УДК 512.64

В. П. Щедрик

ПОРОДЖУВАЛЬНА МНОЖИНА ДІЛЬНИКІВ МАТРИЦЬ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Досліджені властивості породжувальної множини, тобто множини, яка генерує всі дільники із заданою канонічною діагональною формою матриць над комутативною областю елементарних дільників. Встановлено умови, за яких ця множина утворює мультиплікативну групу.

У статті розвинуто дослідження, започатковані в праці [5] про опис дільників матриць над кільцями елементарних дільників [3].

Нехай R – комутативна область елементарних дільників. Кожну $n \times n$ матрицю A над областю R можна записати у вигляді $A = P^{-1}\mathrm{E}Q^{-1}$, де P та Q – оборотні матриці, а

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0), \ \varepsilon_k \neq 0, \ \ \varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}, \ i = 1, \ldots, k-1.$$

Матриці P, Q називають перетворювльними, а E – канонічною діагональною формою (к.д.ф.) матриці A. Множина всіх перетворювальних матриць P згідно з працями [2,5] має вигляд $\mathrm{P}_A = \mathrm{G}_{\mathrm{E}} P$, де

$$\mathrm{G}_{\mathrm{E}} = \{ H \in GL_n(R) \ \ | \ \ H\mathrm{E} = \mathrm{E}K, \ \ K \in GL_n(R) \}.$$

Структура елементів із множини G_{E} така.

Властивість 1 [5]. *Множина* G_{E} *є мультиплікативною групою і складається з усіх оборотних матриць вигляду*

$$\left\| \begin{matrix} H_1 & * \\ 0 & H_2 \end{matrix} \right\|,$$

де $H_2 \in GL_{n-k}(R)$,

$$H_1 = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1.k-1} & h_{1k} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2.k-1} & h_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1} h_{k1} & \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_2} h_{k2} & \ldots & \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}} h_{k.k-1} & h_{kk} \end{matrix} \right\|. \qquad (1)$$

Відомо [4,5], що коли $A = BC$ і Φ – к.д.ф. матриці B, то $\mathrm{E} = \Phi\Delta$. Тому, природно, класифікувати дільники матриці A, як це запропонував З. І. Боревич [1], їхніми к.д.ф. Тобто, розглядаючи задачу опису дільників матриці A, спершу зображати матрицю E у вигляді $\mathrm{E} = \Phi\Delta$, де Φ – d-матриця, тобто діагональна матриця, кожний попередній елемент якої ділить наступний, і вже після цього шукати всі дільники матриці A з к.д.ф. Φ. Згідно з працею [5], множина всіх лівих дільників матриці A з к.д.ф. $\Phi = \mathrm{diag}\,(\varphi_1, \ \ldots, \varphi_t, 0, \ldots, 0)$, $\ \varphi_t \neq 0$, $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$, $\ i = 1, \ldots, t-1$, має вигляд $(\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Phi)P)^{-1}\Phi GL_n(R)$, де

$$\mathrm{L}(\mathrm{E}, \ \Phi) = \{ L \in GL_n(R) \ \ | \ \ L\mathrm{E} = \Phi S, \ \ \ S \in M_n(R) \ \}. \qquad (2)$$

Множину $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \ \Phi)$ називатимемо ***породжувальною***.

Властивість 2 [5]. *Множина* $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \ \Phi)$ *складається з усіх оборотних матриць вигляду*

$$\left\| \begin{matrix} L_1 & * \\ L_2 & * \\ 0 & * \end{matrix} \right\|,$$

де

$$L_1 = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1.k-1} & l_{1\,k} \\ \dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2,\ \varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2.k-1} & l_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\varphi_k}{(\varphi_k,\ \varepsilon_1)} l_{k\,1} & \ldots & \ldots & \dfrac{\varphi_k}{(\varphi_k,\ \varepsilon_{k-1})} l_{k.k-1} & l_{kk} \end{matrix} \right\|,$$

$$L_2 = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1}, \varepsilon_1)} l_{k+1.1} & \ldots & \dfrac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1}, \varepsilon_k)} l_{k+1.k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\varphi_t}{(\varphi_t, \varepsilon_1)} l_{t1} & \ldots & \dfrac{\varphi_t}{(\varphi_t, \varepsilon_k)} l_{tk} \end{matrix} \right\|.$$

Мета роботи – дослідити властивості множини $\mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi)$.

