УДК 519.6:517.958

І. Є. Бернакевич, П. П. Вагін, І. Я. Шот

НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ

З використанням співвідношень геометрично нелінійної теорії тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення (шестимодальний варіант), записано ключові рівняння для визначення їх напружено-деформованого стану. Методом скінченних елементів отримано числові розв'язки задач про деформування пластини-смуги та катеноїда на основі розглядуваної теорії, порівняно ці розв'язки із розв'язками, побудованими на основі теорій оболонок Кірхгофа–Лява та Тимошенка–Міндліна (п'ятимодальний варіант).

Вступ. Визначення напружено-деформованого стану тонких гнучких оболонок у зв'язку з підвищенням інтенсивності експлуатації оболонкових конструкцій та висуванням жорстких вимог для забезпечення їх надійності, займає вагоме місце серед задач механіки деформівного твердого тіла.

Фундаментальні результати розробки геометрично нелінійної теорії оболонок наведені у праці [6], де викладено загальний підхід до проблеми деформації гнучких тіл. В інженерній практиці часто використовують математичні моделі тонких оболонок, що ґрунтуються на класичних гіпотезах Кірхгофа–Лява та Тимошенка–Міндліна (п'ятимодальний варіант) [2, 13]. Однак широкого розповсюдження набули уточнені математичні моделі оболонок, що враховують поперечні лінійні та зсувні деформації [4, 7, 12].

Розрахунок гнучких оболонкових конструкцій призводить до розв'язування нелінійних задач, що викликає певні труднощі, подолати які можна, застосувавши числові методи [1, 9], засновані, зокрема, на варіаційних формулюваннях розглядуваних задач.

У цій статті записано ключові рівняння для визначення напружено-деформованого стану гнучких оболонок, податливих до зсуву та стиснення, розрахунок яких базується на методі скінченних елементів [1, 9, 11].

Вихідні гіпотези теорії оболонок. Розглянемо оболонку як тривимірне тіло, що в недеформованому стані віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат α_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$, причому напрям α_3 є нормальним до серединної поверхні Ω оболонки:

$$V=\left\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3):\ \ (\alpha_1,\alpha_2)\in\Omega,\ \ -h/2\le\alpha_3\le h/2\right\}.$$

Вважатимемо, що координатні лінії α_1,α_2 серединної поверхні Ω збігаються з лініями головних кривин, а товщина h є суттєво менша від характерних розмірів оболонки.

Згідно з кінематичною гіпотезою теорії оболонок типу Тимошенка, переміщення точок оболонки під час її деформування можна подати у вигляді

$$U_i\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3\gamma_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad i=\overline{1,3}\,, \tag{1}$$

де u_i – переміщення точок серединної поверхні Ω оболонки; γ_i – компоненти вектора кутів повороту нормалі до серединної поверхні оболонки [7]

$$\vec{\gamma}=-\gamma_2\vec{e}_1+\gamma_1\vec{e}_2+\gamma_3\vec{e}_3\,,$$

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – орти ортогональної системи координат $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, причому вектор $\vec{e}_3$ напрямлено в бік опуклості серединної поверхні.

Вважаємо, що розглядувана оболонка є лінійно пружною [8]. Таке припущення справедливе для малих деформацій за немалих поворотів. Тоді для ортотропного матеріалу оболонки компоненти тензорів напружень σ^*_{ij} $\left(i, j = \overline{1,3}\right)$ та деформацій ε_{ij} $\left(i, j = \overline{1,3}\right)$ пов'язані між собою такими залежностями:

$$\begin{aligned}
&\sigma^*_{11} = a_{11}\varepsilon_{11} + a_{12}\varepsilon_{22} + a_{13}\varepsilon_{33}, \quad \sigma^*_{12} = a_{44}\varepsilon_{12}, \\
&\sigma^*_{22} = a_{21}\varepsilon_{11} + a_{22}\varepsilon_{22} + a_{23}\varepsilon_{33}, \quad \sigma^*_{13} = a_{55}\varepsilon_{13}, \\
&\sigma^*_{33} = a_{31}\varepsilon_{11} + a_{32}\varepsilon_{22} + a_{33}\varepsilon_{33}, \quad \sigma^*_{23} = a_{66}\varepsilon_{23},
\end{aligned} \tag{2}$$

