2 показано залежність параметру відриву l_1/h_1 від величини G_1/G_2 для значень $h_2/h_1 = 0,1; 0,3; 0,5; 1$ (верхня смуга товща, рис. 2, а) та значень $h_2/h_1 = 1; 2; 3; 4$ (нижня смуга товща, рис. 2, б).

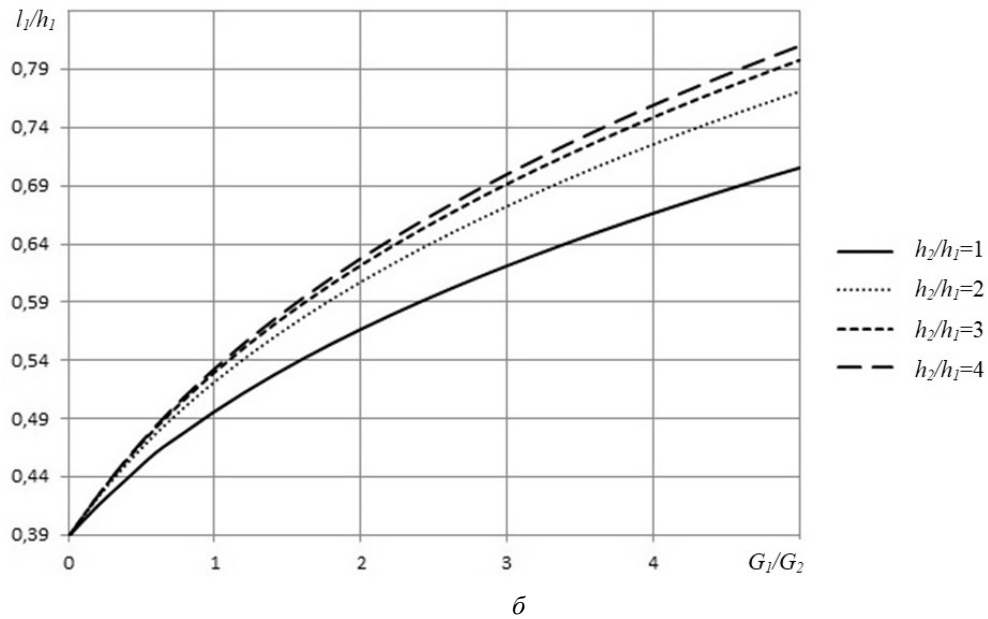
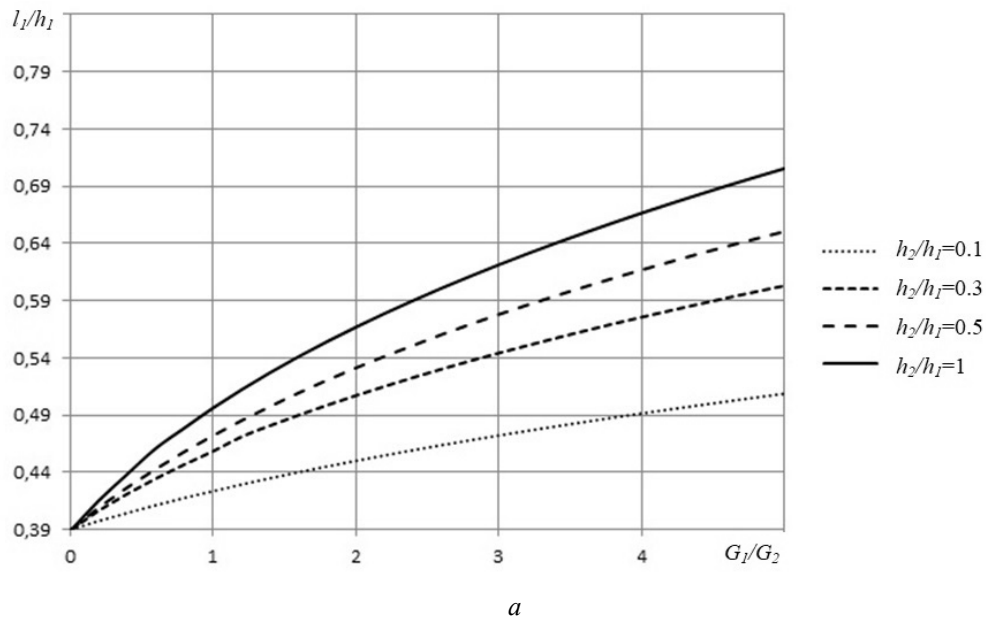