Властивість 3. $\mathrm{G}_\Phi \mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi) = \mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $H \in \mathrm{G}_\Phi$ і $L \in \mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi)$. Тобто $H\Phi = \Phi K$, $K \in GL_n(R)$ та $L\mathrm{E} = \Phi S$, $S \in M_n(R)$. Тоді

$$HL\mathrm{E} = H\Phi S = \Phi KS.$$

Отже, $\mathrm{G}_\Phi \mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi) \subseteq \mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi)$. З іншого боку, оскільки одинична матриця є елементом групи G_Φ, то $\mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi) \subseteq \mathrm{G}_\Phi \mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi)$. Тому $\mathrm{G}_\Phi \mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi) = \mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi)$.

Аналогічно доводимо таке твердження.

Властивість 4. $\mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi)\mathrm{G}_\mathrm{E} = \mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi)$.

Властивість 5. $\mathrm{G}_\Phi \mathrm{G}_\mathrm{E} \subset \mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $H \in \mathrm{G}_\Phi$ і $D \in \mathrm{G}_\mathrm{E}$. Тобто $H\Phi = \Phi K$, $K \in GL_n(R)$ та $D\mathrm{E} = \mathrm{E}M$, $M \in GL_n(R)$. Оскільки $\mathrm{E} = \Phi\Delta$, то виконуються рівності

$$(HD)\mathrm{E} = H(D\mathrm{E}) = H(\mathrm{E}M) = (H\Phi)\Delta M = \Phi(K\Delta M).$$

Тобто $HD \in \mathrm{L}(\mathrm{E},\ \Phi)$. Отже, $\mathrm{G}_\Phi \mathrm{G}_\mathrm{E} \subset \mathrm{L}(\Psi,\ \Phi)$. Що і потрібно було довести.

Легко зауважити, що при $i > j$

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} = \frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} \frac{\varepsilon_{j+2}}{\varepsilon_{j+1}} \ldots \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}}.$$

Тобто $\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}$ є добутком часток першої піддіагоналі матриці (1), які знаходяться вище та правіше:

$$\begin{matrix} h_{jj} & * & * & * \\ \dfrac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} & h_{j+1.j+1} & * & * \\ * & \dfrac{\varepsilon_{j+2}}{\varepsilon_{j+1}} & h_{j+2.j+2} & * \\ & & \ddots & \ddots \\ \dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} & * & * & \dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} \quad h_{ii} \end{matrix}$$

Покажемо, що структура елементів матриць із множини $L(E,\Phi)$ подібна.

Позначимо:

$$d_{ij}=\left(\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}}\left(\frac{(\varphi_{i-1},\varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}}\left(\mathbf{L}\left(\frac{(\varphi_{j+3},\varepsilon_{j+2})}{\varphi_{j+2}}\left(\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}},\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}\right),\frac{\varepsilon_{j+2}}{\varepsilon_j}\right),\mathbf{L}\right),\frac{\varepsilon_{i-2}}{\varepsilon_j}\right),\frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_j}\right),$$

де $i>j+1$.