де σ^*_{ij} – компоненти тензора напружень на площадках у деформованому стані, причому за малих деформацій $\sigma^*_{ij} = \sigma^*_{ji}$ [5]. Надалі символ (*) біля компонент напружень для зручності не використовуватимемо. Коефіцієнти a_{ij} визначають за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned}
&a_{11} = E_1\left(1 - \nu_{23}\nu_{32}\right)/D, \quad a_{22} = E_2\left(1 - \nu_{13}\nu_{31}\right)/D, \\
&a_{33} = E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})/D, \quad a_{44} = G_{12}, \quad a_{55} = G_{13}, \\
&a_{66} = G_{23}, \quad a_{12} = a_{21} = E_1\left(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}\right)/D, \\
&a_{13} = a_{31} = E_1\left(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}\right)/D, \quad a_{23} = a_{32} = E_2\left(\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}\right)/D, \\
&D = 1 - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32},
\end{aligned}$$

де E_i – модулі Юнґа матеріалу в осях ортотропії оболонки; ν_{ij} – коефіцієнти Пуассона в осях ортотропії оболонки; G_{ij} – модулі зсуву в площадках, перпендикулярних до серединної поверхні.

На відміну від математичних моделей оболонок з жорсткою нормаллю, постулювання ненульового γ_3 дає можливість моделювати напружено-деформований стан оболонки з ненульовою апроксимацією σ_{33}.

Деформація оболонки. Згідно з [6], співвідношення для компонент тензора деформацій ε_{ij} для тонкостінних гнучких тіл пов'язані з лінійними деформаціями E_{ij} та кутами повороту ω_n формулами

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = E_{11} + \frac{1}{2}\left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right), \\
&\varepsilon_{12} = E_{12} - \omega_1\omega_2, \quad (1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3).
\end{aligned} \tag{3}$$

Видовження E_{ii}, зсуви E_{ij} $(i \neq j)$ та кути повороту ω_n, що входять у (3), мають вигляд

$$\begin{aligned}
&E_{ii} = \frac{e_{ii} + \alpha_3\kappa_{ii}}{1 + \alpha_3 k_i}, \quad E_{33} = e_{33}, \\
&E_{12} = \frac{2e_{12} + \alpha_3 2\kappa_{12}}{\left(1 + \alpha_3 k_1\right)\left(1 + \alpha_3 k_2\right)}, \quad E_{i3} = \frac{2e_{i3} + \alpha_3 2\kappa_{i3}}{1 + \alpha_3 k_i}, \quad (i = 1, 2),
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\omega_1 = \frac{\overset{0}{\omega_1} + \alpha_3 \overset{1}{\omega_1}}{1 + \alpha_3 k_2}, \quad \omega_2 = \frac{\overset{0}{\omega_2} + \alpha_3 \overset{1}{\omega_2}}{1 + \alpha_3 k_1}, \quad \omega_3 = \frac{\overset{0}{\omega_3} + \alpha_3 \overset{1}{\omega_3}}{\left(1 + \alpha_3 k_1\right)\left(1 + \alpha_3 k_2\right)}, \tag{5}$$

де $\{e_{ij}(u)\}$ та $\{\kappa_{ij}(u)\}$ – тангенціальні та згинні компоненти тензора деформацій;

$$\overset{0}{\omega}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_2 u_3}{A_2} - \gamma_2 - k_2 u_2\right), \quad \overset{0}{\omega}_2 = \frac{1}{2}\left(\gamma_1 + k_1 u_1 - \frac{\partial_1 u_3}{A_1}\right),$$

$$\overset{0}{\omega}_3 = \frac{\partial_1 (A_2 u_2)}{2A_1A_2} - \frac{\partial_2 (A_1 u_1)}{2A_1A_2}, \quad \overset{1}{\omega}_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial_2\gamma_3}{A_2} - k_2\gamma_2, \tag{6}$$

$$\overset{1}{\omega}_2 = k_1\gamma_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial_1\gamma_3}{A_1}, \quad \overset{1}{\omega}_3 = \frac{\partial_1 (A_2\gamma_2)}{2A_1A_2} - \frac{\partial_2 (A_1\gamma_1)}{2A_1A_2}.$$

Тут $A_1 = A_1(\alpha_1,\alpha_2)$, $A_2 = A_2(\alpha_1,\alpha_2)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки Ω; $k_1 = k_1(\alpha_1,\alpha_2)$, $k_2 = k_2(\alpha_1,\alpha_2)$ – її головні кривини відповідно. В формулах (6) та надалі введено позначення

$$\partial_1 = \partial/\partial\alpha_1, \quad \partial_2 = \partial/\partial\alpha_2, \quad \partial_3 = \partial/\partial\alpha_3.$$

