УДК 539.3

П. П. Вагін, І. Я. Шот

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ НА ЗСУВ ТА СТИСНЕННЯ

Сформульовано лінійну початково-крайову задачу для тонких оболонок, податливих на зсув і стиснення. Записано ключові рівняння для визначення власних частот вільних коливань розглядуваних оболонок. Специфіка використаної моделі полягає в тому, що за основу взята гіпотеза оболонок типу Тимошенка, згідно з якою нормальний елемент недеформованої оболонки після її навантаження залишається прямолінійним, але може змінювати довжину та не бути ортогональним до деформованої серединної поверхні. Розв'язано задачу про вільні коливання кругової циліндричної оболонки. Порівняно отримані числові розв'язки із наведеними в літературі.

Вступ. Дослідження динамічної поведінки та визначення власних частот є необхідне для проектування оболонкових конструкцій, щоб запобігти резонансним явищам, які можуть призвести до їх руйнування. Адже більшість дефектів і руйнувань під час експлуатації таких конструкцій виникають саме внаслідок дії змінних у часі навантажень. Методика розв'язування задач про вільні коливання оболонок досить складна та, зазвичай, потребує числових методів, заснованих, зокрема, на варіаційній побудові розглядуваних задач [3, 9]. Здебільш у дослідженнях використовують класичну гіпотезу Кірхгофа–Лява та гіпотезу Тимошенка–Міндліна (так звана п'ятимодальна теорія, у якій поле переміщень характеризується п'ятьма незалежними функціями: трьома переміщеннями серединної поверхні та двома функціями, що описують незалежний поворот нормалі оболонки) [5, 8, 10]. Теорію оболонок типу Тимошенка, податливих на зсув та стиснення (варіант шестимодальної теорії, в якій поле переміщень характеризується шістьма функціями, що описують поворот та стиснення нормалі), вивчали в працях [2, 4, 7]. Нижче записано ключові співвідношення для визначення власних частот вільних коливань оболонок, податливих на зсув та стиснення. Для зручності застосування числових методів [1, 7, 9], зокрема методу скінченних елементів, усі співвідношення записано в матричному вигляді.

Основні припущення та співвідношення теорії тонких оболонок, **податливих на зсув та стиснення**. Розглянемо оболонку як тривимірне тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими мала проти інших розмірів тіла. Серединну поверхню оболонки Ω віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, що $|\alpha_3| \le h/2$. Вважаємо, що координатні лінії α_1, α_2 збігаються із лініями головних кривин. Позначимо через Γ межу серединної поверхні Ω.

Переміщення довільної точки оболонки під час її деформування можна описати за допомогою такого розвинення в ряд Тейлора в околі значень $\alpha_3 = 0$ (з огляду на малу порівняно з іншими характерними розмірами товщину h оболонки) [6]:

$$\begin{aligned} U_1(\alpha, \alpha_3) &= u_1(\alpha) + \alpha_3 \gamma_1(\alpha), \\ U_2(\alpha, \alpha_3) &= u_2(\alpha) + \alpha_3 \gamma_2(\alpha), \\ U_3(\alpha, \alpha_3) &= u_3(\alpha) + \alpha_3 \gamma_3(\alpha). \end{aligned} \tag{1}$$

Тут $u_i(\alpha) = U_i(\alpha, 0)$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$ описують переміщення точок серединної поверхні Ω оболонки, а $\gamma_i(\alpha) = \dfrac{\partial U_i(\alpha, 0)}{\partial \alpha_3}$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$ характеризують залишкові члени ряду Тейлора і визначають кут повороту нормалі незалежно від компонент вектора переміщень точок серединної поверхні. Оскільки $\gamma_3(\alpha) \neq 0$, то апроксимація (1) припускає зміну довжини елемента нормалі під час деформування.

Отже, вектор переміщень довільної точки оболонки повністю визначають компоненти вектора переміщень $u_i(\alpha)$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$ та вектора кутів повороту нормалі до серединної поверхні оболонки $\gamma_i(\alpha)$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$. Таким чином, для аналізу напружено-деформованого стану оболонок, податливих на зсув і стиснення, потрібно записати систему з шести рівнянь рівноваги для визначення вектора узагальнених переміщень серединної поверхні $u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ та доповнити її відповідними крайовими умовами на межі серединної поверхні.

