УДК 517.95

Г. А. Снітко

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЧАСУ ФУНКЦІЙ У МОЛОДШОМУ КОЕФІЦІЄНТІ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі визначення залежних від часу параметрів у коефіцієнті за невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні в області з вільною межею.

Задача, яку досліджуємо, поєднує два типи задач: коефіцієнтну обернену та задачу з вільною межею. Коефіцієнтні обернені задачі, в яких до невідомих належить один або декілька коефіцієнтів рівняння, в областях з відомими межами достатньо повно вивчені, зокрема [8, 15], обернені задачі визначення коефіцієнта за невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні. Висвітлено [5, 6, 9] питання одночасної ідентифікації коефіцієнтів теплопровідності та теплоємності. Досліджено [11] задачу одночасного визначення функцій, що залежать від різних аргументів, у коефіцієнті за невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні.

Багато практично важливих задач зведено до задач з вільними межами. Заміною змінних задачі з вільними межами можна звести до коефіцієнтних обернених задач в областях з відомими межами. Знайдено [1, 2, 4] умови існування та єдиності розв'язків обернених задач для одно- і двовимірних параболічних рівнянь з невідомими, залежними від часу, старшими коефіцієнтами в областях з вільними межами. Встановлено [3] умови однозначної розв'язності задачі з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння у криволінійному прямокутнику, розташування криволінійної частини якого визначає функція, що є добутком невідомої функції часу та заданої функції просторової змінної. Вивчено [12, 14] обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта за невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні в області, частина або вся межа якої невідомі.

Розглянемо обернену задачу визначення коефіцієнта за невідомої функції одновимірного параболічного рівняння з двома невідомими параметрами, залежними від часу, в області з вільною межею.

Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t),\ 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ – невідома функція, розглядаємо параболічне рівняння

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + (c_1(t)x + c_2(t))u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

з невідомими функціями $c_1(t), c_2(t)$ за початкової умови

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \quad (2)$$

крайових умов

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \quad (3)$$

та умов перевизначення

$$\int\limits_0^{h(t)} x^{i-3}u(x,t)\,dx = \mu_i(t), \quad i = \overline{3,5}, \quad t \in [0,T]. \quad (4)$$

Увівши нову змінну $y = \dfrac{x}{h(t)}$, зводимо задачу (1)–(4) до оберненої задачі з невідомими $(h(t), c_1(t), c_2(t), v(y,t))$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області з відомою межею $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1,\ 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)}v_y + (yh(t)c_1(t) + c_2(t))v +$$

$$+f(yh(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{5}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \quad y \in [0,1], \tag{6}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \quad v(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$h(t)\int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$h^2(t)\int_0^1 yv(y,t)\,dy = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$h^3(t)\int_0^1 y^2 v(y,t)\,dy = \mu_5(t), \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

Існування розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

1) $a, b, f \in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,T])$, $\varphi \in C^2[0,1]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = \overline{1,5}$;

2) $0 < a_0 \le a(y,t) \le a_1$, $f(y,t) \ge 0$, $(y,t) \in [0,\infty)\times[0,T]$, $\varphi(yh_0) \ge \varphi_0 > 0$, $y \in [0,\infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = \overline{2,5}$, $t \in [0,T]$, де a_0, a_1, φ_0 – відомі додатні сталі;

3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_0) = \mu_2(0)$, $h_0^2\int_0^1 y\varphi(yh_0)\,dy = \mu_4(0)$,

$h_0^3\int_0^1 y^2\varphi(yh_0)\,dy = \mu_5(0)$, *де* $h_0 = h(0) > 0$ – *розв'язок рівняння*

$h(0)\int_0^1 \varphi(yh_0)\,dy = \mu_3(0)$.

Тоді можна вказати таке число $T_0, 0 < T_0 \le T$, *яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок* $(h, c_1, c_2, v) \in C^1[0,T_0]\times(C[0,T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$, *задачі (5)–(10).*

Простори $C[0,T]$, $C^1[0,T]$, $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ введено в праці [7, с. 17].

Д о в е д е н н я. Доведення існування розв'язку задачі (5)–(10) базується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Зведемо задачу (5)–(10) до системи рівнянь. Введемо нову функцію

$$\tilde v(y,t) = v(y,t) - \varphi(yh_0) - y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (y-1)(\mu_1(t) - \mu_1(0)).$$

Для цієї функції одержуємо задачу:

$$\tilde v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\tilde v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)}(\tilde v_y + h_0\varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_2(0) -$$

$$-\mu_1(t) + \mu_1(0)) + (yh(t)c_1(t) + c_2(t))(\tilde v + \varphi(yh_0) + y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) +$$

$$+(1-y)(\mu_1(t) - \mu_1(0))) + h_0^2\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\varphi''(yh_0) + f(yh(t),t) - y\mu_2'(t) +$$

$$+\mu_1'(t)(y-1), \quad (y,t) \in Q_T,$$

$$\tilde v(y,0) = 0, \quad y \in [0,1],$$

$$\tilde v(0,t) = \tilde v(1,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

