УДК 517.95

Б. Й. Пташник[1,2], С. М. Репетило[2]

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В області, що є декартовим добутком відрізка на p-вимірний тор, досліджено крайову задачу з умовами Діріхле–Неймана за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за іншими координатами для безтипної системи лінійних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі та конструктивно побудовано її розв'язок у вигляді векторного ряду за системою ортогональних функцій. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли під час побудови розв'язку задачі, використано метричний підхід.

Вступ. Крайові задачі з даними на всій межі області для гіперболічних та безтипних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними не завжди коректні, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників (див. [1, 2, 4–7, 9–13, 15–18] та бібліографію в них).

У працях [2, 4, 7, 10, 14, 16–18] досліджено класичну розв'язність задач для лінійних та квазілінійних безтипних систем рівнянь з частинними похідними другого та високого порядків зі сталими і змінними коефіцієнтами в обмежених та необмежених областях, а в [15] – для системи диференціальних рівнянь із дробовими похідними у прямокутнику; встановлено [11, 12] умови існування періодичних за часом слабких розв'язків крайових задач для тривимірної та багатовимірної систем безтипних рівнянь першого порядку у циліндричних областях.

У цій статті, яка примикає до праці [2], в області, що є декартовим добутком відрізка на p-вимірний тор, досліджено крайову задачу з умовами Діріхле–Неймана за виділеною змінною t та умовами 2π-періодичності за координатами $x_1, \ldots, x_p$ для безтипної системи лінійних рівнянь порядку $2n$, $n \geq 1$, зі сталими коефіцієнтами. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі та конструктивно побудовано її розв'язок. Для оцінки знизу малих знаменників, що виникли під час побудови розв'язку, використано метричний підхід.

Основні позначення. Надалі використовуватимемо такі позначення: $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел; $\mathbb{Z}_+^p$ – множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами; $s = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|s| = s_0 + s_1 + \ldots + s_p$, $|s|^* = 2s_0 + s_1 + \ldots + s_p$, $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p$, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\tilde{k} = (k_0, k) \in \mathrm{K} := \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^p$, $|\tilde{k}| = k_0 + |k_1| + \ldots + |k_p|$; $Q^p = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} \colon t \in (0, T),\ x \in \mathbb{R}^p \right\}$; $\Omega^p - p$-вимірний тор $(\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z})^p$, $p \in \mathbb{N}$; $D = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} \colon t \in (0, T),\ x \in \Omega^p \right\}$.

Формулювання задачі. В області Q^p розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) := \sum_{|s|^* \leq 2n} A_s \frac{\partial^{|s|^*} u(t, x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = f(t, x), \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial^{2(r-1)} u(t, x)}{\partial t^{2(r-1)}} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^{2r-1} u(t, x)}{\partial t^{2r-1}} \right|_{t=T} = 0, \quad r \in \{1, \ldots, n\}, \tag{2}$$

де A_s – $m\times m$-матриці зі сталими дійсними елементами, причому $\det A_{n,0,\mathbf{K},0}\neq 0$, $u(t,x)=col(u_1(t,x),\mathbf{K},u_m(t,x))$, $f(t,x)=col(f_1(t,x),\mathbf{K},f_m(t,x))$.

На тип системи рівнянь (1) ніяких обмежень не накладаємо.

Задача (1), (2), взагалі, не буде коректною за Адамаром (порушується умова єдиності розв'язку), якщо на шуканий розв'язок не накласти певних умов за змінними $x_1,\mathbf{K},x_p$. Покажемо це на прикладі рівняння коливання струни. В області Q^1 розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x),\ (t,x)\in Q^1, \tag{3}$$

$$u|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=T}=0,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