Рис. 2

Аналіз результатів показує, що зі збільшенням жорсткості верхньої смуги по відношенню до жорсткості нижньої відстань l_1/h_1 збільшується для кожного фіксованого значення відношення товщин смуг. В граничному випадку, коли пружна смуга спирається на жорстку основу ($G_2 \rightarrow \infty$), відстань l_1/h_1 прямує до свого граничного значення $l_1/h_1 = 0,3912$ при всіх значеннях відношення товщин смуг, що узгоджується з результатами роботи [4]. В граничному випадку, коли верхня смуга є абсолютно жорсткою, відриву, очікувано, не відбувається ($l_1/h_1 \rightarrow \infty$ при $G_1 \rightarrow \infty$) для всіх значень h_2/h_1 .

Дослідимо тепер залежність параметру відриву l_1/h_1 від відношення товщин смуг при різних (фіксованих) значеннях відношення модулів зсуву смуг.

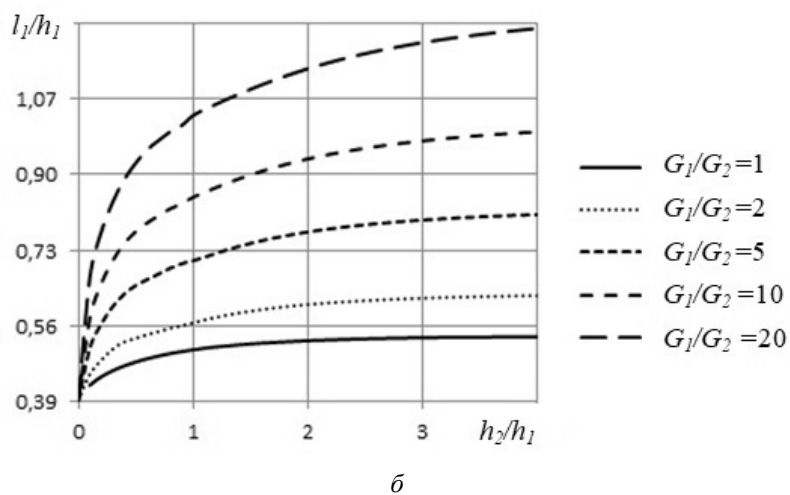
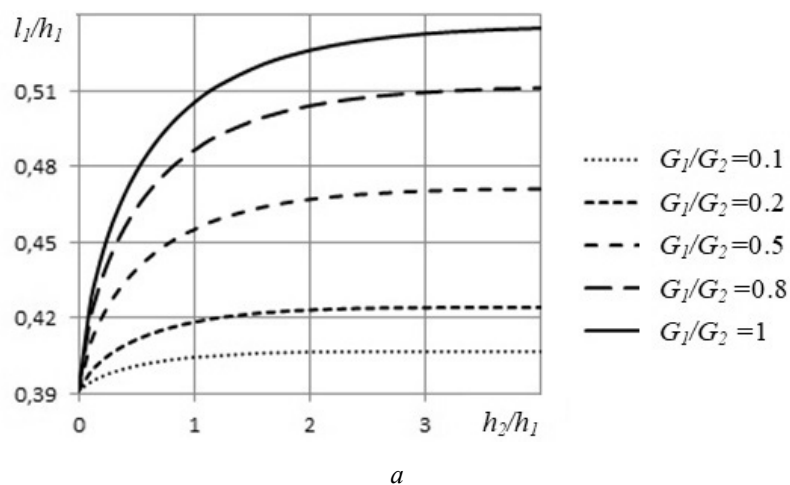


Рис. 3

На графіках рис. 3 показано залежність параметру відриву l_1/h_1 від величини h_2/h_1 для значень $G_1/G_2 = 0,1; 0,2; 0,5; 0,8; 1$ (нижня смуга жорсткіша, рис. 3, а) та значень $G_1/G_2 = 1; 2; 5; 10; 20$ (верхня смуга жорсткіша, рис. 3, б). Результати показують, що зі збільшенням товщини нижньої смуги по відношенню до товщини верхньої,

відстань l_1/h_1 збільшується і для кожного фіксованого значення відношення модулів зсуву G_1/G_2 прямує до свого граничного значення, яке збільшується при збільшенні параметру G_1/G_2 .