Деформаційні співвідношення, що пов'язують компоненти тензора лінійної деформації з переміщеннями, запишемо для зручності у матричному вигляді:

$$e = C_l u, \tag{2}$$

де $e = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23}\}^T$ — вектор компонент тензора лінійної деформації; C_l — матриця диференціальних операторів, що має вигляд

$$C_l = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial_1}{A_1} & \dfrac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} & \dfrac{\partial_2}{A_2} & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{A_1}{2A_2}\partial_2 \dfrac{\cdot}{A_1} & \dfrac{A_2}{2A_1}\partial_1 \dfrac{\cdot}{A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1}{2} & 0 & \dfrac{\partial_1}{2A_1} & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{k_2}{2} & \dfrac{\partial_2}{2A_2} & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial_1}{A_1} & \dfrac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} & k_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} & \dfrac{\partial_2}{A_2} & k_2 \\ \dfrac{1}{2}\left(k_1 \dfrac{\partial_2}{A_2} - k_2 \dfrac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}\right) & \dfrac{1}{2}\left(k_2 \dfrac{\partial_1}{A_1} - k_1 \dfrac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}\right) & 0 & \dfrac{A_1}{2A_2}\partial_2 \dfrac{\cdot}{A_1} & \dfrac{A_2}{2A_1}\partial_1 \dfrac{\cdot}{A_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial_1}{A_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial_2}{A_2} \end{pmatrix}.$$

Тут $A_i = A_i(\alpha)$ і $k_i = k_i(\alpha)$ $(i = 1, 2)$ — коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки Ω та її головні кривини відповідно.

Систему рівнянь рівноваги оболонок, податливих на зсув і стиснення, та статичні крайові умови отримаємо з принципу можливих переміщень [2] та запишемо для зручності у матричній формі:

$$C_\sigma \sigma + P = 0\,, \tag{3}$$

$$G_\sigma \sigma\big|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_g\,. \tag{4}$$

Для встановлення кінематичної визначеності побудованої моделі оболонок необхідно додати крайові умови в зміщеннях на частині Γ_u контуру серединної поверхні оболонки $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ [2]:

$$G_u u\big|_{\Gamma_u} = u_g\,, \qquad \Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_\sigma\,. \tag{5}$$

У формулах (3)–(5) введено такі позначення:
$\sigma = (N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23})^T$ – вектор симетричних зусиль-моментів; $P = (P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3)^T$ – вектор зовнішнього навантаження; $\sigma_g = (N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n)^T$ – вектор крайових зусиль-моментів; $u_g = \left(u_t^B, u_s^B, u_n^B, \gamma_t^B, \gamma_s^B, \gamma_n^B\right)^T$ – вектор крайових зміщень; C_σ – матриця диференціальних операторів розмірності 6×11, ненульові компоненти якої мають вигляд

$$C_\sigma^{1,1} = \frac{1}{A_1 A_2}\partial_1 (A_2\,\cdot)\,, \quad C_\sigma^{1,2} = -\frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}\,, \quad C_\sigma^{1,4} = \frac{\partial_2 A_1 + A_1 \partial_2}{A_1 A_2}\,,$$

$$C_\sigma^{1,5} = k_1\,, \quad C_\sigma^{1,9} = \frac{1}{2A_1 A_2}\left(\partial_2 (A_1 k_1\,\cdot) + k_2 \partial_2 A_1\right),$$

$$C_\sigma^{2,1} = -\frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}\,, \quad C_\sigma^{2,2} = \frac{1}{A_1 A_2}\partial_2 (A_1\,\cdot)\,, \quad C_\sigma^{2,4} = \frac{\partial_1 A_2 + A_2 \partial_1}{A_1 A_2}\,,$$

$$C_\sigma^{2,6} = k_2\,, \quad C_\sigma^{2,9} = \frac{1}{2A_1 A_2}\left(\partial_1 (A_2 k_2\,\cdot) + k_1 \partial_1 A_2\right),$$

$$C_\sigma^{3,1} = -k_1\,, \quad C_\sigma^{3,2} = -k_2\,, \qquad C_\sigma^{3,5} = \frac{1}{A_1 A_2}\partial_1 (A_2\,\cdot)\,, \quad C_\sigma^{3,6} = \frac{1}{A_1 A_2}\partial_2 (A_1\,\cdot)\,,$$