Лема 1. *Виконується рівність*

$$(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}\mathbf{L}\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}}=(\varphi_i,\varepsilon_j d_{ij})=s_{ij}.$$

Д о в е д е н н я. Маємо:

$$(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}=\left(\varphi_{j+2},\varepsilon_j\left(\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}},\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}\right)\right)=(\varphi_{j+2},\varepsilon_j d_{j+2.j})=s_{j+2.j}.$$

Припустимо, що

$$(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}\mathbf{L}\frac{(\varphi_{i-1},\varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}}=(\varphi_{i-1},\varepsilon_j d_{i-1.j})=s_{i-1.j}.$$

Тоді

$$s_{i-1.j}\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_1}=$$

$$=\left(\varphi_{i-1},\varepsilon_j\left(\frac{(\varphi_{i-1},\varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}}\left(\mathbf{L}\left(\frac{(\varphi_{i-1},\varepsilon_{j+2})}{\varphi_{j+2}}\left(\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}},\frac{\varepsilon_{j+2}}{\varepsilon_j}\right),\frac{\varepsilon_{i-2}}{\varepsilon_j}\right),\mathbf{L}\right),\frac{\varepsilon_{i-2}}{\varepsilon_j}\right)\right)\times$$

$$\times\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}}=(\varphi_i,\varepsilon_j d_{ij})=s_{ij}.$$

Лему доведено.

Позначимо $f_{ij}=\dfrac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}$, $i>j$.

Лема 2. *Виконується рівність*

$$f_{ij}=f_{j+1.j}f_{j+2.j+1}\mathbf{K}f_{i.i-1}(f_{ij},d_{ij}),$$

де $i=3,4,\mathbf{K},n;\ j=1,2,\mathbf{K},n-2;\ i>j+1$.

Д о в е д е н н я. Маємо:

$$\frac{f_{ij}}{f_{j+1.j}f_{j+2.j+1}\mathbf{K}f_{i.i-1}}=\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}\frac{(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)}{\varphi_{j+1}}\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+2}}\mathbf{L}\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_i}=$$

$$=\frac{1}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)\frac{(\varphi_{j+2},\varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}}\mathbf{L}\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}}=\frac{s_{ij}}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}=$$

$$=\frac{(\varphi_i,\varepsilon_j d_{ij})}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}=\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)},\frac{\varepsilon_j}{(\varphi_i,\varepsilon_j)}d_{ij}\right)=(f_{ij},d_{ij}).$$

Що і потрібно було довести.

Лема 3. *Виконується подільність* $(f_{ij},d_{ij})\mid(f_{i+k.j-s},d_{i+k.j-s})$.

Д о в е д е н н я. Маємо:

$$d_{i+k.j-s}=$$

$$=\left(\frac{(\varphi_{i+k},\varepsilon_{i+k-1})}{\varphi_{i+k-1}}\left(\mathbf{L}\left(\frac{(\varphi_{j-s+3},\varepsilon_{j-s+2})}{\varphi_{j-s+2}}\left(\frac{(\varphi_{j-s+2},\varepsilon_{j-s+1})}{\varphi_{j-s+1}},\frac{\varepsilon_{j-s+1}}{\varepsilon_{j-s}}\right),\frac{\varepsilon_{j-s+2}}{\varepsilon_{j-s}}\right),\mathbf{L}\right),\frac{\varepsilon_{i+k-1}}{\varepsilon_{j-s}}\right)=$$

$$= \left(\frac{(\varphi_{i+k}, \varepsilon_{i+k-1})}{\varphi_{i+k-1}} \left(\mathbf{L} \left(\frac{(\varphi_{j-s+3}, \varepsilon_{j-s+2})}{\varphi_{j-s+2}} \left(\frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}} d_{j+1.j-s}, \frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_{j-s}} \right), \frac{\varepsilon_{j-s+2}}{\varepsilon_{j-s}} \right), \mathbf{L} \right), \frac{\varepsilon_{i+k-1}}{\varepsilon_{j-s}} \right).$$

Оскільки $\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j} \mid \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{j-s}}$, то

$$d_{ij} \mid \left(\frac{(\varphi_i, \varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}} \left(\mathbf{L} \left(\frac{(\varphi_{j+2}, \varepsilon_{j+1})}{\varphi_{j+1}} d_{j+1.j-s}, \frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_{j-s}} \right), \mathbf{L} \right), \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_{j-s}} \right).$$

Отже, $d_{ij} \mid d_{i+k.j-s}$. Зауваживши також, що $f_{ij} \mid f_{i+k.j-s}$, отримуємо $(f_{ij}, d_{ij}) \mid (f_{i+k.j-s}, d_{i+k.j-s})$. Лему доведено.