За допомогою функції Гріна $G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\tilde{v}_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\tilde{v}_{yy} + \frac{b(yh(t),t)}{h(t)}\tilde{v}_y$$

задачу (11) зводимо до рівняння

$$\tilde{v}(y,t) = \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)}(\tilde{v}_\eta(\eta,\tau) + h_0\varphi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) +$$

$$+\mu_1(0)) + \frac{b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}(h_0\varphi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) + (c_2(\tau) +$$

$$+\eta h(\tau)c_1(\tau))(\tilde{v}(\eta,\tau) + \eta(\mu_2(\tau) - \mu_2(0)) + (1-\eta)(\mu_1(\tau) - \mu_1(0)) + \varphi(\eta h_0)) +$$

$$+f(\eta h(\tau),\tau) - \eta\mu_2'(\tau) + \mu_1'(\tau)(\eta - 1) + h_0^2\frac{a(\eta h(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)\bigg)d\eta d\tau,$$

$$(y,t) \in \overline{Q}_T. \qquad (12)$$

Позначимо $w(y,t) = v_y(y,t)$, $p(t) = h'(t)$. Подамо рівняння (12) у вигляді

$$v(y,t) = \varphi(yh_0) + y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (1-y)(\mu_1(t) - \mu_1(0)) +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau) + (\eta h(\tau)c_1(\tau) + c_2(\tau))v(\eta,\tau) +$$

$$+\frac{b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}(h_0\varphi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) + \mu_1'(\tau)(\eta - 1) -$$

$$-\eta\mu_2'(\tau) + f(\eta h(\tau),\tau) + h_0^2\frac{a(\eta h(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)\bigg)d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T. \qquad (13)$$

Продиференціювавши (13) за змінною y, одержуємо:

$$w(y,t) = h_0\varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0) + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\times$$

$$\times\bigg(\frac{\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau) + (\eta h(\tau)c_1(\tau) + c_2(\tau))v(\eta,\tau) + \frac{b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}(h_0\varphi'(\eta h_0) +$$

$$+\mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) + \mu_1'(\tau)(\eta - 1) - \eta\mu_2'(\tau) + f(\eta h(\tau),\tau) +$$

$$+h_0^2\frac{a(\eta h(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)\bigg)d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T. \qquad (14)$$

З умови (8) отримуємо:

$$h(t) = \frac{\mu_3(t)}{\int_0^1 v(y,t)\,dy}, \quad t \in [0,T]. \qquad (15)$$

Продиференціювавши співвідношення (8)–(10) за змінною t і використавши рівняння (5), одержуємо:

$$c_1(t) = \bigg[\int_0^1 (h(t)((b(yh(t),t) - a_x(yh(t),t))w(y,t) + h(t)f(yh(t),t))(h(t)\mu_4(t) -$$

$$-\mu_5(t) - y(h^2(t)\mu_3(t) - \mu_5(t)) + y^2h(t)(h(t)\mu_3(t) - \mu_4(t))) - a(yh(t),t)\times$$

$$\times w(y,t)(\mu_5(t) - h^2(t)\mu_3(t) - 2yh(t)(\mu_4(t) - h(t)\mu_3(t))))dy + \mu_5'(t)(\mu_4(t) -$$

$$-h(t)\mu_3(t)) + \mu_4'(t)(h^2(t)\mu_3(t) - \mu_5(t)) + (\mu_3'(t)h(t) + a(0,t)w(0,t))(\mu_5(t) -$$

$$-h(t)\mu_4(t))\bigg]\Delta^{-1}(t), \quad t \in [0,T], \qquad (16)$$

$$c_2(t) = \left[h^4(t)\int_0^1 y^3\, v(y,t)dy \left(\int_0^1 (h(t)(1-y)((b(yh(t),t) - a_x(yh(t),t))w(y,t) + \right.\right.$$

$$+h(t)f(yh(t),t)) + a(yh(t),t))w(y,t))dy - a(0,t)w(0,t) - h(t)\mu_3'(t) +$$

$$+\mu_4'(t)) - h(t)\int_0^1 (h(t)((b(yh(t),t) - a_x(yh(t),t))w(y,t) + h(t)f(yh(t),t))\times$$

$$\times(\mu_5(t) - yh(t)\mu_4(t) + y^2(h(t)\mu_4(t) - \mu_5(t))) + a(yh(t),t)w(y,t)(h(t)\mu_4(t) -$$

$$-2y(h(t)\mu_4(t) - \mu_5(t))))dy + \mu_5'(t)(h(t)\mu_4(t) - \mu_5(t)) - \mu_4'(t)h^2(t)\mu_4(t) +$$

$$\left. +(\mu_3'(t)h(t) + a(0,t)w(0,t))h(t)\mu_5(t) \right]\Delta^{-1}(t), \quad t \in [0,T], \tag{17}$$

$$p(t) = \left[h^4(t)\int_0^1 y^3\, v(y,t)dy \left(\int_0^1 (((b(yh(t),t) - a_x(yh(t),t))w(y,t) + h(t)\times \right.\right.$$

$$\times f(yh(t),t))(yh(t)\mu_3(t) - \mu_4(t)) - \mu_3(t)a(yh(t),t)w(y,t))dy + \mu_4(t)\mu_3'(t) +$$