$$C_\sigma^{4,5} = -1, \quad C_\sigma^{4,7} = \frac{1}{A_1 A_2}\partial_1 (A_2\,\cdot)\,, \quad C_\sigma^{4,8} = -\frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}\,, \quad C_\sigma^{4,9} = \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} + \frac{\partial_2}{A_2}\,,$$

$$C_\sigma^{5,6} = -1, \quad C_\sigma^{5,7} = -\frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}\,, \qquad C_\sigma^{5,8} = \frac{1}{A_1 A_2}\partial_2 (A_1\,\cdot)\,, \quad C_\sigma^{5,9} = \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} + \frac{\partial_1}{A_1}\,,$$

$$C_\sigma^{6,3} = -1, \quad C_\sigma^{6,7} = -k_1\,, \quad C_\sigma^{6,8} = -k_2\,, \quad C_\sigma^{6,10} = \frac{1}{A_1 A_2}\partial_1 (A_2\,\cdot)\,, \quad C_\sigma^{6,11} = \frac{1}{A_1 A_2}\partial_2 (A_1\,\cdot)\,;$$

$G_\sigma\,, G_u$ – матриці змінних коефіцієнтів розмірності 6×11 і 6×6 відповідно, ненульові коефіцієнти яких

$$G_\sigma^{1,1} = G_\sigma^{4,7} = \cos^2 (n, \alpha_1)\,, \qquad G_\sigma^{1,2} = G_\sigma^{4,8} = \sin^2 (n, \alpha_1)\,,$$

$$G_\sigma^{1,4} = -G_\sigma^{2,1} = G_\sigma^{2,2} = G_\sigma^{4,9} = -G_\sigma^{5,7} = G_\sigma^{5,8} = \frac{1}{2}\sin 2(n, \alpha_1)\,,$$

$$G_\sigma^{1,9} = \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\sin 2(n, \alpha_1)\,, \quad G_\sigma^{2,4} = G_\sigma^{5,9} = \cos^2 (n, \alpha_1) - \sin^2 (n, \alpha_1)\,,$$

$$G_\sigma^{3,5} = G_\sigma^{6,10} = \cos (n, \alpha_1)\,, \qquad G_\sigma^{3,6} = G_\sigma^{6,11} = \sin (n, \alpha_1)\,,$$

$$G_\sigma^{2,9} = \frac{1}{2}\left(k_2 \cos^2 (n, \alpha_1) - k_1 \sin^2 (n, \alpha_1)\right),$$

$$G_u^{1,1} = G_u^{2,2} = G_u^{4,4} = G_u^{5,5} = \cos(n, \alpha_1),$$

$$G_u^{1,2} = -G_u^{2,1} = G_u^{4,5} = -G_u^{5,4} = \sin(n, \alpha_1), \quad G_u^{3,3} = -G_u^{6,6} = -1.$$

Щоб отримати замкнену систему, яка описує лінійне деформування оболонок, податливих на зсув і стиснення, до наведених вище рівнянь необхідно додати співвідношення пружності, які пов'язують деформації з внутрішніми зусиллями та моментами:

$$\sigma = Be, \tag{6}$$

де B — матриця пружних характеристик матеріалу розмірності 11×11. Ненульові компоненти матриці B для ізотропної оболонки

$$B^{1,1} = B^{2,2} = B^{3,3} = \frac{(1-\nu)Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$B^{1,2} = B^{2,1} = B^{1,3} = B^{3,1} = B^{2,3} = B^{3,2} = \frac{\nu Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$B^{4,4} = B^{5,5} = B^{6,6} = \frac{Eh}{(1+\nu)}, \quad B^{7,7} = B^{8,8} = \frac{(1-\nu)Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$B^{7,8} = B^{8,7} = \frac{\nu Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad B^{9,9} = B^{10,10} = B^{11,11} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}.$$

Лінійна початково-крайова задача теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення, та її варіаційне формулювання. Якщо компоненти зовнішнього навантаження, що діє на оболонку, залежать як від координат α_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$, так і від часу t, то викликані ними переміщення, деформації та напруження теж є функціями часу. Рівняння руху тонких оболонок, податливих на зсув і стиснення, які отримаємо з варіаційного принципу Остроградського–Гамільтона [3], запишемо в матричному вигляді:

$$C_\sigma \sigma + P - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{7}$$

де m – діагональна матриця розмірності 6×6, ненульові компоненти якої

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = \rho h,$$

$$m_{44} = m_{55} = m_{66} = \rho\frac{h^3}{12},$$

ρ – густина матеріалу оболонки.