яка не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли задача з умовами (4) для однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ (t,x)\in Q^1, \tag{3'}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Класичний розв'язок задачі (3'), (4) визначає формула

$$u(t,x)=\varphi(x+t)+\psi(x-t), \tag{5}$$

де φ і ψ – двічі неперервно диференційовні функції, які справджують систему рівнянь

$$\begin{cases}\varphi(x)+\psi(x)=0,\\ \varphi'(x+T)-\psi'(x-T)=0.\end{cases} \tag{6}$$

Із (6) для функції φ отримуємо рівняння

$$\varphi(x+2T)=-\varphi(x)+C,$$

де C – довільна стала, з якого випливає, що функція φ задовольняє рівняння

$$\varphi(x+4T)=\varphi(x), \tag{7}$$

тобто є періодичною з періодом $l_1=4T$. Оскільки $\psi(x)=-\varphi(x)$, то задача (3'), (4) має нетривіальні розв'язки:

$$u(t,x)=\varphi(x+t)-\varphi(x-t), \tag{8}$$

де φ – довільна періодична функція з періодом l_1. Тому розв'язок задачі (3), (4), якщо він існує, не буде єдиним.

Коли шукати його у класі функцій, періодичних за x з періодом $l_2=2\pi$, то функція φ, що у формулі (8), повинна задовольняти, крім рівняння (7), рівняння

$$\varphi(x+2\pi)=\varphi(x), \tag{9}$$

тобто бути двояко періодичною з періодами l_1 і l_2.

Нехай $\mu=l_1/l_2=2T/\pi$. Якщо число μ є раціональним, тобто $\mu=m/k$ ($m,k\in\mathbb{N}$), то обидва рівняння (7) і (9) справджує довільна періодична з періодом $\omega=2T/m=\pi/k$ функція $\varphi(x)$. У цьому випадку задача (3'), (4) має нетривіальні 2π-періодичні за x розв'язки, які визначає формула (8). Якщо число μ ірраціональне, то неперервна функція φ, яка має два несумірні періоди l_1 і l_2, набуває одне й те ж значення в усіх точках $x=2\pi k+2\pi\mu m$ ($k,m\in\mathbb{Z}$), які утворюють всюди щільну множину в $\mathbb{R}$, і внаслідок неперервності ця функція є сталою [1, с. 29]. У цьому випадку задача (3'), (4) має в класі функцій, 2π-періодичних за x, лише тривіальний розв'язок, а отже, задача (3), (4) не може мати двох різних розв'язків, 2π-періодичних за x.

Аналогічна ситуація у задачі для рівняння (3) з умовами Діріхле $u(0,x) = u(T,x) = 0$ [9, с. 23].

Зауваження 1. Єдиність 2π-періодичного за x розв'язку задачі (3), (4) за ірраціонального μ можна довести також за допомогою методу Фур'є.

Зауваження 2. Стосовно єдиності розв'язку задачі (3), (4) з умовами 2π-періодичності за змінною x (як і для задачі Діріхле [6]) справедливий в певному сенсі "неперервний перехід" від раціонального μ до ірраціонального. Якщо $\mu = m/k$ (m, k – взаємно прості), то, як показано вище, задача (3'), (4) у класі неперервних 2π-періодичних за x функцій має нетривіальні розв'язки (8), де φ – довільна неперервна періодична функція з періодом $\omega = 2T/m$. Якщо $m = 1$, то серед цих розв'язків є "сильно нетривіальні", які не перетворюються в нуль в області Q^1; якщо $m > 1$, "найбільш нетривіальні" із цих функцій перетворюються в нуль у смузі Q^1 на горизонтальних прямих

$$t = jT/m, \quad j \in \{1, \ldots, m-1\}. \tag{10}$$

З "наближенням" раціонального числа μ до ірраціонального, тобто за досить великих m і k, горизонтальні прямі (10) можна розмістити у смузі Q^p як завгодно щільно.