Таким чином, враховуючи (4) та (5), від деформаційних співвідношень (3) перейдемо до таких:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii} + \alpha_3\chi_{ii}}{1+\alpha_3 k_i}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \frac{2\varepsilon_{12} + \alpha_3 2\chi_{12}}{(1+\alpha_3k_1)(1+\alpha_3k_2)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{i3} = \frac{2\varepsilon_{i3} + \alpha_3 2\chi_{i3}}{1+\alpha_3k_i}, \quad (i=1,2), \tag{7}$$

де

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_2^2 + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_3^2, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_1^2 + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_3^2,$$

$$\varepsilon_{33} = e_{33}, \quad \varepsilon_{12} = e_{12} - \overset{0}{\omega}_1\overset{0}{\omega}_2, \quad (1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3), \tag{8}$$

$$\chi_{11} = K_{11} + \overset{0}{\omega}_2\overset{1}{\omega}_2 + \overset{0}{\omega}_3\overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}k_1\overset{0}{\omega}{}_2^2 - \frac{1}{2}(k_1+2k_2)\overset{0}{\omega}{}_3^2,$$

$$\chi_{22} = K_{22} + \overset{0}{\omega}_1\overset{1}{\omega}_1 + \overset{0}{\omega}_3\overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}k_2\overset{0}{\omega}{}_1^2 - \frac{1}{2}(2k_1+k_2)\overset{0}{\omega}{}_3^2,$$

$$\chi_{12} = K_{12} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1\overset{1}{\omega}_2 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_1\overset{0}{\omega}_2,$$

$$\chi_{13} = K_{13} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1\overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_1\overset{0}{\omega}_3 + k_2\overset{0}{\omega}_1\overset{0}{\omega}_3,$$

$$\chi_{23} = K_{23} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_2\overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_2\overset{0}{\omega}_3 + k_1\overset{0}{\omega}_2\overset{0}{\omega}_3.$$

Рівняння рівноваги та фізичні співвідношення. Диференціальні рівняння, що описують рівновагу деформованого тіла, та статичні крайові умови можна записати з принципу можливих переміщень [6]:

$$\partial_1(N_{11}A_2) - N_{22}\partial_1A_2 + \left(N^*_{12} + N^*_{21}\right)\partial_2A_1 + A_1\partial_2N^*_{12} + k_1A_1A_2N^*_{13} +$$
$$+ \frac{1}{2}\partial_2\left(\left(M^*_{12} + M^*_{21}\right)k_1A_1\right) + \frac{1}{2}\left(M^*_{12} + M^*_{21}\right)k_2\partial_2A_1 = -P_1A_1A_2,$$

$$-N_{11}\partial_2A_1 + \partial_2(N_{22}A_1) + \left(N^*_{12} + N^*_{21}\right)\partial_1A_2 + A_2\partial_1N^*_{21} + k_2A_1A_2N^*_{23} + k_2A_1A_2N^*_{23} +$$
$$+ \frac{1}{2}\partial_1\left(\left(M^*_{12} + M^*_{21}\right)k_2A_2\right) + \frac{1}{2}\left(M^*_{12} + M^*_{21}\right)k_1\partial_1A_2 = -P_2A_1A_2,$$

$$-A_1A_2(N_{11}k_1 + N_{22}k_2) + \partial_1\left(N^*_{13}A_2\right) + \partial_2\left(N^*_{23}A_1\right) = -P_3A_1A_2, \tag{9}$$

$$-A_1A_2N^*_{31} + \partial_1(M_{11}A_2) - M_{22}\partial_1A_2 + \left(M^*_{12} + M^*_{21}\right)\partial_2A_1 + A_1\partial_2M^*_{12} = -A_1A_2m_1,$$

$$-A_1A_2N^*_{32} - M_{11}\partial_2 A_1 + \partial_2\left(M_{22}A_1\right) + \left(M^*_{12} + M^*_{21}\right)\partial_1 A_2 + A_2\partial_1 M^*_{21} = -A_1A_2 m_2,$$

$$-A_1A_2\left(N_{33} + k_1M_{11} + k_2M_{22}\right) + \partial_1\left(A_2M^*_{13}\right) + \partial_2\left(A_1M^*_{23}\right) = -A_1A_2 m_3,$$