$$\left. + \frac{a(0,t)}{h(t)}\mu_4(t)w(0,t) + \frac{a(h(t),t)}{h(t)}(h(t)\mu_3(t) - \mu_4(t))w(1,t) - \mu_3(t)\mu_4'(t) \right) -$$

$$-\int_0^1 (((b(yh(t),t) - a_x(yh(t),t))w(y,t) + h(t)f(yh(t),t))(y^2h^2(t)(\mu_3(t)\mu_5(t) -$$

$$-\mu_4^2(t)) - \mu_5^2(t) + yh(t)\mu_4(t)\mu_5(t)) - a(yh(t),t)w(y,t)(\mu_4(t)\mu_5(t) + 2yh(t)\times$$

$$\times(\mu_3(t)\mu_5(t) - \mu_4^2(t))))dy + (\mu_5^2(t) + h^2(t)\mu_4^2(t) - h(t)\mu_5(t)(h(t)\mu_3(t) +$$

$$+\mu_4(t)))\frac{a(h(t),t)}{h(t)}w(1,t) - \frac{a(0,t)}{h(t)}\mu_5^2(t)w(0,t) + \mu_5'(t)(\mu_3(t)\mu_5(t) - \mu_4^2(t)) +$$

$$\left. +\mu_4'(t)\mu_4(t)\mu_5(t) - \mu_3'(t)\mu_5^2(t) \right](\mu_2(t)\Delta(t))^{-1}, \quad t \in [0,T], \tag{18}$$

де

$$\Delta(t) = h^6(t)\begin{vmatrix} \int_0^1 (1-y)v(y,t)dy & \int_0^1 (y-y^2)v(y,t)dy \\ \int_0^1 (1-y^2)v(y,t)dy & \int_0^1 (y-y^3)v(y,t)dy \end{vmatrix}.$$

Таким чином, задачу (5)–(10) зведено до системи рівнянь (13)–(18) відносно невідомих $(v(y,t), w(y,t), h(t), c_1(t), c_2(t), p(t))$. Якщо $(h, c_1, c_2, v) \in C^1[0,T]\times(C[0,T])^2\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(10), то $(v, w, h, c_1, c_2, p) \in (C(\overline{Q}_T))^2\times(C[0,T])^4$ є розв'язком системи рівнянь (13)–(18). Правильним є і обернене твердження.

Нехай (v, w, h, c_1, c_2, p) є неперервним розв'язком системи рівнянь (13)–(18). Умови теореми 1 дають можливість продиференціювати (13) за змінною y. Праві частини отриманої рівності та рівності (14) збігаються, тому можемо зробити висновок, що $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. Отже, функція $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yp(t)}{h(t)}v_y + (yh(t)c_1(t) + c_2(t))v +$$

$$+f(yh(t),t), \ (y,t) \in Q_T, \tag{19}$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $c_1(t)$, $c_2(t)$, $h(t)$, $p(t)$. Рівність (15) збігається з умовою (8). Подамо рівняння (16)–(18) у вигляді

$$p(t)\mu_2(t) + c_1(t)\mu_4(t) + c_2(t)\mu_3(t) = \frac{a(0,t)}{h(t)} v_y(0,t) - \frac{a(h(t),t)}{h(t)} v_y(1,t) +$$

$$+\mu_3'(t) - \int_0^1 ((b(yh(t),t) - a_x(yh(t),t))v_y(y,t) + h(t)f(yh(t),t))dy, \qquad (20)$$

$$p(t)h(t)\mu_2(t) + c_1(t)\mu_5(t) + c_2(t)\mu_4(t) = -a(h(t),t)v_y(1,t) + \mu_4'(t) -$$

$$-\int_0^1 (yh(t)((b(yh(t),t) - a_x(yh(t),t))v_y(y,t) + h(t)f(yh(t),t)) -$$

$$-a(yh(t),t)v_y(y,t))dy, \qquad (21)$$

$$p(t)h^2(t)\mu_2(t) + c_1(t)h^4(t)\int_0^1 y^3 v(y,t)dy + c_2(t)\mu_5(t) = \mu_5'(t) -$$

$$-h(t)a(h(t),t)v_y(1,t) - \int_0^1 h(t)y(h(t)y((b(yh(t),t) - a_x(yh(t),t))v_y(y,t) +$$

$$+h(t)f(yh(t),t)) - 2a(yh(t),t)v_y(y,t))dy\,. \qquad (22)$$

Припущення теореми дають можливість продиференціювати (15) за змінною t. Використавши те, що функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (19), і віднявши від отриманої рівності рівняння (20), одержуємо:

$$(h'(t) - p(t))\frac{\mu_3(t)}{h(t)} = 0\,.$$

Отже, $p(t) = h'(t)$, $h \in C^1[0,T]$ і функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (5). Зведемо (21), (22) до вигляду

$$2h'(t)h(t)\int_0^1 yv(y,t)\,dy + h^2(t)\int_0^1 y\Bigg(\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy}(y,t) +$$

$$+\frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)} v_y(y,t) + (yh(t)c_1(t) + c_2(t))v(y,t) +$$

$$+f(yh(t),t)\Bigg)dy = \mu_4'(t)\,,$$

$$3h'(t)h^2(t)\int_0^1 y^2 v(y,t)\,dy + h^3(t)\int_0^1 y^2\Bigg(\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy}(y,t) +$$

$$+\frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)} v_y(y,t) + (yh(t)c_1(t) + c_2(t))v(y,t) +$$

$$+f(yh(t),t)\Bigg)dy = \mu_5'(t)\,.$$

Використавши рівняння (5) і проінтегрувавши цю рівність від 0 до t, отримуємо умови (9), (10).