Щоб за певних умов забезпечити коректність задачі (1), (2), шукатимемо її розв'язок у класі функцій, 2π-періодичних за змінними $x_1, \ldots, x_p$. При цьому вважатимемо, що права частина рівняння (1) є 2π-періодичною за $x_1, \ldots, x_p$. Таким чином, вивчатимемо задачу (1), (2) в області D.

Зауважимо, що система функцій

$$\left\{ \exp(ik, x), k \in \mathbb{Z}^p \right\}$$

утворює повну ортогональну систему в просторі $L_2\left(\Omega^p\right)$.

Розглянемо тепер задачу на власні значення (з огляду на умови (2)):

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0, \quad y(0) = y'(T) = 0. \tag{11}$$

Множина власних значень задачі (11) така: $\Lambda = \{\lambda_{k_0} = (k_0 + 1/2)^2 \pi^2/T^2$, $k_0 \in \mathbb{Z}_+\}$, а власні функції утворюють систему $\Upsilon = \{\sin((k_0 + 1/2)\pi/T\, t)$, $k_0 \in \mathbb{Z}_+\}$, яка є повною і ортогональною в $L_2(0,T)$.

Згідно з лемою з праці [8, с. 217] система функцій

$$\left\{ \sin((k_0 + 1/2)\pi/T\, t)\exp(ik, x), \ k_0 \in \mathbb{Z}_+, \ k \in \mathbb{Z}^p \right\} \tag{12}$$

є повною і ортогональною у просторі $L_2(D)$.

Позначимо: $H_q(D)$, $q \in \mathbb{Z}_+$, – простір комплекснозначних функцій $\upsilon(t,x) = \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k| \geq 0} \upsilon_{\bar{k}} \sin((k_0 + 1/2)\pi/T\, t)\exp(ik, x)$ зі скінченною нормою $\left\|\upsilon; H_q(D)\right\|^2 := 2^{p-1} T \pi^p \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k| \geq 0} \left(1 + |\bar{k}|^2\right)^q \left|\upsilon_{\bar{k}}\right|^2$; $\overline{H}_q(D)$, $q \in \mathbb{Z}_+$, – простір вектор-функцій $\upsilon(t,x) = (\upsilon_1(t,x), \ldots, \upsilon_m(t,x))$, для яких $\upsilon_j \in H_q(D)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\left\|\upsilon; \overline{H}_q(D)\right\|^2 := \sum_{j=0}^{m} \left\|\upsilon_j; H_q(D)\right\|^2$.

Припустимо, що $f(t,x) \in L_2(D)$ і

$$f(t,x) = \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k|\geq 0} f_{\vec{k}} \sin((k_0 + 1/2)\pi/T\,t)\exp(ik,x), \quad f_{\vec{k}} = col\left(f_{\vec{k}1}, \ldots, f_{\vec{k}m}\right), \tag{13}$$

$$f_{\vec{k}j} = c_1 \int_0^T \int_{\Omega^p} f_j(t,x)\sin((k_0 + 1/2)\pi/T\,t)\exp(-ik,x)\,dtdx, \quad j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{14}$$

де $c_1 = 2^{1-p}/(T\pi^p)$.

Єдиність розв'язку задачі. Розв'язок задачі (1), (2), розглядуваної в області D, шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k|\geq 0} u_{\vec{k}} \sin((k_0 + 1/2)\pi/T\,t)\exp(ik,x), \tag{15}$$

де $u_{\vec{k}} = col\left(u_{\vec{k}1}, \ldots, u_{\vec{k}m}\right)$. Очевидно, що кожен член ряду (15) задовольняє умови (2). Якщо коефіцієнти $u_{\vec{k}}$ такі, що ряд (15) і ряди, отримані з нього почленним диференціюванням до порядку $2n-1$ включно, рівномірно збігаються в D, то і функція (15) задовольняє умови (2).