Для однозначного інтегрування системи рівнянь (7), окрім статичних (4) та геометричних (5) крайових умов, необхідно задати ще початкові

$$u(\alpha, 0) = u^0(\alpha), \quad \dot{u}(\alpha, 0) = u^1(\alpha). \tag{8}$$

Розв'язок системи (7) із крайовими та початковими умовами визначає реакцію оболонки на дію змінного в часі зовнішнього навантаження та масових сил.

Розв'язують задачі про деформування тонких оболонок, податливих на зсув і стиснення, методом скінченних елементів [1, 7–9]. Тому наведемо варіаційне формулювання початково-крайової задачі лінійної теорії розглядуваних оболонок. Для цього введемо функціональні простори

$$G = \left\{\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[L^2(\Omega)\right]^6\right\},$$

$$V = \left\{ \upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[W_2^1(\Omega) \right]^6 \mid \upsilon = 0 \quad на \quad \Gamma \setminus \Gamma_\sigma \right\}.$$

Тут $W_2^1(\Omega)$ – простір Соболєва функцій, квадрати яких разом зі своїми першими похідними інтегровані за Лебегом в області Ω.

Вважаємо, що для розглядуваної задачі справедливі умови

$$P = (P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3) \in \left[L^2(\Omega) \right]^6,$$

$$\sigma_g = (N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n)^T \in \left[L^2(\Omega) \right]^6,$$

а також $u^0 \in V, \quad u^1 \in G$.

Фіксуючи момент часу $t \in (0, T]$, $0 < T < +\infty$, помножимо скалярно рівняння руху (7) на довільний вектор $\upsilon \in V$ та проінтегруємо результат по області Ω. Отримаємо варіаційне рівняння

$$\mu(\ddot{u}(t), \upsilon) + a(u(t), \upsilon) = \langle l(t), \upsilon \rangle \quad \forall t \in (0, T].$$

Тут білінійні форми $a(u, \upsilon)$, $\mu(u, \upsilon)$ та лінійний функціонал $\langle l, \upsilon \rangle$ мають вигляд

$$a(u, \upsilon) = \iint_\Omega (C_l \upsilon)^T E_0 B C_l u \, d\Omega,$$

$$\mu(u, \upsilon) = \iint_\Omega \rho \left(\sum_{i=1}^{3} \left(u_i \upsilon_i + \frac{h^2}{12} \gamma_i \xi_i \right) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\langle l, \upsilon \rangle = \sum_{i=1}^{3} \iint_\Omega (P_i \upsilon_i + m_i \xi_i) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 +$$
$$+ \int_{\Gamma_\sigma} (N_t \upsilon_t + N_s \upsilon_s + N_n \upsilon_n + M_t \xi_t + M_s \xi_s + M_n \xi_n) \, d\Gamma.$$

Наведемо варіаційне формулювання початково-крайової задачі (7) лінійної теорії зсувних оболонок, податливих на зсув і стиснення: *задано* $l \in L^2(0, T; V')$; $u^0 \in V$, $u^1 \in G$; *знайти такий вектор узагальнених переміщень* $u \in L^2(0, T; V)$, *що*

$$\mu(\ddot{u}(t), \upsilon) + a(u(t), \upsilon) = \langle l(t), \upsilon \rangle \quad \forall t \in (0, T],$$

$$\mu\left(\dot{u}(0) - u^1, \upsilon\right) = 0, \quad a\left(u(0) - u^0, \upsilon\right) = 0 \quad \forall \upsilon \in V.$$

Формулювання задачі про вільні коливання оболонок. Проаналізуємо оболонку, вільну від дії зовнішніх сил $P_i(\alpha, t)$, $m_i(\alpha, t)$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$, на контурі якої задані однорідні крайові умови

$$G_u u = 0, \quad \alpha \in \Gamma_u, \qquad G_\sigma \sigma = 0, \quad \alpha \in \Gamma_\sigma. \tag{9}$$

Розв'язок рівняння руху (7) шукаємо у вигляді

$$u(\alpha, t) = \tilde{u}(\alpha) e^{i\omega t} = \sum_l \tilde{q}_l(t) \varphi_l(\alpha) e^{i\omega t}, \tag{10}$$

де $i^2 = -1$; ω – кругова частота власних коливань; $\tilde{q}(t) = \{\tilde{q}_l(t)\}$ – невідомі коефіцієнти, які є функціями часу; $\{\varphi_l(\alpha)\}$ – вектор базису простору V.

