УДК 517.98

О. В. Лабачук

МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ АНАЛІТИЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ БАНАХОВИХ АЛГЕБР

Побудовано нетривіальні приклади аналітичних мультиплікативних відображень банахових алгебр та доведено існування G-аналітичного розривного функціонала в алгебрі диференційовних функцій.

Попередні відомості. Нехай A – банахова алгебра з одиницею над полем комплексних чисел C. Відомо (див., напр., [1, 5]), що кожен лінійний мультиплікативний функціонал (характер), визначений на алгебрі A, є автоматично неперервним. Показано, що аналогічне твердження справедливе і для мультиплікативних поліномів з A в C [6]. Крім того, виявлено, що кожна ціла мультиплікативна функція з A в C є однорідним поліномом [3]. Детальнішу інформацію про аналітичні відображення на банахових просторах можна знайти в монографії [2].

Нижче запропоновано підхід до побудови мультиплікативних аналітичних функцій у деякій області банахової алгебри A. Як свідчать наведені приклади, такі функції не обов'язково є однорідними поліномами. Крім того, побудовано розривну G-аналітичну мультиплікативну функцію в деякій всюди щільній відкритій множині алгебри A. Цей приклад може бути цікавим у контексті відомої відкритої проблеми Майкла про неперервність лінійних мультиплікативних функціоналів алгебри Фреше [4].

Основні результати. Нехай a – елемент алгебри A з одиницею e, причому $\|e-a\|<1$, тобто a міститься в одиничній кулі $B_1(e)$ з центром в одиниці e. Тоді функція

$$\ln a = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e-a)^n}{n}$$

і аналітична в одиничній кулі $B_1(e)$.

Нехай A_1, A_2, A_3 – комплексні банахові алгебри з одиницями, $U\subset A_1$, $V\subset A_2$, множина U замкнена відносно множення, множина V міститься в $B_1(e)$. Нехай $\Phi : U\to V$ – мультиплікативне аналітичне відображення і $T: A_2\to A_3$ – лінійний оператор, що може бути необмеженим, а A_2 та A_3 – комутативні алгебри.

Розглянемо відображення $\Psi(a)=\Psi_{\Phi,T}(a)=\exp(T\ln(\Phi(a)))$.

Твердження. *Відображення Ψ – аналітичне мультиплікативне в області U.*

Д о в е д е н н я. Відображення Ψ буде аналітичним, бо воно є композицією аналітичних відображень.

Доведемо тепер його мультиплікативність:

$$\Psi(ab)=\exp(T(\ln(\Phi(a)\Phi(b))))=e^{T\ln\Phi(a)}e^{T\ln\Phi(b)}=\Psi(a)\Psi(b).$$

Твердження доведено.

Приклад 1. *Якщо $T(a)=g(a)$ – лінійний функціонал, то Ψ – аналітичний мультиплікативний функціонал.*

Зауважимо, що часто відображення Ψ можна продовжити на ширшу область визначення.

Приклад 2. *Нехай $\Phi(a)=a$, T – гомоморфізм алгебр, тоді*

$$e^{T\ln a}=e^{\ln T(a)}=T(a).$$

Якщо $\Phi(a)=a^n$, T – гомоморфізм алгебр, то

$$e^{T \ln a^n} = (T(a))^n .$$

Якщо $\Phi(a) = \Phi_1(a) ... \Phi_n(a)$, T *– гомоморфізм алгебр, то*

$$e^{T \ln \Phi(a)} = T(\Phi_1(a)) ... T(\Phi_n(a)) .$$

Формулою $\Phi(a) = T(a)$ *відображення* Ψ *можна продовжити з одиничної кулі* $B_1(e)$ на всю алгебру $A_1 = A_2$.

Приклад 3. *Нехай* $T = D$ *– оператор диференціювання алгебри* A. *Оскільки*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) ,$$

то

$$D(\Phi(ab)) = D(\Phi(a)\Phi(b)) = D(\Phi(a))\Phi(b) + \Phi(a)D(\Phi(b)) .$$

Визначимо

$$D(\ln \Phi(a)) = (D \circ \Phi)(a)(\Phi(a))^{-1} ,$$

отже,

$$\Psi(a) = \exp\left((D \circ \Phi)\Phi^{-1}\right)(a) .$$

Це відображення можна продовжити на область, де визначено відображення Φ^{-1}, *тобто* $\left\{a \in A,\ \Phi(a) \neq 0\right\}$.