де N_{ij}, M_{ij} − інтегральні характеристики напружень [7]; P_i, m_i − усереднені характеристики навантаження [7]; N^*_{ij}, M^*_{ij} − нововведені характеристики напружень

$$N^*_{12} = S - \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\omega}_3\big(N_{11} + N_{22} - (k_1 + 2k_2)M_{11} - (2k_1 + k_2)M_{22}\big) - \overset{1}{\omega}_1 M_{13} + {}$$
$$+\overset{0}{\omega}_1(2k_2M_{13} - N_{13}) + \overset{0}{\omega}_2(2k_1M_{23} - N_{23}) + \overset{1}{\omega}_3(M_{11} + M_{22}) - \overset{1}{\omega}_2 M_{23}\Big),$$

$$N^*_{21} = S + \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\omega}_3\big(N_{11} + N_{22} - (k_1 + 2k_2)M_{11} - (2k_1 + k_2)M_{22}\big) - \overset{1}{\omega}_1 M_{13} + {}$$
$$+\overset{0}{\omega}_1(2k_2M_{13} - N_{13}) + \overset{0}{\omega}_2(2k_1M_{23} - N_{23}) + \overset{1}{\omega}_3(M_{11} + M_{22}) - \overset{1}{\omega}_2 M_{23}\Big),$$

$$N^*_{13} = N_{13} - \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\omega}_2(N_{11} - k_1M_{11}) - \overset{0}{\omega}_1 S + \overset{0}{\omega}_3(2k_1M_{23} - N_{23}) + \overset{1}{\omega}_2 M_{11} - \overset{1}{\omega}_1 H - \overset{1}{\omega}_3 M_{23}\Big),$$

$$N^*_{31} = N_{13} + \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\omega}_2(N_{11} + k_1M_{11}) - \overset{1}{\omega}_3 M_{23} + \overset{1}{\omega}_2 M_{11} - \overset{0}{\omega}_1(S + 2k_1H) - \overset{0}{\omega}_3 N_{23} - \overset{1}{\omega}_1 H\Big),$$

$$N^*_{23} = N_{23} + \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\omega}_1(N_{22} - k_2M_{22}) - \overset{0}{\omega}_2 S + \overset{0}{\omega}_3(2k_2M_{13} - N_{13}) + \overset{1}{\omega}_1 M_{22} - \overset{1}{\omega}_2 H - \overset{1}{\omega}_3 M_{13}\Big),$$

$$N^*_{32} = N_{23} - \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\omega}_1(N_{22} + k_2M_{22}) - \overset{1}{\omega}_3 M_{13} + \overset{1}{\omega}_1 M_{22} - \overset{0}{\omega}_2(S + 2k_2H) - \overset{0}{\omega}_3 N_{13} - \overset{1}{\omega}_2 H\Big),$$

$$M^*_{12} = H - \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\omega}_3(M_{11} + M_{22}) - \overset{0}{\omega}_1 M_{13} - \overset{0}{\omega}_2 M_{23}\Big), \qquad (10)$$

$$M^*_{21} = H + \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\omega}_3(M_{11} + M_{22}) - \overset{0}{\omega}_1 M_{13} - \overset{0}{\omega}_2 M_{23}\Big),$$

$$M^*_{13} = M_{13} - \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\omega}_2 M_{11} - \overset{0}{\omega}_1 H - \overset{0}{\omega}_3 M_{23}\Big),$$

$$M^*_{23} = M_{23} + \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\omega}_1 M_{22} - \overset{0}{\omega}_2 H - \overset{0}{\omega}_3 M_{13}\Big).$$

Тут введені позначення $H = M_{12} = M_{21}$, $S = N_{12} - k_2M_{21} = N_{21} - k_1M_{12}$.