Отже, еквівалентність задачі (5)–(10) та системи рівнянь (13)–(18) у вище зазначеному сенсі доведено.

Подамо $\Delta(t)$ у вигляді [10, с. 72]

$$\Delta(t) = \frac{h^6(t)}{2}\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} 1-y_1 & 1-y_2 \\ 1-y_1^2 & 1-y_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v(y_1,t) & v(y_2,t) \\ y_1 v(y_1,t) & y_2 v(y_2,t) \end{vmatrix} dy_1 dy_2 =$$

$$= \frac{h^6(t)}{2}\int_0^1\int_0^1 (1-y_1)(1-y_2)(y_2-y_1)^2 v(y_1,t)v(y_2,t)dy_1dy_2.$$

Встановимо оцінки знизу функцій $v(y,t)$ і $h(t)$. Оскільки всі доданки (13), крім першого, прямують до нуля при $t \to 0$, то згідно з умовами 2) теореми 1 можемо зробити висновок про існування такого числа t_1, $0 < t_1 \le T$, яке визначає нерівність

$$\Bigg| y(\mu_2(t)-\mu_2(0)) + (1-y)(\mu_1(t)-\mu_1(0)) + \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Bigg(\frac{\eta p(\tau)}{h(\tau)} w(\eta,\tau) +$$

$$+(\eta h(\tau) c_1(\tau) + c_2(\tau))v(\eta,\tau) + \frac{b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}(h_0\varphi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) +$$

$$+\mu_1(0)) + \mu_1'(\tau)(\eta-1) - \eta\mu_2'(\tau) + f(\eta h(\tau),\tau) + h_0^2\frac{a(\eta h(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)\Bigg) d\eta d\tau\Bigg| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\min_{[0,1]}\varphi(yh_0), \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_1}, \tag{23}$$

що

$$v(y,t) \ge \frac{1}{2}\min_{[0,1]}\varphi(yh_0) \equiv M_0 > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_1}. \tag{24}$$

Врахувавши (23), з (13) одержуємо:

$$v(y,t) \le \max_{[0,1]}\varphi(yh_0) + M_0 \equiv M_1 < \infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_1}. \tag{25}$$

Тоді для розв'язків рівняння (15) справедлива нерівність

$$h(t) \ge \frac{1}{M_1}\min_{[0,T]}\mu_3(t) \equiv H_0 > 0, \qquad t \in [0,t_1]. \tag{26}$$

Таким чином,

$$\Delta(t) \ge C_0 > 0, \ t \in [0,t_1]. \tag{27}$$

Встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (13)–(18). Врахувавши (25), для розв'язків рівняння (15) одержуємо нерівність

$$h(t) \le \frac{1}{M_0}\max_{[0,T]}\mu_3(t) \equiv H_1 < \infty, \qquad t \in [0,t_1]. \tag{28}$$

Позначимо $W(t) = \max_{y\in[0,1]}|w(y,t)|$. З (16)–(18), врахувавши (25)–(28), отримуємо:

$$|c_1(t)| \le C_1 + C_2W(t), \ |c_2(t)| \le C_3 + C_4W(t),$$

$$|p(t)| \le C_5 + C_6W(t), \quad t \in [0,t_1]. \tag{29}$$

Використавши (25), (26), (28), (29) та оцінку функції Ґріна [7, с. 469]

$$\int_0^1 |G_{1y}(y,t,\eta,\tau)|\, d\eta \le \frac{C_7}{\sqrt{t-\tau}},$$

з (14) одержуємо:

$$W(t) \le C_8 + C_9\int_0^t \frac{W(\tau)+W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau, \quad t \in [0,t_1].$$

Позначимо $W_1(t) = W(t) + 1$, тоді попередню нерівність подамо у вигляді

$$W_1(t) \le C_{10} + C_{11}\int_0^t \frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau, \qquad t \in [0,t_1]. \tag{30}$$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрата та використаємо нерівність Коші–Буняковського

$$W_1^2(t) \le C_{12} + C_{13}\int_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau .$$

Замінивши t на σ, домножимо попередню нерівність на $\frac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$ та проінтегруємо від 0 до t:

$$\int_0^t \frac{W_1^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}}\,d\sigma \le C_{14} + C_{13}\int_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}\int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)}{\sqrt{\sigma-\tau}}\,d\tau .$$

Змінивши порядок інтегрування у другому доданку правої частини нерівності та використавши рівність

$$\int_\tau^t \frac{d\sigma}{\sqrt{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}} = \pi ,$$