Вказані граничні значення (при $h_2/h_1 \rightarrow \infty$) відстані l_1/h_1 від проєкції точки кінця прикладання навантаження на спільну межу смуг до точки початку відриву, віднесеної до товщини верхньої смуги для деяких значень відношення модулів зсуву смуг G_1/G_2 , наведено в табл. 3.

Таблиця 3

G_1/G_2	0,1	0,2	0,5	0,8	1	2	5	10	20
$l_1/h_1 _{h_2/h_1 \rightarrow \infty}$	0,407	0,424	0,471	0,512	0,536	0,628	0,811	0,997	1,240

В протилежному випадку, коли верхня смуга набагато товща за нижню (при $h_2/h_1 \rightarrow 0$) параметр відриву l_1/h_1 прямує до свого граничного значення $l_1/h_1 = 0,3912$ при зменшенні h_2/h_1 для кожного фіксованого значення відношення модулів зсуву G_1/G_2 . Таким чином, відстань від абсциси точки кінця прикладання навантаження, що складає 0,3912 товщини верхньої смуги, є найменшою відстанню, на якій ця смуга, контактуючи з пружною основою, реагує на рівномірно розподілене на напівнескінченному проміжку навантаження відривом.

На графіках рис. 4 наведено залежність безрозмірних контактних напружень $\sigma_c = \sigma_y^{(1)}|_{y=0}/p$ від безрозмірної координати $\xi = x/h_1$, обчислених на підставі формули (1.3). При всіх значеннях змінних параметрів задачі (h_2/h_1 та G_1/G_2) контактні напруження при віддаленні від точки початку відриву верхньої смуги спочатку зменшуються, а потім збільшуються, асимптотично наближаючись до значення $-p$, такого самого, як задані значення нормальних напружень на проміжку $x \leq -l_1$ верхньої межі верхньої смуги.

На графіках рис. 4, а, б проілюстровано характер зміни поведінки контактних напружень задачі в залежності від зміни відношення товщини нижньої смуги до товщини верхньої для випадку коли жорсткість смуг однакова ($G_1/G_2 = 1$, рис. 4, а) та випадку, коли більш жорсткою є нижня смуга ($G_1/G_2 = 0,3$, рис. 4, б).

На графіку рис. 4, в проілюстровано характер зміни поведінки контактних напружень задачі в залежності від зміни відношення жорсткості нижньої смуги до жорсткості верхньої для $h_2/h_1 = 1$.

Як демонструють графіки на рис. 4, що більша товщина верхньої смуги по відношенню до товщини нижньої, тим більшими є контактні напруження; що жорсткіша нижня смуга по відношенню до верхньої, тим більшими є контактні напруження. Відстань від точки початку відриву до точки максимальної концентрації контактних напружень зменшується зі збільшенням жорсткості нижньої смуги по відношенню до жорсткості верхньої та зменшується зі збільшенням товщини верхньої смуги. Значення абсолютної величини максимальних контактних напружень зі зростанням параметру h_2/h_1 спочатку збільшується, а потім зменшується, досягаючи свого максимуму у випадку рівнотовстих смуг ($h_2/h_1 = 1$). При цьому значення найбільших за модулем контактних напружень не відрізняється від значення p більше, ніж на 4% для всіх випадків, що досліджувалися.