Запишемо вирази для статичних крайових умов на напруження на частині Γ_σ контуру Γ серединної поверхні:

$$N_t = N_{11}\cos^2(n,\alpha_1) + N_{22}\sin^2(n,\alpha_1) + \frac{1}{2}\left(N^*_{12} + N^*_{21}\right)\sin 2(n,\alpha_1) + {}$$
$$+\frac{1}{4}(k_1 + k_2)\left(M^*_{12} + M^*_{21}\right)\sin 2(n,\alpha_1),$$

$$N_s = \frac{1}{2}(N_{22} - N_{11})\sin 2(n,\alpha_1) - N^*_{12}\sin^2(n,\alpha_1) + N^*_{21}\cos^2(n,\alpha_1) + {}$$
$$+\frac{1}{2}\left(k_2\cos^2(n,\alpha_1) - k_1\sin^2(n,\alpha_1)\right)\left(M^*_{12} + M^*_{21}\right),$$

$$N_n = N^*_{13}\cos(n,\alpha_1) + N^*_{23}\sin(n,\alpha_1), \qquad (11)$$

$$M_t = M_{11}\cos^2(n,\alpha_1) + M_{22}\sin^2(n,\alpha_1) + \frac{1}{2}\left(M^*_{12} + M^*_{21}\right)\sin 2(n,\alpha_1),$$

$$M_s = \frac{1}{2}(M_{22} - M_{11})\sin 2(n,\alpha_1) - M^*_{12}\sin^2(n,\alpha_1) + M^*_{21}\cos^2(n,\alpha_1),$$

$$M_n = M_{13}^* \cos(n, \alpha_1) + M_{23}^* \sin(n, \alpha_1).$$

Тут через n позначено нормаль до межі серединної поверхні оболонки.

Для встановлення кінематичної визначеності системи необхідно додати також крайові умови в зміщеннях [7] на $\Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_\sigma$:

$$\begin{aligned} &u_t^b = u_1 \cos(n, \alpha_1) + u_2 \sin(n, \alpha_1), \quad u_s^b = -u_1 \sin(n, \alpha_1) + u_2 \cos(n, \alpha_1), \\ &u_n^b = -u_3, \quad \gamma_t^b = \gamma_1 \cos(n, \alpha_1) + \gamma_2 \sin(n, \alpha_1), \\ &\gamma_s^b = -\gamma_1 \sin(n, \alpha_1) + \gamma_2 \cos(n, \alpha_1), \quad \gamma_n^b = \gamma_3 . \end{aligned} \tag{12}$$

Щоб отримати замкнену систему, що описує нелінійне деформування оболонок, податливих до зсуву та стиснення, наведені вище рівняння слід доповнити фізичними співвідношеннями, що пов'язують деформації з внутрішніми зусиллями та моментами. Для цього підставимо в пружний потенціал

$$2W = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} \tag{13}$$

закон пружності тривимірної теорії (2)

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2}\Big(&a_{11}\varepsilon_{11}^2 + a_{22}\varepsilon_{22}^2 + a_{33}\varepsilon_{33}^2 + a_{44}\varepsilon_{12}^2 + a_{55}\varepsilon_{13}^2 + a_{66}\varepsilon_{23}^2 + (a_{12} + a_{21})\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \\ &+ (a_{13} + a_{31})\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + (a_{23} + a_{32})\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\Big) . \end{aligned} \tag{14}$$

Співвідношення пружності теорії оболонок отримаємо із формул [7]

$$\begin{aligned} &N_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon_{11}} = h\left(a_{11}\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})\varepsilon_{22} + \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})\varepsilon_{33}\right) \\ &N_{22} = \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon_{22}} = h\left(a_{22}\varepsilon_{22} + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})\varepsilon_{33}\right) \\ &N_{33} = \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon_{33}} = h\left(a_{33}\varepsilon_{33} + \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})\varepsilon_{22}\right) \\ &S = \frac{\partial W_0}{\partial\, 2\varepsilon_{12}} = 2a_{44}h\varepsilon_{12}, \quad N_{13} = \frac{\partial W_0}{\partial\, 2\varepsilon_{13}} = 2a_{55}h\varepsilon_{13}, \\ &N_{23} = \frac{\partial W_0}{\partial\, 2\varepsilon_{23}} = 2a_{66}h\varepsilon_{23}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$M_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial \chi_{11}} = \frac{h^3}{12}\left(a_{11}\chi_{11} + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})\chi_{22}\right)$$

$$H = \frac{\partial W_0}{\partial\, 2\chi_{12}} = \frac{h^3}{6}a_{44}\chi_{12}, \; M_{13} = \frac{\partial W_0}{\partial\, 2\chi_{13}} = \frac{h^3}{6}a_{55}\chi_{13}, \; M_{23} = \frac{\partial W_0}{\partial\, 2\chi_{23}} = \frac{h^3}{6}a_{66}\chi_{23},$$

де $W_0 = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} W(1 + \alpha_3 k_1)(1 + \alpha_3 k_2)\, d\alpha_3$ – питома енергія деформації.