одержуємо:

$$\int_0^t \frac{W_1^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}}\,d\sigma \le C_{14} + C_{15}\int_0^t W_1^4(\tau)\,d\tau . \tag{31}$$

Підставивши (31) в (30), отримуємо:

$$W_1(t) \le C_{16} + C_{17}\int_0^t W_1^4(\tau)\,d\tau .$$

Позначимо $S(t) \le C_{16} + C_{17}\int_0^t W_1^4(\tau)\,d\tau$. Тоді

$$S'(t) \le C_{17}S^4(t).$$

Інтегруючи це співвідношення, знаходимо:

$$S(t) \le \frac{C_{16}}{\sqrt[3]{1-3C_{16}^3C_{17}t}} \le C_{18}, \quad t \in [0,T_0],$$

де число T_0, $0 < T_0 \le t_1$, задовольняє умову $1-3C_{16}^3C_{17}T_0 > 0$. Таким чином,

$$W(t) \le M_2 < \infty, \qquad t \in [0,T_0].$$

Тоді

$$|c_1(t)| \le C_1 + C_2M_2 \equiv B_1 < \infty, \ |c_2(t)| \le C_3 + C_4M_2 \equiv B_2 < \infty,$$

$$|p(t)| \le C_5 + C_6M_2 \equiv B_3 < \infty, \qquad t \in [0,T_0].$$

Подамо систему рівнянь (13)–(18) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = \big(v(y,t),\ w(y,t),\ h(t), c_1(t), c_2(t), p(t)\big)$, а оператор $P = (P_1,\dots,P_6)$ визначає праві частини рівнянь (13)–(18). Позначимо $N = \{(v,w,h,c_1,c_2,p) \in \big(C(\bar{Q}_{T_0})\big)^2 \times \big(C[0,T_0]\big)^4 :\ M_0 \le v(y,t) \le M_1,\ |w(y,t)| \le M_2,$ $H_0 \le h(t) \le H_1,\ |c_1(t)| \le B_1,\ |c_2(t)| \le B_2,\ |p(t)| \le B_3\}$. З наведених вище оцінок випливає, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку, а оператор P переводить N у себе. Залишилося довести, що множина PN компактна у просторі неперервних функцій, або, згідно з теоремою Арцела–Асколі, рівномірно обмежена та одностайно неперервна. З наведених вище оцінок можна стверджувати, що множина PN рівномірно обмежена. За умов 1) і 2) теореми 1, аналогічно міркуючи як у праці [13], легко переконатися у тому, що множина PN одностайно неперервна. Таким чином, за теоремою Шаудера про нерухому точку існує розв'язок

$(v, w, h, c_1, c_2, p) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^4$ системи рівнянь (13)–(18), а отже, розв'язок задачі (5)–(10) при $(y,t) \in \overline{Q}_{T_0}$.

Теорему 1 доведено.

Єдиність розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*

1) $a \in C^{2,0}([0,\infty) \times [0,T])$, $b, f \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T])$,

2) $a(y,t) > 0$, $(y,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $\varphi(yh_0) \ge \varphi_0 > 0$, $y \in [0,\infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = \overline{1,3}$, $t \in [0,T]$.

Тоді задача (5)–(10) не може мати двох різних розв'язків $(h, c_1, c_2, v) \in C^1[0,T] \times (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$.

Д о в е д е н н я. Нехай $(h_i(t), c_{1i}(t), c_{2i}(t), v_i(y,t))$, $i = 1,2$ – два розв'язки задачі (5)–(10). Позначимо:

$$\frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = p_i(t), \quad i = 1,2, \qquad p(t) = p_1(t) - p_2(t),$$

$$r(t) = c_{11}(t) - c_{12}(t), \quad q(t) = c_{21}(t) - c_{22}(t), \; v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t).$$

Функції $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $v(y,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(yh_1(t),t)}{h_1(t)} + yp_1(t) \right) v_y + (yh_1(t)c_{11}(t) + c_{21}(t))v +$$
$$+ (yh_1(t)r(t) + yc_{12}(t)(h_1(t) - h_2(t)) + q(t))v_2 + \left(\frac{b(yh_1(t),t)}{h_1(t)} - \right.$$
$$\left. - \frac{b(yh_2(t),t)}{h_2(t)} + yp(t) \right) v_{2y} + \left(\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} - \frac{a(yh_2(t),t)}{h_2^2(t)} \right) v_{2yy} +$$
$$+ f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{32}$$

та умови

$$v(y,0) = 0, \qquad y \in [0,1], \tag{33}$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{34}$$

$$\int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right), \qquad t \in [0,T], \tag{35}$$

$$\int_0^1 yv(y,t)\,dy = \mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right), \qquad t \in [0,T], \tag{36}$$

$$\int_0^1 y^2 v(y,t)\,dy = \mu_5(t)\left(\frac{1}{h_1^3(t)} - \frac{1}{h_2^3(t)} \right), \qquad t \in [0,T]. \tag{37}$$