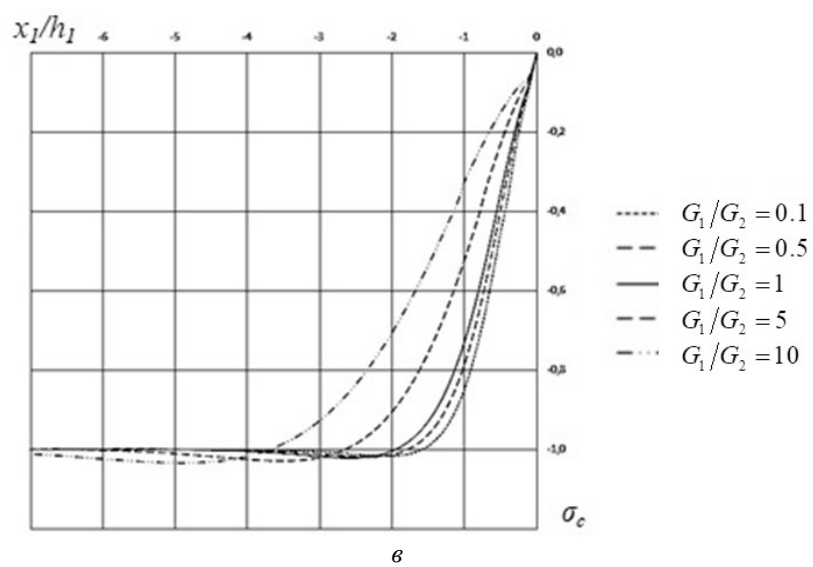
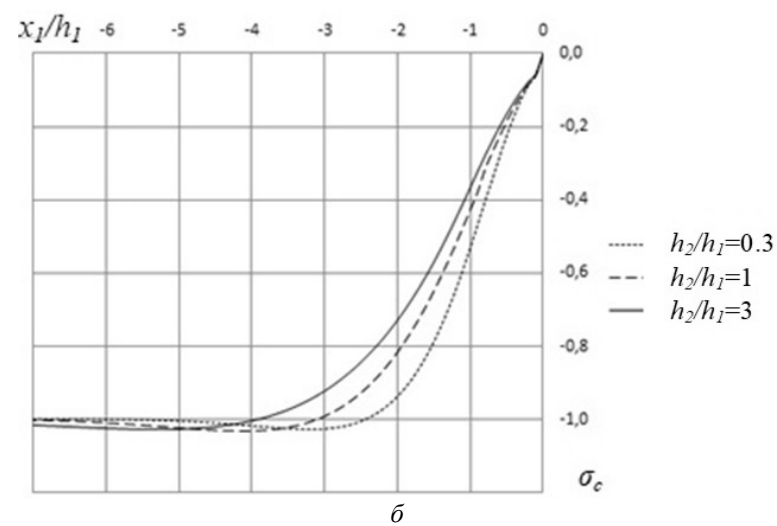
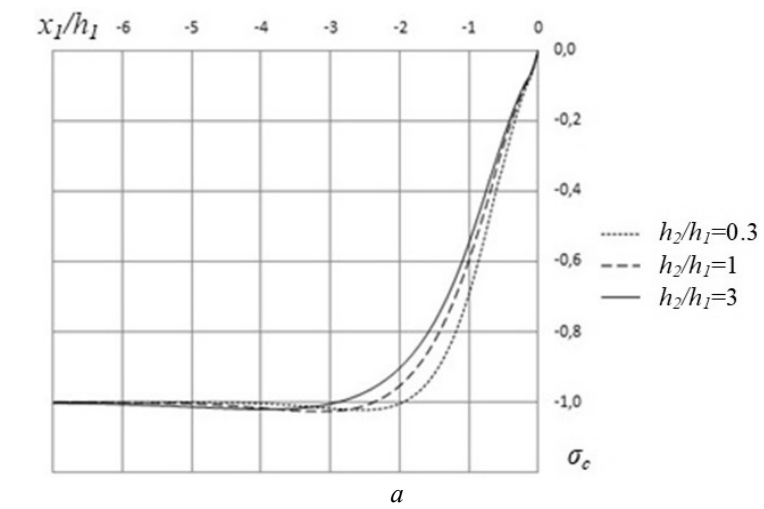


Рис. 4

Таблиця 4

G_1/G_2	0,1	0,2	0,5	0,8	1	2	5	10	20
$ \sigma_c^{\max} $	1,0158	1,0164	1,0183	1,0199	1,0209	1,0242	1,0286	1,0315	1,0337
ξ	-2,0	-2,1	-2,3	-2,5	-2,6	-2,9	-3,5	-4,1	-4,9

В табл. 4 наведено значення найбільших за модулем безрозмірних контактних напружень $|\sigma_c^{\max}|$ задачі для деяких значень параметру G_1/G_2 ($h_2/h_1 = 1$) разом зі значеннями безрозмірних відстаней ξ , на яких вони досягаються.