Таким чином, напружено-деформований стан оболонок, податливих до зсуву та стиснення, повністю описують деформаційні співвідношення (8), рівняння рівноваги (9) з відповідними статичними (11) та кінематичними (12) крайовими умовами, співвідношення пружності (15).

Розв'язували задачі механіки деформування оболонок методом скінченних елементів [1, 9, 11] з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій серендипового типу, що базується на варіаційних принципах. Варіаційне формулювання задачі нелінійної теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення, та обчислювальні аспекти методу скінченних елементів наведено у праці [10].

Числові приклади. Розглядали оболонку, утворену обертанням лінії $y = a\ ch(x/a)$ навколо осі ox, серединна поверхня якої − поверхня обертання змінної від'ємної гаусової кривини $k_1 = -\ a\ /\ y^2$ [5]. Контур оболонки $x = 0$ вільний, а контур $x = x_n$ жорстко закріплений. Оболонка деформується під дією рівномірно розподіленого осьового поверхневого навантаження q.

Розраховували для таких вхідних параметрів: $a = 0,4$ м, $x_n = 0,8$ м, $E = 0,7 \cdot 10^6$ кг/см^2, $\nu = 0,3$, $h = 0,02$ м, $q = 17$ кг/см^2 [5].

На рис. 1 і 2 наведено графіки переміщення серединної поверхні оболонки u_3, меридіального напруження σ_{11} на внутрішній поверхні оболонки. Криві *1* та *2* − розв'язки за геометрично лінійною та нелінійною теоріями. Маркерами позначено числовий розв'язок, наведений у праці [5] в межах теорії Кірхгофа–Лява, зокрема, квадратами − лінійний розв'язок, зірочками − нелінійний.

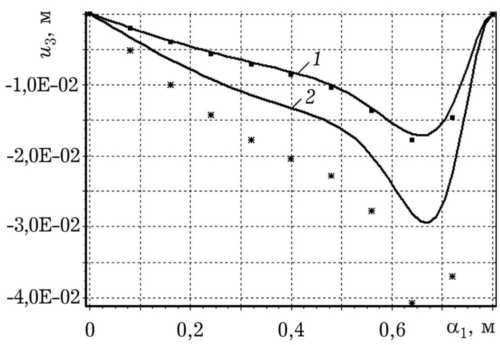

Рис. 1. Переміщення u_3 вздовж меридіана катеноїда.

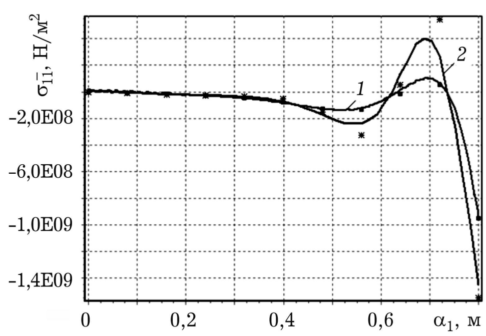

Рис. 2. Меридіальне напруження на внутрішній поверхні катеноїда.

Як видно з рисунків, числові результати, отримані з використанням розглядуваної теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення, якісно погоджуються з числовими розв'язками цієї задачі за теорією Кірхгофа–Лява, наведеними у праці [5] (значення відносної товщини розглядуваного катеноїда не перевищує 1/20).

Також розглядали задачу про визначення переміщень у пластині-смузі довжини l, що знаходиться під дією рівномірного навантаження P_3. Її край $\alpha_1 = 0$ жорстко закріплений, а $\alpha_1 = l$ − вільний.

Порівнювали числові розв'язки цієї задачі, отримані на основі розглядуваної шестимодальної теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення, числові розв'язки на основі п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка−Міндліна [3] та аналітичний розв'язок за п'ятимодальною теорією [3].

Числовий розв'язок задачі одержали за таких вхідних значень: $l = 1$ м; $h = 0,05$ м; $\nu = 0,3$; $E = 10^6$ Н/м^2; $P_3 = 1$ Н/м^2.

У табл. 1 наведено значення прогинів u_3, отриманих під час розв'язування задачі в лінійній та нелінійній (виділено курсивом у кожному рядку) постановках. Значення прогинів наведено за послідовного згущення сітки скінченних елементів. Цифра 1 − аналітичний розв'язок [3]; 2, 4, 6 − числові розв'язки (шестимодальний варіант) за використання 5, 10 та 20 скінченних елементів по довжині пластини; 3, 5, 7 − числові розв'язки (п'ятимодальний варіант) [3] за цього ж скінченноелементного розбиття. Табл. 2 містить аналогічні значення для переміщень u_1.