Таким чином, елементи множини $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ та групи G_Φ мають схожу структуру. Тому природно постає питання: коли існує така d-матриця Δ, що $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathrm{G}_\Delta$. Якщо E – матриця порядку 2, то множина $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ завжди є групою. Зокрема, якщо $\varphi_2 \neq 0$, то

$$\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathrm{G}_{\Delta_2}, \text{ де } \Delta_2 = diag\left(1, \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\ \varepsilon_1)}\right).$$

Якщо ж $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, 0)$, то множина $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ є групою одиниць кільця верхніх трикутних матриць. Для матриць вищих порядків множина $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ не завжди є групою. Умови, за яких $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ є мультиплікативною групою, сформульовано в такій теоремі.

Теорема. *Для того, щоб існувала така d-матриця Δ, що $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Phi) = \mathrm{G}_\Delta$, де $\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \mathbf{K}, \varepsilon_k, 0, \mathbf{K}, 0)$, $\varepsilon_k \neq 0$, $1 \le k \le n$, $n > 2$, $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \mathbf{K}, \varphi_t, 0, \mathbf{K}, 0)$, $\varphi_t \neq 0$, $1 \le t \le n$, $\Phi \mid \mathrm{E}$, необхідно та достатньо, щоб при $\det\Phi \neq 0$ виконувалась умова $(f_{n1}, d_{n1}) = 1$ або ж*

$$\frac{f_{n1}}{f_{21} f_{32} \mathbf{K}\, f_{n.n-1}} \in U(R).$$

Якщо $\det\Phi = 0$, то $k = t$ і $(f_{k1}, d_{k1}) = 1$ або ж

$$\frac{f_{k1}}{f_{21} f_{32} \mathbf{K}\, f_{k.k-1}} \in U(R).$$

Д о в е д е н н я. **Необхідність**. Нехай Φ – неособлива матриця. Розглянемо матриці порядку 3. Множина $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \Phi)$ містить матрицю

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тому і

$$A_3^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2f_{21} & 1 & 0 \\ 2f_{31} + f_{21}f_{32} & 2f_{32} & 1 \end{Vmatrix} \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \Phi).$$

Отже,

$$2f_{31} + f_{21}f_{32} = f_{31}l_{31}.$$

На підставі леми 2 $f_{31} = f_{21}f_{32}(f_{31}, d_{31})$. Тоді

$$f_{21}f_{32}(f_{31}, d_{31})(l_{31} - 2) = f_{21}f_{32}.$$

Тобто

$$(f_{31}, d_{31})(l_{31} - 2) = 1.$$

Таким чином, $(f_{31}, d_{31}) = 1$.

Припустимо, що наше твердження правильне для матриць порядку $n-1$. І нехай $\mathrm{L}(\mathrm{E},\Phi)$ – мультиплікативна група порядку n. Ця група містить підгрупу $1\oplus \mathrm{L}(\mathrm{E}_1,\Phi_1)$, де $\mathrm{E}_1=\mathrm{diag}(\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$, $\Phi_1=\mathrm{diag}(\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$. Звідси випливає, що множина $\mathrm{L}(\mathrm{E}_1,\Phi_1)$ також є мультиплікативною групою. Оскільки множина $\mathrm{L}(\mathrm{E}_1,\Phi_1)$ складається з оборотних матриць порядку $n-1$ вигляду

$$\left\|\begin{matrix} l_{22} & l_{23} & \ldots & l_{2n} \\ f_{32}l_{32} & l_{33} & \ldots & l_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n2}l_{n2} & f_{n3}l_{n3} & \ldots & l_{nn} \end{matrix}\right\|,$$