Зауважимо, що коли відображення Φ розкладається у добуток гомоморфізмів, то відображення Ψ – поліном.

Нехай φ – характер алгебри A з одиницею e, тоді *точкове диференціювання* d_φ – це такий лінійний функціонал $d_\varphi : A \to C$, що

$$d_\varphi(ab) = \varphi(a)d_\varphi(b) + \varphi(b)d_\varphi(a) \quad (a, b \in A).$$

Приклад 4. *Нехай* $T = d_\varphi$ *– точкове диференціювання,* $\Phi(a) = a$. *Оскільки*

$$d_\varphi(\ln a) = \frac{d_\varphi(a)}{\varphi(a)} ,$$

то

$$\Psi(a) = \exp\left(\frac{d_\varphi(a)}{\varphi(a)}\right).$$

Це відображення визначено скрізь, крім гіперплощини $\varphi(a) = 0$.

Приклад 5. *Нехай* $A = A(D)$ *– банахова алгебра аналітичних функцій у відкритому одиничному диску* $D \subset C$, *які є неперервними на замиканні* $\bar{D}$. *Визначимо*

$$\varphi(f) = \delta_0(f) = f(0) \qquad (f \in A(D)).$$

Очевидно, що φ *– характер. Якщо*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k ,$$

то

$$\varphi(f) = a_0 \quad i \quad d_\varphi(f) = a_1 .$$

У цьому випадку

$$\Psi(a) = \exp\left(\frac{a_1}{a_0}\right).$$

Наведено [1] приклад алгебри $A = C^n[0,1]$ n-диференційовних функцій, де точкове диференціювання d_θ є розривним, θ – деякий неперервний характер. Відображення Ψ_{d_θ} визначене на відкритій множині $A \setminus \operatorname{Ker} \theta$.

Теорема. Ψ_{d_θ} – розривна G -аналітична функція.

Д о в е д е н н я. Оскільки d_θ – розривний лінійний функціонал, то d_θ – розривний у кожній точці. Виберемо $a_0 \notin \operatorname{Ker}\theta$; тоді за теоремою про замкнений графік існує така послідовність $a_n \to a_0$, що $d_\theta(a_n) \to b \neq d_\theta(a_0)$ при $n \to \infty$. Тоді

$$\Psi_{d_\theta}(a_n) = \exp\frac{d_\theta(a_n)}{\theta(a_n)},$$

$$\exp\frac{d_\theta(a_n)}{\theta(a_n)} \underset{n\to\infty}{\to} \exp\frac{b}{\theta(a_0)} \neq \exp\frac{d_\theta(a_0)}{\theta(a_0)}.$$

Це доводить розривність функціонала Ψ_{d_θ}, який буде G -аналітичною функцією, оскільки він є композицією G -аналітичного раціонального відображення $\frac{d_\theta(a)}{\theta(a)}$, $a \in A \setminus \operatorname{Ker}\theta$, та аналітичної функції e^z, $z \in C$.

1. *Dales H. G.* Automatic continuity: a survey // Bull. Lond. Math. Soc. – 1978. – 10. – P. 129–183.
2. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces. Monographs in Mathematic. – New York.: Springer, 1999. – 544 p.
3. *Labachuk O. V. Zagorodnyuk A.V.*, Multiplicative polynomial mappings on commutative Banach algebras // Carpathian Mathematical Publications – 2012. – 4, № 2. – P 10–14.
4. *Michael E. A.* Locally multiplicatively convex topological algebras // Memoirs, American Math. Soc. – 1952. – № 11. – P. 11–79.
5. *Rudin W.* Functional Analysis. – New York, McGraw-Hill, 1973.
6. *Zagorodnyuk A. V.* Multiplicative polynomial operators on topological algebras // Contemporary Mathematics. – 1999. – 232 – P. 357–361.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

Построены нетривиальные примеры аналитических мультипликативных отображений банаховых алгебр и доказано существование G -аналитического разрывного функционала в алгебре дифференцируемых функций.

MULTIPLICATIVE ANALYTIC MAPPINGS OF BANACH ALGEBRAS

There are constructed nontrivial examples of analytic multiplicative mappings of Banach algebras and it is proved the existence of a G -analytic discontinuous functional in the algebras of differentiable functions.

Прикарпатський нац. ун-т
імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
12.09.13