Підставляючи ряди (13) і (15) у систему рівнянь (1), отримуємо для визначення компонент кожного вектора $u_{\vec{k}}$, $\vec{k} \in K$, лінійну систему алгебричних рівнянь

$$\sum_{|s|^* \leq 2n} (-1)^{s_0} A_s (k_0 + 1/2)^{2s_0} (ik_1)^{s_1} \ldots \left(ik_p\right)^{s_p} \omega^{s_0} u_{\vec{k}} = f_{\vec{k}}, \tag{16}$$

визначник якої позначимо через $\Delta\left(\vec{k}, \omega\right)$, де $\omega = (\pi/T)^2$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\overline{H}_q(D)$ *необхідно і досить, щоб рівняння*

$$\Delta\left(\vec{k}, \omega\right) = 0 \tag{17}$$

не мало розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$, $\vec{k} \in K$.

Доведення. Скористаємось схемою доведення теореми 1 з праці [2].

Необхідність. Нехай для деякого вектора $\vec{k}^0 \in K$ $\Delta\left(\vec{k}^0, \omega\right) = 0$. Тоді у просторі $\overline{H}_q(D)$ існує нетривіальний розв'язок задачі з умовами (2) для однорідної системи рівнянь

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = 0, \tag{1'}$$

який визначає формула

$$u(t,x) = u_{\vec{k}^0} \sin\left(\left(k_0^0 + 1/2\right)\pi/T\,t\right)\exp\left(ik_1^0, x\right) \ldots \exp\left(ik_p^0, x\right),$$

де вектор $u_{\vec{k}^0}$ є розв'язком системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{|s|^* \leq 2n} (-1)^{s_0} A_s (k_0 + 1/2)^{2s_0} (ik_1)^{s_1} \ldots \left(ik_p\right)^{s_p} \omega^{s_0} u_{\vec{k}} = 0, \tag{16'}$$

якщо $\vec{k} = \vec{k}^0$. Отже, розв'язок неоднорідної задачі (1), (2) у просторі $\overline{H}_q(D)$, якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що задача (1), (2) має два різні розв'язки $u_1(t,x)$, $u_2(t,x) \in \overline{H}_q(D)$. Тоді функція $u_1(t,x) - u_2(t,x) = u(t,x) \in \overline{H}_q(D)$ є нетривіальним розв'язком задачі (1'), (2) і визначається рядом вигляду (15), де компоненти кожного вектора $u_{\vec{k}}$, $\vec{k} \in K$, є розв'язками системи рівнянь (16'), визначник якої дорівнює $\Delta(\vec{k},\omega)$. Якщо рівняння (17) не має розв'язків у цілих числах, то для всіх векторів $\vec{k} \in K$ $u_{\vec{k}} = (\vec{0})$. Згідно з теоремою про єдиність розвинення функції з $L_2(D)$ у ряд Фур'є отримуємо, що $u(t,x) = (\vec{0})$ для майже всіх точок $(t,x) \in D$, тобто $\left\| u_1(t,x) - u_2(t,x); \overline{H}_q(D) \right\| = 0$. Теорему доведено.

Зауважимо, що множина чисел $\eta = \pi/T$, для яких рівняння (17) має розв'язки в цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$, $\vec{k} \in K$, є зліченною, тобто міра Лебега і розмірність Хаусдорфа цієї множини рівні нулю.

Існування розв'язку задачі. Припустимо, що задача (1), (2) не може мати двох різних розв'язків із простору $\overline{H}_q(D)$. Тоді для кожного вектора $\vec{k}$, $\vec{k} \in K$, система рівнянь (16) має єдиний розв'язок, який визначають формули

$$u_{\vec{k}j} = \sum_{q=1}^{m} \frac{\Delta_{qj}(\vec{k},\omega)}{\Delta(\vec{k},\omega)} f_{\vec{k}q}, \quad j \in \{1,\ldots,m\}, \tag{18}$$

де $\Delta_{qj}(\vec{k},\omega)$ – алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині q-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\Delta(\vec{k},\omega)$; при цьому справджуються оцінки

$$\left|\Delta_{qj}(\vec{k},\omega)\right| \le c_2 \left|\vec{k}\right|^{2n(m-1)}, \quad q,j \in \{1,\ldots,m\}, \quad \vec{k} \in K, \tag{19}$$

де стала $c_2 > 0$ не залежить від $\vec{k}$.