Висновок.

Розглянуто задачу контактної механіки про гладкий контакт з відривом двох різних пружних смуг, зумовлений дією на верхню з них розподіленого на напівнескінченному проміжку навантаження сталої інтенсивності. Точний розв'язок відповідної плоскої задачі теорії пружності побудовано методом Вінера – Гопфа. Вивчено характер зміни поведінки контактних напружень та залежність відстані між абсцисами точки кінця прикладання навантаження та точки початку відриву від співвідношення модулів зсуву смуг і від співвідношення їх товщин. Досліджено залежність цих величин від співвідношення модулів зсуву смуг і від співвідношення їх товщин. Зокрема, визначено мінімальне значення параметру відриву та граничні значення цього параметру при збільшенні товщини нижньої смуги. Показано, що коли верхня смуга абсолютно жорстка, то відриву не відбувається, коли ж абсолютно жорсткою є нижня смуга, то параметр відриву набуває указанного мінімального значення.

РЕЗЮМЕ. Досліджено гладкий контакт з відривом двох різних пружних смуг під дією рівномірно розподіленого на напівнескінченному інтервалі навантаження на верхню грань верхньої смуги. На основі точного розв'язку задачі досліджено характер зміни контактних напружень та залежність параметру відриву від пружних сталих матеріалів смуг для різних значень відношення товщин та жорсткостей смуг. Зокрема, розглянуто граничні випадки, коли відношення жорсткостей смуг та відношення їх товщин необмежено зростають.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: контакт з відривом, пружна смуга, контактні напруження, метод Вінера – Гопфа, асимптотична поведінка коренів трансцендентних рівнянь.

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
2. Кир Л.М., Дандерс Дж., Цай К.Ц. Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве // Прикл. механика. Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. – Москва: Мир, 1972. – **39**, № 4. – С. 260 – 266.
3. Кіппіс О.Л. Контакт з відривом двох пружних смуг на напівнескінченному проміжку // Прикл. механіка. – 2024. – **60**, № 2. – С. 48 – 56.
4. Кіппіс О.Л., Острик В.І. Контакт з відривом на півнескінченному проміжку пружної смуги та жорсткої півплощини // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2011. – № 4. – С. 75 – 78.
5. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. – Москва: Гостехтеориздат, 1950 – 703 с.
6. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
7. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Київ: Наук. думка, 2006. – 328 с.
8. Снеддон И. Преобразования Фурье. – Москва: Изд-во иностранной лит-ры, 1955. – 668 с.
9. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.

10. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
11. *Interlaminar Response of Composite Materials* (ed. N.J. Pagano). – Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1989. – 272 p.
12. Lopes J.P., Hills D.A. An idealised description of the frictional receding contact behaviour of a bolted joint // *Eur. J. Mech. A Solid.* – 2020. – **83**. – 104022.
13. Lopes J.P., Hills D.A. The axisymmetric frictional receding contact of a layer pressed against a half-space by a point force // *Int. J. Solids Struct.* – 2019. – **171**. – P. 47 – 53.
14. Lopes J.P., Hills D.A. The axisymmetric frictional receding contact of a layer pressed against a half-space by pressure outside a disk // *Eur. J. Mech. A Solid.* – 2019. – **77**. – 103787.
15. Morhunov M.O., Ostryk V.I., Ulitko A.F. Contact with break-off under bending of an elastic strip with a rigid disk // *J. Math. Sci.* – 2010. – **171**. – P. 649 – 661.
16. Parel K.S., Hills D.A. Frictional receding contact analysis of a layer on a half-plane subjected to semi-infinite surface pressure // *Int. J. Mech. Sci.* – 2016. – **108 – 109**. – P. 137 – 143.
17. Parel K.S. Plane frictional receding contact of a thin layer pressed onto a substrate by finite pressure distributions // *Eur. J. Mech. A Solid.* – 2021. – **90**. – 104309.
18. Ratwani M., Erdogan F. On the plane contact problem for frictionless elastic layer // *Int. J. Solids Struct.* – 1973. – **43**. – P. 921 – 936.

Надійшла 02.11.2023

Затверджена до друку 16.04.2024