то згідно з припущенням $(f_{n2},d_{n2})=1$. Розглянемо матрицю

$$A_n=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ f_{n1} & f_{n2} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix}\right\|\in \mathrm{L}(\mathrm{E},\Phi).$$

Оскільки $A_n^2=\|a_{ij}\|_1^n\in \mathrm{L}(\mathrm{E},\Phi)$, то

$$a_{n1}=2f_{n1}+f_{n2}f_{21}=f_{n1}l_{n1}.$$

На підставі леми 2 $f_{n1}=f_{21}f_{32}\ldots f_{n.n-1}(f_{n1},d_{n1})$ та $f_{n2}=f_{32}\ldots f_{n.n-1}$. Отже,

$$f_{21}f_{32}\ldots f_{n.n-1}(f_{n1},d_{n1})(l_{n1}-2)=f_{21}f_{32}\ldots f_{n.n-1}.$$

Звідси випливає, що $(f_{n1},d_{n1})=1$.

Нехай E,Φ – особливі матриці. На підставі властивості 1 множина $\mathrm{L}(\mathrm{E},\Phi)$ містить нульовий $(n-t)\times k$ блок. З іншого боку, оскільки існує така d-матриця Δ, що множина $\mathrm{L}(\mathrm{E},\Phi)$ збігається з групою G_Δ, яка згідно з властивістю 2 містить нульовий $(n-s)\times s$ блок, то $k=t$. Із властивості 2 також випливає, що

$$\mathrm{L}(\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k),\ \mathrm{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_k))=\mathrm{G}_{\Delta_k}.$$

Тоді на підставі щойно доведеного $(f_{k1},d_{k1})=1$.

Достатність. Нехай Φ – несобливa матриця. Згідно з лемою 3

$$(f_{ij},d_{ij})\mid(f_{n1},d_{n1})=1,\ i=3,4,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n-2;\ i>j+1.$$

Таким чином,

$$(f_{ij},d_{ij})=1,\ i=3,4,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n-2;\ i>j+1.$$

На підставі леми 2

$$f_{ij}=f_{j+1.j}f_{j+2.j+1}\ldots f_{i.i-1},\ i=3,4,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n-2;\ i>j+1.$$

Отже, шуканою d-матрицею буде матриця

$$\Delta=\mathrm{diag}(1,\ f_{21},\ f_{21}f_{32},\ldots,\ f_{21}f_{32}\ldots f_{n.n-1}).$$

Якщо E,Φ – особливі матриці, то легко переконатися, що в цьому випадку

$$\Delta=\mathrm{diag}(1,\ f_{21},\ f_{21}f_{32},\ldots,\ f_{21}f_{32}\ldots f_{k.k-1},0,\ldots,0).$$

І для завершення доведення теореми достатньо зауважити, що згідно з лемою 2 умови $(f_{i1}, d_{i1}) = 1$ і $\dfrac{f_{i1}}{f_{21} f_{32} \ldots f_{i,i-1}} \in U(R)$ еквівалентні.

1. *Боревич З. И.* О факторизации матриц над кольцом главных идеалов // Тезисы сообщ. III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей, 21–24 сент. 1976, Тарту: Тарт. ун-т, 1976. – С. 19.
2. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14–21.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.
4. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Academic Press, 1972. – 224 p.
5. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – № 2. – P. 79–99.

ПОРОЖДАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО ДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ И ЕГО СВОЙСТВА

Исследованы свойства порождающего множества, т.е. множества, которое генерирует все делители с заданной канонической диагональной формой матриц над коммутативной областью элементарных делителей. Указаны условия, при которых это множество образует мультипликативную группу.

GENERATED SET OF MATRICES DIVISORS AND ITS PROPERTIES

The properties of generated set i.e. the set which generate all matrices divisors with prescribed canonical diagonal form over commutative elementary divisor domain, is investigated. The condition under wich this set is multiplicative group is showed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.09.13