За допомогою функції Ґріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(yh_1(t),t)}{h_1(t)} + yp_1(t) \right) v_y + (yh_1(t)c_{11}(t) + c_{21}(t))v$$

розв'язок задачі (32)–(34) подамо у вигляді

$$v(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\big((\eta h_1(\tau) r(\tau) + \eta c_{12}(\tau)(h_1(\tau) - h_2(\tau)) +$$

$$+q(\tau))v_2(\eta,\tau)+\left(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}-\frac{b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2(\tau)}+\eta p(\tau)\right)v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$

$$+\left(\frac{a(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+f(\eta h_1(\tau),\tau)-$$

$$-f(\eta h_2(\tau),\tau)\big)\,d\eta d\tau,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{38}$$

Продиференціювавши (38) за змінною y, отримуємо:

$$v_y(y,t)=\int_0^t\int_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)\big((\eta h_1(\tau)r(\tau)+\eta c_{12}(\tau)(h_1(\tau)-h_2(\tau))+$$

$$+q(\tau))v_2(\eta,\tau)+\left(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}-\frac{b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2(\tau)}+\eta p(\tau)\right)v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$

$$+\left(\frac{a(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+f(\eta h_1(\tau),\tau)-$$

$$-f(\eta h_2(\tau),\tau)\big)\,d\eta d\tau,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{39}$$

Оскільки для $c_{1i}(t),\ c_{2i}(t),\ h_i'(t),\ i=1,2$, справджуються рівності, аналогічні (16)−(18), то

$$p(t)\mu_2(t)+r(t)\frac{\mu_4(t)}{h_1(t)}+q(t)\frac{\mu_3(t)}{h_1(t)}=-\frac{a(h_1(t),t)}{h_1(t)}v_y(1,t)+\frac{a(0,t)}{h_1(t)}v_y(0,t)+$$

$$+\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)\big(a(0,t)v_{2y}(0,t)-a(h_1(t),t)v_{2y}(1,t)\big)-\frac{v_{2y}(y,t)}{h_2^2(t)}\times$$

$$\times\big(a(h_1(t),t)-a(h_2(t),t)\big)+\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)\left(\mu_3'(t)-\int_0^1((b(yh_2(t),t)-\right.$$

$$-a_x(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t)+h_2(t)f(yh_2(t),t))dy-\mu_3(t)c_{22}(t)-\mu_4(t)c_{12}(t))-$$

$$-\frac{1}{h_1(t)}\int_0^1((b(yh_1(t),t)-a_x(yh_1(t),t))v_y(y,t)+(b(yh_1(t),t)-b(yh_2(t),t)-$$

$$-a_x(yh_1(t),t)+a_x(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t)+h_1(t)(f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t))+$$

$$+(h_1(t)-h_2(t))f(yh_2(t),t))dy,\quad t\in[0,T], \tag{40}$$

$$r(t)(\mu_5(t)-h_1(t)\mu_4(t))+q(t)(\mu_4(t)-h_1(t)\mu_3(t))=(h_1(t)-h_2(t))(\mu_3(t)\times$$

$$\times c_{22}(t)+\mu_4(t)c_{12}(t)-\mu_3'(t))-a(0,t)v_y(0,t)+\int_0^1((h_1(t)-h_2(t))(1-y)\times$$

$$\times(v_{2y}(y,t)(b(yh_2(t),t)-a_x(yh_2(t),t))+h_2(t)f(yh_2(t),t))+h_1(t)(1-y)\times$$

$$\times((b(yh_1(t),t)-a_x(yh_1(t),t))v_y(y,t)+v_{2y}(y,t)(b(yh_1(t),t)-b(yh_2(t),t)-$$

$$-a_x(yh_1(t),t)+a_x(yh_2(t),t))+h_1(t)(f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t))+(h_1(t)-$$

$$-h_2(t))f(yh_2(t),t))+(a(yh_1(t),t)-a(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t)+a(yh_1(t),t)\times$$

$$\times v_y(y,t))dy,\quad t\in[0,T], \tag{41}$$

$$r(t)=\left[\int_0^1(h_1(t)((b(yh_1(t),t)-a_x(yh_1(t),t))v_{1y}(y,t)+h_1(t)f(yh_1(t),t))\times\right.$$

$$\times(h_1(t)\mu_4(t)-\mu_5(t)-y(h_1^2(t)\mu_3(t)-\mu_5(t))-y^2h_1(t)(\mu_4(t)-h_1(t)\mu_3(t)))-$$

$$-a(yh_1(t),t)v_{1y}(y,t)(\mu_5(t)-h_1^2(t)\mu_3(t)-2yh_1(t)(\mu_4(t)-h_1(t)\mu_3(t))))dy+$$