З рівностей (15) і (18) випливає, що компоненти формального розв'язку $u(t,x)$ задачі (1), (2) зображають формули

$$u_j(t,x) = \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k|\ge 0} \sum_{q=1}^{m} \frac{\Delta_{qj}(\vec{k},\omega)}{\Delta(\vec{k},\omega)} f_{\vec{k}q} \sin((k_0 + 1/2)\pi/T\, t) \exp(ik,x), \quad j \in \{1,\ldots,m\}. \tag{20}$$

Питання про існування розв'язку задачі (1), (2) у шкалі просторів $\overline{H}_r(D)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, пов'язане з проблемою малих знаменників, бо величина $\left|\Delta(\vec{k},\omega)\right|$, будучи відмінною від нуля, може ставати як завгодно малою для нескінченної множини векторів $\vec{k}$, $\vec{k} \in K$.

Теорема 2. *Нехай існує така стала* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, *що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\vec{k}$, $\vec{k} \in K$, *справджується нерівність*

$$\left|\Delta(\vec{k},\omega)\right| > \left|\vec{k}\right|^{-\alpha}. \tag{21}$$

Якщо $f \in \overline{H}_{r+\gamma}(D)$, $\gamma = \alpha + 2n(m-1)$, *то існує розв'язок* $u(t,x)$ *задачі* (1), (2) *із простору* $\overline{H}_r(D)$, *який неперервно залежить від вектор-функції*

$f(t,x)$; *компоненти цього розв'язку визначають формули* (20).

Доведення. Із формул (20), враховуючи оцінки (19) і (21), отримуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\left\|u;\overline{H}_r(D)\right\|^2=\sum_{j=1}^{m}\left\|u_j;H_r(D)\right\|^2:=2^{p-1}T\pi^p\sum_{j=1}^{m}\sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{|k|\ge 0}\left(1+|\bar k|^2\right)^r\left|u_{\bar k j}\right|^2=$$

$$=2^{p-1}T\pi^p\sum_{j=1}^{m}\sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{|k|\ge 0}\left(1+|\bar k|^2\right)^r\left|\sum_{q=1}^{m}\frac{\Delta_{qj}(\bar k,\omega)}{\Delta(\bar k,\omega)}f_{\bar k q}\right|^2\le$$

$$\le c_2 2^{p-1}T\pi^p\sum_{j=1}^{m}\sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{|k|\ge 0}\left(1+|\bar k|^2\right)^r\sum_{q=1}^{m}|\bar k|^{2\alpha+4n(m-1)}\left|f_{\bar k q}\right|^2\le$$

$$\le c_2 m 2^{p-1}T\pi^p\sum_{q=1}^{m}\sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{|k|\ge 0}\left(1+|\bar k|^2\right)^{r+\alpha+2n(m-1)}\left|f_{\bar k q}\right|^2=$$

$$=c_2 m\sum_{q=1}^{m}\left\|f_q;H_{r+\alpha+2n(m-1)}(D)\right\|^2=c_2 m\left\|f;\overline{H}_{r+\alpha+2n(m-1)}(D)\right\|^2. \tag{22}$$

З оцінки (22) випливає доведення теореми.

Дослідимо можливість виконання оцінки (21).

Лема. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* ω *нерівність*

$$\left|\Delta(\bar k,\omega)\right|<h^{-pmn-\varepsilon}, \tag{23}$$

де $h=\max\limits_{j\in\{0,\ldots,p\}}\left\{|k_j|\right\}$, $0<\varepsilon<1$, *має не більше ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах* $k_0,k_1,\ldots,k_p$, $\bar k\in$ K.