Таблиця 1.

Прогини $u_3 \cdot 10^2$ (м) пластини-смуги

	1	2	3	4	5	6	7
α_1, м	Аналітичн. розв.	5 елементів		10 елементів		20 елементів	
		шестимод. варіант	п'ятимод. варіант	шестимод. варіант	п'ятимод. варіант	шестимод. варіант	п'ятимод. варіант
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		0.0	*0.0*	*0.0*	*0.0*	*0.0*	*0.0*
0.1	-0.0210	-0.015504	-0.019711	-0.016739	-0.020882	-0.016902	-0.021003
		-0.015503	*-0.019711*	*-0.016739*	*-0.020882*	*-0.016902*	*-0.021003*
0.2	-0.0774	-0.059983	-0.074887	-0.062413	-0.077169	-0.062721	-0.077399
		-0.059982	*-0.074885*	*-0.062413*	*-0.077169*	*-0.062721*	*-0.077399*
0.3	-0.1617	-0.127564	-0.158236	-0.130960	-0.161436	-0.131396	-0.161762
		-0.127562	*-0.158233*	*-0.130960*	*-0.161436*	*-0.131396*	*-0.161762*
0.4	-0.2675	-0.212709	-0.263072	-0.217030	-0.267130	-0.217578	-0.267539
		-0.212707	*-0.263067*	*-0.217030*	*-0.267130*	*-0.217578*	*-0.267539*
0.5	-0.3890	-0.310973	-0.383852	-0.315990	-0.388573	-0.316632	-0.389052
		-0.310969	*-0.383845*	*-0.315989*	*-0.388573*	*-0.316632*	*-0.389052*
0.6	-0.5215	-0.418244	-0.515634	-0.423915	-0.520960	-0.424634	-0.521497
		-0.418239	*-0.515625*	*-0.423915*	*-0.520960*	*-0.424634*	*-0.521497*
0.7	-0.6609	-0.531501	-0.654625	-0.537598	-0.660360	-0.538377	-0.660941
		-0.531496	*-0.654614*	*-0.537598*	*-0.660360*	*-0.538377*	*-0.660941*
0.8	-0.8043	-0.648061	-0.797629	-0.654542	-0.803716	-0.655364	-0.804329
		-0.648054	*-0.797616*	*-0.654542*	*-0.803715*	*-0.655364*	*-0.804329*
0.9	-0.9495	-0.766328	-0.942600	-0.772965	-0.948843	-0.773812	-0.949475
		-0.766320	*-0.942585*	*-0.772964*	*-0.948842*	*-0.773812*	*-0.949475*
1.0	-1.0951	-0.885044	-1.088091	-0.891796	-1.094431	-0.892652	-1.095069
		-0.885035	*-1.088073*	*-0.891795*	*-1.094430*	*-0.862937*	*-1.095069*

Таблиця 2.

Переміщення $u_1 \cdot 10^5$ (м) пластини-смуги

	1	2	3	4	5	6	7
α_1, м	Аналітичн. розв.	5 елементів		10 елементів		20 елементів	
		шестимод. варіант	п'ятимод. варіант	шестимод. варіант	п'ятимод. варіант	шестимод. варіант	п'ятимод. варіант
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		0.0	*0.0*	*0.0*	*0.0*	*0.0*	*0.0*
0.1	-0.0279	-0.001273	0.0	-0.001641	0.0	-0.001694	0.0
		-0.017697	*-0.024582*	*-0.019534*	*-0.027666*	*-0.019687*	*-0.027916*
0.2	-0.1896	-0.003415	0.0	-0.003569	0.0	-0.003644	0.0
		-0.121465	*-0.180105*	*-0.127823*	*-0.188741*	*-0.128655*	*-0.189600*
0.3	-0.5461	-0.005291	0.0	-0.0055182	0.0	-0.005594	0.0
		-0.351968	*-0.527660*	*-0.365681*	*-0.544332*	*-0.367405*	*-0.545997*
0.4	-1.1049	-0.007262	0.0	-0.0074681	0.0	-0.007544	0.0
		-0.717287	*-1.076750*	*-0.738342*	*-1.102172*	*-0.741032*	*-1.104713*
0.5	-1.8418	-0.009203	0.0	-0.0094181	0.0	-0.009494	0.0
		-1.201584	*-1.804631*	*-1.229859*	*-1.838237*	*-1.233487*	*-1.841631*

Продовження табл. 2.