Підставляючи (10) у рівняння динамічної рівноваги (7) і крайові умови (9), отримаємо систему рівнянь

$$-M\vec{q}\omega^2 e^{i\omega t} + K\vec{q}e^{i\omega t} = 0 \tag{11}$$

та крайові умови

$$G_u\vec{q} = 0\,, \quad \alpha \in \Gamma_u\,, \qquad G_\sigma\vec{q} = 0\,, \quad \alpha \in \Gamma_\sigma\,. \tag{12}$$

Тут K і M — матриці жорсткості та мас, коефіцієнти яких

$$K = \left\{K_{ij}\right\} = \left\{a\left(\varphi_i, \varphi_j\right)\right\}, \quad M = \left\{m_{ij}\right\} = \left\{\mu\left(\varphi_i, \varphi_j\right)\right\}.$$

Система рівнянь (11) за однорідних крайових умов (12) має очевидний тривіальний розв'язок $\vec{u} = 0$. Однак за деяких значень параметра $\omega = \omega_k$ можливий і ненульовий розв'язок $\vec{u}_k$.

Важливою особливістю гармонічних коливань є те, що реакція деформованого тіла на періодичне зовнішнє навантаження суттєво залежить від частоти зміни зовнішніх сил. За певних частот збурення $\omega_1, \omega_2, \ldots$, які називають власними або резонансними, амплітуди коливань тіла значно зростають (явище резонансу), що може викликати руйнування конструкції. Ці частоти можна знайти з умови рівності нулю визначника системи рівнянь

$$\left(K - \omega^2 M\right)\vec{q} = P\,, \tag{13}$$

тобто

$$\det\left[K - \omega^2 M\right] = 0\,, \tag{14}$$

за виконання якої малі навантаження P призводять до нескінченних переміщень u.

На практиці замість рівності (14) зазвичай використовують інші методи знаходження частот і форм власних коливань. Оскільки власні частоти не залежать від вектора P, то його можна вважати нульовим. Тоді перейдемо від системи (13) до так званої узагальненої задачі на власні значення:

$$K\vec{q} = \omega^2 M\vec{q}\,. \tag{15}$$

Для знаходження власних чисел і власних векторів системи (15) в числових методах лінійної алгебри відомий метод ітерацій у підпросторі, степеневий метод тощо [1, 7].

Числові приклади. Досліджували задачу про вільні коливання кругової циліндричної оболонки радіуса R = 10 м, довжини l = 10 м і товщини h = 0,05 м [5, 8].

У табл. 1 порівняно результати числового розрахунку значень $\omega^2 \cdot 10^3$ для цієї задачі, розглянутих у праці [8] (у межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка–Міндліна), з результатами реалізованої методом скінченних елементів моделі зсувних оболонок, описаної у цьому дослідженні, за послідовного згущення сітки скінченних елементів. Аналітичний розв'язок цієї задачі за теорією Кірхгофа–Лява наведено у праці [5]: $\omega^2 \cdot 10^3$ = 0,3034370. Розрахунок виконано за таких параметрів: модуль Юнґа матеріалу оболонки E = 1 Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}3$, густина $\rho = 1$ кг/м^3.

Також розглядали задачу про визначення частот власних коливань затиснутої по торцях циліндричної оболонки. Зважаючи на симетрію крайових умов і форм коливань, вивчали половину довжини оболонки з сектором π/n, де n – число хвиль по кругу оболонки. Крайові умови тут такі: $u_1 = u_2 = u_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ при $\alpha_1 = 0$; $u_1 = \gamma_1 = 0$ при $\alpha_1 = L/2$ для симетричних по довжині оболонки форм коливань; $u_2 = \gamma_2 = 0$ при $\varphi = 0, \dfrac{\pi}{n}$.