$$+\mu_5'(t)(\mu_4(t)-h_1(t)\mu_3(t))+\mu_4'(t)(h_1^2(t)\mu_3(t)-\mu_5(t))+(a(0,t)v_{1y}(0,t)+$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu_3'(t)h_1(t))(\mu_5(t)-h_1(t)\mu_4(t))\Bigg]\Bigg(h_1^4(t)(\mu_3(t)h_1(t)-\mu_4(t))\int_0^1 y^3 v(y,t)dy-\\
&-(h_1(t)-h_2(t))\mu_4(t)\mu_5(t)+(h_1^2(t)-h_2^2(t))(\mu_4^2(t)-\mu_3(t)\mu_5(t))+(\mu_3(t)(h_1^5(t)-\\
&-h_2^5(t))-\mu_4(t)(h_1^4(t)-h_2^4(t)))\int_0^1 y^3 v_2(y,t)dy\Bigg)(\Delta_1(t)\Delta_2(t))^{-1}+\Bigg[\int_0^1(h_1(t)\times\\
&\times((b(yh_1(t),t)-a_x(yh_1(t),t))v_y(y,t)+(b(yh_1(t),t)-b(yh_2(t),t)-\\
&-a_x(yh_1(t),t)+a_x(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t)+h_1(t)(f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t))+\\
&+(h_1(t)-h_2(t))f(yh_2(t),t))(h_1(t)\mu_4(t)-\mu_5(t)-y(h_1^2(t)\mu_3(t)-\mu_5(t))-\\
&-y^2h_1(t)(\mu_4(t)-h_1(t)\mu_3(t)))-(a(yh_1(t),t)v_y(y,t)+(a(yh_1(t),t)-\\
&-a(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t))(\mu_5(t)-h_1^2(t)\mu_3(t)-2yh_1(t)(\mu_4(t)-h_1(t)\mu_3(t)))+\\
&+(1-y)(v_{2y}(y,t)(b(yh_2(t),t)-a_x(yh_2(t),t))+h_2(t)f(yh_2(t),t))((1+y)\times\\
&\times(h_1^2(t)-h_2^2(t))\mu_4(t)-y\mu_3(t)(h_1^3(t)-h_2^3(t))-(h_1(t)-h_2(t))\mu_5(t))+\\
&+a(yh_2(t),t)v_{2y}(y,t)((2y-1)\mu_3(t)(h_1^2(t)-h_2^2(t))-2y(h_1(t)-h_2(t))\times\\
&\times\mu_4(t)))dy+(h_1(t)-h_2(t))(\mu_3'(t)\mu_5(t)-\mu_5'(t)\mu_3(t)-\mu_4(t)a(0,t)v_{2y}(0,t))+\\
&+(h_1^2(t)-h_2^2(t))(\mu_4'(t)\mu_3(t)-\mu_3'(t)\mu_4(t))+(\mu_5(t)-h_1(t)\mu_4(t))a(0,t)\times\\
&\times v_y(0,t)\Big]\Delta_2^{-1}(t),\quad t\in[0,T],
\end{aligned}
\tag{42}
$$

де

$$
\Delta_i(t)=h_i^6(t)\begin{vmatrix}\int_0^1(1-y)v_i(y,t)dy & \int_0^1(y-y^2)v_i(y,t)dy\\ \int_0^1(1-y^2)v_i(y,t)dy & \int_0^1(y-y^3)v_i(y,t)dy\end{vmatrix},\quad i=1,2.
$$

Отже, задачу (32)–(37) зведено до системи рівнянь (40)–(42), де $v_y(y,t)$ визначає формула (39). Використавши принцип максимуму [7, с. 25] для розв'язку прямої задачі (5)–(7) і врахувавши умови 2) теореми 2, отримуємо:

$$
v_i(y,t)\ge C_{19}\min\left\{\min_{[0,1]}\varphi(yh_0),\ \min_{[0,T]}\mu_1(t),\quad \min_{[0,T]}\mu_2(t)\right\}>0,
$$
$$
i=1,2,\ (y,t)\in\overline{Q}_T.
$$

Таким чином,

$\Delta_i(t)>0$, $\quad i=1,2,\ \ t\in[0,T]$.

Згідно з припущеннями 1) теореми 2 перетворимо різницю

$$
\begin{aligned}
&f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t)=\\
&\qquad=y(h_1(t)-h_2(t))\int_0^1 f_x\big(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t\big)d\sigma.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Ця рівність справедлива і для функцій $b(yh_i(t),t)$, $a(yh_i(t),t)$ та $a_x(yh_i(t),t)$, $i=1,2$.

Виразимо $h_i(t)$ через $p_i(t)$:

$$
h_i(t)=h_i(0)\exp\left(\int_0^t p_i(\tau)\,d\tau\right),\qquad i=1,2,
$$

де $h_1(0)=h_2(0)=h_0$. Врахувавши рівність

$$e^{x}-e^{y}=(x-y)\int\limits_{0}^{1}e^{y+\tau(x-y)}\,d\tau\,,$$

одержуємо:

$$\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}=-\frac{1}{h_0}\int\limits_0^t p(\tau)\,d\tau\int\limits_0^1\exp\left(-\int\limits_0^t(\sigma p(\tau)+p_2(\tau))\,d\tau\right)d\sigma. \qquad (44)$$

Аналогічно (44) використаємо для зображення різниць $h_1^i(t)-h_2^i(t)$, $i=\overline{1,5}$, $\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}$.