Доведення виконуємо за схемою доведення теореми 2 з праці [2].

З леми і того, що за відображення $\eta^2\to\eta$ множина з нульовою мірою Лебега переходить знову у множину нульової міри, випливає таке твердження.

Наслідок. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\eta=\pi/T$ нерівність (21) справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\bar k$, $\bar k\in$ K, якщо $\alpha>nmp$.

З теореми 2 та наслідку випливає така теорема.

Теорема 3. *Якщо* $f\in\overline{H}_{r+\gamma}(D)$, *де* $\gamma>n(m(p+2)-2)$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $\eta=\pi/T$ *існує розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\overline{H}_r(D)$, *який неперервно залежить від вектор-функції* $f(t,x)$. *Компоненти цього розв'язку визначають формули* (20).

Позначимо через $\bar C^r(\overline{D})$ простір вектор-функцій $\upsilon(t,x)=(\upsilon_1(t,x),\ldots,\upsilon_m(t,x))$, для яких $\upsilon_j\in C^r(\overline{D})$, $j\in\{1,\ldots,m\}$.

Зауваження 3. Виходячи з формул (20), легко показати, що якщо $f\in\bar C^r(\overline{D})$, де $r=(p+2)(mn+1)$, причому для всіх $x\in\Omega^p$ $\left.\frac{\partial^{2(g-1)}f_j(t,x)}{\partial t^{2(g-1)}}\right|_{t=0}=0$, $g\in\{1,\ldots,[(r+1)/2]\}$, $\left.\frac{\partial^{2g-1}f_j(t,x)}{\partial t^{2g-1}}\right|_{t=T}=0$, $g\in\{1,\ldots,[(r-1)/2]\}$, $j\in\{1,\ldots,m\}$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\eta=\pi/T$ існує розв'язок задачі (1), (2) з простору $\bar{C}^{2n}(\bar{D})$, який неперервно залежить від вектор-функції $f(t,x)$.

Зауважимо, що при $\alpha > mnp$ потужність множини A_α (міри нуль) тих чисел ω, для яких нерівність

$$\left|\,\Delta\left(\vec{k},\omega\right)\,\right| < h^{-\alpha}, \; h = \max_{j\in\{0,\ldots,p\}} \left\{\, \left|k_j\right| \,\right\}, \tag{24}$$

має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$, $\vec{k} \in K$, зменшується із ростом α. Однак це не відображається у термінах міри Лебега. Щоб розрізняти такі множини за різних значень α, застосуємо поняття розмірності Хаусдорфа [3, 13]. Справедливе таке твердження.

Теорема 4. *Якщо* $mnp < \alpha < 2mnp$, то нерівність (24) має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$, $\vec{k} \in K$, для множини дійсних чисел ω, розмірність Хаусдорфа якої не перевищує mnp/α; якщо $\alpha \ge 2mnp$, то нерівність (24) має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$, $\vec{k} \in K$, для множини дійсних чисел ω, розмірність Хаусдорфа якої не перевищує $mn(p+1)/(\alpha + 2mn)$.

Доведення виконуємо за схемою доведення теореми 4 з праці [2].

Із леми і теорем 3 та 4 випливає, що, збільшуючи гладкість функції $f(t,x)$, можна забезпечити розв'язність задачі (1), (2) для кожної області D, крім множини, розмірність Хаусдорфа якої не перевищує як завгодно малого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$.