0.6	-2.7175	-0.011156	0.0	-0.0113681	0.0	-0.011444	0.0
		-1.778793	*-2.671515*	*-1.813948*	*-2.713023*	*-1.818412*	*-2.717179*
0.7	-3.6883	-0.031053	0.0	-0.013318	0.0	-0.013394	0.0
		-2.421744	*-3.635971*	*-2.4617925*	*-3.683240*	*-2.466940*	*-3.688020*
0.8	-4.7153	-0.015055	0.0	-0.0152681	0.0	-0.015344	0.0
		-3.102720	*-4.657394*	*-3.147288*	*-4.709692*	*-3.152939*	*-4.714932*
0.9	-5.7680	-0.017005	0.0	-0.0172181	0.0	-0.017294	0.0
		-3.803895	*-5.707513*	*-3.850272*	*-5.762107*	*-3.856228*	*-5.767626*
1.0	-6.8277	-0.018955	0.0	-0.0191681	0.0	-0.019244	0.0
		-4.510453	*-6.765634*	*-4.558215*	*-6.821670*	*-4.564268*	*-6.827284*

Як видно із наведених таблиць, задовільний розв'язок задачі для пластини-смуги з відносною товщиною 1/20 отримуємо на сітці вже з п'яти скінченних елементів.

Висновки. Порівнюючи розв'язки даної задачі, зазначимо, що лише шестимодальний варіант теорії оболонок типу Тимошенка–Міндліна дає можливість вже в лінійному наближенні врахувати переміщення u_1, тоді як п'ятимодальний варіант враховує переміщення лише в нелінійній постановці. У подальшому аналогічні дослідження доцільно виконати для оболонок складнішої геометрії.

1. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
2. *Бурак Я.Й., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А.* Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтелект–Захід, 2007. – 240 с.
3. *Вагин П.П.* Численное решение задач механики деформирования гибких оболочек с конечной сдвиговой жесткостью: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1990. – 17 с.
4. *Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академпериодика, 2006. – 472 с.
5. *Григоренко Я.М., Мукоед А.П.* Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – К.: Вищ. шк., 1983. – 286 с.
6. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 211 с.
7. *Пелех Б.Л.* Обобщенная теория оболочек. – Львов: Вищ. шк., 1978. – 159 с.
8. *Победря Б.Е.* О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле вектора перемещений // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1987. – **40**, № 4. – С. 15–26.
9. *Рикардс Р. Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
10. *Шот І.Я.* Чисельне розв'язування задач теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Математ. і механіка. – 2013. – **18**, вип. 1 (17). – С. 132–141.
11. *Babuska I., Whiteman J. R., Strouboulis T.* Finite elements: an introduction to the method and error estimation. – Oxford: Oxford University Press, 2011. – 352 p.
12. *Bernakevych I.E., Vahin P.P., Shot I.Ya.* A study of the stable equilibrium of thin shells compliant to shear and compression // J. of Math. Sc. – 2012. – **181**, № 4. – P. 497–505.
13. *Libai A., Simmonds J. G.* The nonlinear theory of elastic shells. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДАТЛИВЫХ НА СДВИГ И СЖАТИЕ

С использованием соотношений геометрически нелинейной теории тонких оболочек, податливых на сдвиг и сжатие (шестимодальный вариант), записаны ключевые уравнения для определения их напряженно-деформированного состояния. Методом конечных элементов получены числовые решения задач о деформации полосы-пластины и катеноида согласно с рассматриваемой теорией, сравнены эти решения с построенными на основе теорий оболочек Кирхгофа–Лява и Тимошенко–Миндлина (пятимодальный вариант).

NONLINEAR DEFORMATION OF THIN SHELLS COMPLIANT TO SHEAR AND PRESSURE

On the basis of relations of non-linear geometric theory of thin shells compliant to shear and pressure (a six-modal variant) the key equations to determine stress-strain state are written. A numerical analysis by the finite element method of solutions of the deformation band-plate and katenoyid obtained by examining theories with solutions that are based on theories of shells Kirchhoff–Love and Timoshenko–Mindlin (a five-modal variant).

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
20.09.13