Підставивши (43), (44) в (40)–(42), одержуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду відносно невідомих $p(t), q(t), r(t)$. Використавши оцінку функції Гріна [7, с. 469]

$$\int\limits_0^1\left|G^{*}_{1y}(y,t,\eta,\tau)\right|d\eta\le\frac{C_{20}}{\sqrt{t-\tau}}\,,$$

з властивостей розв'язків інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду з ядрами, які мають інтегровні особливості, випливає, що система рівнянь (40)–(42) має тільки тривіальний розв'язок $p(t)=0,\ q(t)=0,\ r(t)=0,\ t\in[0,T]$. Звідси отримуємо, що $p_1(t)=p_2(t),\ \ h_1(t)=h_2(t),\ \ c_{11}(t)=c_{12}(t),\ \ c_{21}(t)=c_{22}(t)$, $t\in[0,T]$. Використавши це в задачі (32)–(34), одержуємо, що

$$v_1(y,t)=v_2(y,t),\qquad (y,t)\in\overline{Q}_T.$$

Теорему 2 доведено.

Існування та єдиність розв'язку задачі (1)–(4).

Умови на вихідні дані задачі, за яких існує єдиний розв'язок задачі (1)–(4), містяться в таких теоремах.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови*

1) $a,b,f\in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,T]),\quad \varphi\in C^2\left[0,h_0\right],\quad \mu_i\in C^1[0,T],\quad i=\overline{1,5}$;

2) $0<a_0\le a(x,t)\le a_1,\quad f(x,t)\ge 0,\quad (x,t)\in[0,\infty)\times[0,T],\quad \varphi(x)\ge\varphi_0>0$, $x\in[0,\infty),\ \ \mu_i(t)>0,\quad i=\overline{2,5},\quad t\in[0,T]$;

3) $\varphi(0)=\mu_1(0),\quad \varphi(h_0)=\mu_2(0),\quad \int\limits_0^{h_0}x\varphi(x)dx=\mu_4(0),\quad \int\limits_0^{h_0}x^2\varphi(x)dx=\mu_5(0)$,

де $h_0=h(0)>0$ *є розв'язком рівняння* $\int\limits_0^{h(0)}\varphi(x)dx=\mu_3(0)$.

Тоді можна вказати таке число $T_0, 0<T_0\le T$*, яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок* $(h,c_1,c_2,u)\in C^1[0,T_0]\times(C[0,T_0])^2\times$ $\times C^{2,1}(\overline{\Omega}_{T_0})$, $h(t)>0,\ \ t\in[0,T_0]$, *задачі (1)–(4).*

Теорема 4. *Нехай виконуються умови*

1) $a\in C^{2,0}([0,\infty)\times[0,T]),\ \ b,f\in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,T])$,

2) $a(x,t)>0,\quad (x,t)\in[0,\infty)\times[0,T],\quad \varphi(x)\ge\varphi_0>0,\quad x\in[0,\infty),\quad \mu_i(t)>0$, $i=\overline{1,3},\quad t\in[0,T]$.

Тоді задача (1)–(4) не може мати двох різних розв'язків $(h,c_1,c_2,u)\in C^1[0,T]\times(C[0,T])^2\times C^{2,1}(\overline{\Omega}_T)$, $h(t)>0,\ \ t\in[0,T]$.

1. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.
2. *Баранська І. Є, Іванчов М. І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами // Укр. мат. вісник. – 2007. – **4,** № 4. – С. 457–484.
3. *Іванчов М. І.* Задача з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 27–35.
4. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.
5. *Иванчов Н. И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сибирск. мат. журн. – 1994. – **35**, № 3. – С. 612–621.
6. *Ковальчук С. М.* Визначення коефіцієнтів теплопровідності та об'ємної теплоємності в багатошаровому середовищі // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 2. – С. 153–159.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
8. *Мамаюсупов О. Ш.* Об определении коэффициента параболического уравнения // Исследование по инт.-диф. уравнениям. – 1989. – Вып. 22. – С. 157–160.
9. *Пабирівська Н. В.* Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 1. – С. 51–58.
10. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций. – М.: Наука, 1978. – 391 с.
11. *Саватеев Е. Г.* Сведение обратной задачи для уравнения параболического типа // Докл. РАН. – 1994. – **334**, № 5. – С. 562–563.
12. *Снітко Г. А.* Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 37–47.
13. *Снітко Г. А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Там само. – 2007. – **50**, № 4. – С. 7–18.
14. *Снітко Г. А.* Обернена задача для параболічного рівняння з невідомими молодшими коефіцієнтами в області з вільною межею // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 231–245.
15. *Cannon J., Lin Y., Wang S.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – **33**. – P. 149–163.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ ФУНКЦИЙ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В ОБЛАСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи определения зависящих от времени параметров в коэффициенте при неизвестной функции в одномерном параболическом уравнении в области со свободной границей.

DETERMINATION OF THE TIME-DEPENDENT FUNCTIONS IN THE MINOR COEFFICIENT IN A PARABOLIC EQUATION IN FREE BOUNDARY DOMAIN

We established conditions of existence and uniqueness of solution to the inverse problem of finding the time-dependent parameters in the coefficient of the unknown function in one-dimensional parabolic equation in free boundary domain.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.09.13