Результати роботи можна поширити на задачу з умовами (2) для системи рівнянь

$$\sum_{|s|^* \le n} A_s \,(\partial/\partial t)^{2s_0}\, L_1^{s_1} \ldots L_1^{s_p} u(t,x) = f(t,x), \tag{25}$$

де $|s|^* = s_0 + s_1 + \ldots + s_p$; $L_r = -\dfrac{\partial}{\partial x_r}\left(p_r(x_r)\dfrac{\partial}{\partial x_r}\right) + q_r(x_r)$, $p_r(x_r) \in C^{2n-1}[0,2\pi]$, $q_r(x_r) \in C^{2n-2}[0,2\pi]$ – дійснозначні функції; $p_r(x_r) \ge p_0 > 0$, $r \in \{1,\ldots,p\}$; $L_r^h = L_r L_r^{h-1}$, $L_r^0 = I$.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект № 41.1 / 004).

1. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. 1. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – 25, № 1. – С. 21–86.
2. *Берник В. И., Пташник Б. И.* Краевая задача для системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1980. – 16, № 2. – С. 273–279.
3. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. – М.: Мир, 1969. – 238 с.
4. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. матем. журн. – 2002. – 54, № 12. – С. 1592–1602.
5. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 2002. – 315 с.
6. *Вахания Н. Н.* О приближённом решении задачи Дирихле для уравнения струны // Тр. ВЦ АН ГССР. – 1960. – 1. – С. 41–49.
7. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 4. – С. 7–17.

8. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
9. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
10. *Фиголь В. В.* Краевые задачи с данными на всей границе для дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического и составного типов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. џ Донецк, 1985. – 16 с.
11. *Bostan M.* Boundary value problem for the three dimensional time periodic Vlasov–Maxwell system // Comm. math. sci. – 2005. – 3, № 4. – P. 621–663.
12. *Bostan M.* Boundary value problem for the *n* dimensional time periodic Vlasov–Poisson system // Math. Methods in the Appl. Sci. – 2006. – 29, № 15. – P. 1801–1848.
13. *Hausdorff F.* Dimension und äusseres Mass // Math. Ann. – 1918. – 79. – S. 157–179.
14. *Kaliev I. A., Mugafarov M. F.* The third boundary value problem for the systems of equations of linear thermoelasticity // J. of appl. and industrial math. – 2008. – 2, № 4. – P. 501–507.
15. *Mamchuev M. O.* Boundary value problem for a system of fractional partial differential equations // Differential equations. – 2008. – 44, № 12. – P. 1737–1749.
16. *Mazya V., Rossmann J.* Schauder estimates for solutions to a mixed boundary value problems for Stokes system in polyhedral domains // Math. Methods in the Appl. Sci. – 2006. – 29, № 9. – P. 965–1017.
17. *Nurmamedov M. A.* On the solvability of a boundary value problem for quasilinear system equations of mixed and composite type in a multidimensional domain // Vladikavkaz. Math. Zh. – 2010. – 12, № 2. – P. 46–61.
18. *TongKeun Chang*, *Bum Ja Jin.* Boundary value problem of a non-stationary Stokes system in a bounded smooth cylinder [Електронний ресурс] // Cornell University Library. – 2012. – Режим доступу: arXiv:1203.6519v1 [math.AP].

ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В области, которая является декартовым произведением отрезка на p-мерный тор, исследовано краевую задачу с условиями Дирихле–Неймана по выделенной переменной и условиями 2π-периодичности по другим координатам для бестипной системы линейных уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами. Установлены условия однозначной разрешимости задачи и конструктивно построено ее решение в виде векторного ряда по системе ортогональных функций. Для оценок снизу малых знаменателей, возникших при построении решения задачи, использовано метрический подход.

THE DIRICHLET–NEUMANN TYPE PROBLEM FOR SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

In the domain, which is Cartesian product of segment and p-dimensional torus, boundary value problem with Dirichlet–Neumann conditions for the chosen variable and 2π-periodicity conditions for other coordinates for typeless system of linear equations of high order with constant coefficients is studied. The conditions of unique solvability of the problem are established and its solution in the form of vectorial series according to the system of orthogonal functions is structurally constructed. For estimations from below of small denominators that appeared during construction of solution of the problem the metric approach is used.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т "Львів. політехніка", Львів

Одержано
24.10.12