Розраховували за таких параметрів оболонки: модуль Юнґа матеріалу оболонки $E = 10^4$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}2$, густина $\rho = 1$ кг/м^3, радіус $R = 1$ м, $L = 3$ м, $h / R = 0{,}0525$. Розглядали власну форму коливань з числом хвиль по кругу $n = 3$ і з числом півхвиль по довжині оболонки $m = 1$. У табл. 2 порівняно результати числового розрахунку нижньої частоти системи (15) залежно від кількості блоків розбиття, наведені у праці [7] (в межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка–Міндліна), з результатами, отриманими за описаною у цій роботі моделлю зсувних оболонок. Результати подано у безрозмірному вигляді: $\omega_* = \omega R \sqrt{\rho\left(1-\nu^2\right) / E}$. Оцінено збіжність отриманих розв'язків.

Таблиця 1.

Розбиття	$\omega^2 \cdot 10^3$ (п'ятимодальний варіант [8])	$\omega^2 \cdot 10^3$ (шестимодальний варіант)
3×3	0,3305068	0,3583986
4×4	0,3024595	0,3401321
5×5	0,2974929	0,3288990
6×6	0,2958501	0,3202398

Таблиця 2.

Розбиття	Кількість ітерацій	$\omega_* = \omega R \sqrt{\rho\left(1-\nu^2\right) / E}$ (п'ятимодальний варіант [7])	$\omega_* = \omega R \sqrt{\rho\left(1-\nu^2\right) / E}$ (шестимодальний варіант)
2×2	5	0,2534	0,27473
3×3	5	0,2244	0,22858
4×4	5	0,2179	0,22084
5×5	6	0,2159	0,21800

З аналізу наведених результатів видно, що значення частот власних коливань, знайдені за шестимодальною теорією оболонок, податливих на зсув і стиснення, є більші порівняно з обчисленими згідно з іншими теоріями оболонок. Врахування обтиску показує, що оболонка швидше може піддатися резонансу, а отже, й руйнуванню.

1. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
2. *Вагін П. П., Іванова Н. В., Шинкаренко Г. А.* Про одну математичну модель динамічного деформування гнучких оболонок // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 54–59.
3. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. — 542 с.
4. *Галимов К. З.* Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – 211 с.
5. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
6. *Пелех Б. Л.* Обобщенная теория оболочек. – Львов: Вищ. шк., 1978. – 159 с.

7. *Рикардс Р. Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
8. *Савула Я. Г., Флейшман Н. П.* Расчет и оптимизация оболочек с разными срединными поверхностями. – Львов: Вищ. шк., 1989. – 172 с.
9. *Babuska I., Whiteman J. R., Strouboulis T.* Finite elements: an introduction to the method and error estimation. – Oxford: Oxford University Press, 2011. – 352 p.
10. *Libai A., Simmonds J. G.* The nonlinear theory of elastic shells. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧЕК, ПОДАТЛИВЫХ НА СДВИГ И СЖАТИЕ

Сформулирована линейная начально-краевая задача для тонких оболочек, податливых на сдвиг и сжатие. Записаны ключевые уравнения для определения собственных частот свободных колебаний рассматриваемых оболочек. Специфика использованной модели заключается в том, что за основу взята гипотеза оболочек типа Тимошенко, согласно которой нормальный элемент недеформированной оболочки после ее нагрузки остается прямолинейным, но может изменять длину и не быть ортогональным к деформированной срединной поверхности. Решена задача о свободных колебаниях круговой цилиндрической оболочки. Осуществлен сравнительный анализ полученных численных решений с приведенными в литературе.

ON FREE VIBRATIONS OF SHELLS AMENABLE TO SHEAR AND COMPRESSION

Formulated linear initial boundary value problems for thin shells amenable to shear and compression. Recorded key equation to determine the natural frequencies of free oscillations under consideration covers. The specificity of the used model is that the basis the hypothesis Timoshenko type shell, whereby normal element undeformed shell after loading is straightforward, but can change its length and not be orthogonal to the deformed middle surface. Numerically solve the problem of free oscillations of a circular cylindrical shell. The comparative analysis of the numerical solutions with the solutions given in the literature.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
27.09.12