УДК 511.3

Г. М. Барабаш, Я. М. Холявка

НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДІВ ТА ЗНАЧЕНЬ ДВОХ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯКОБІ

Позначимо $sn_i(z)$, $i = 1, 2$, − *алгебрично незалежні еліптичні функції Якобі зі спільним періодом. Отримано оцінку сумісного наближення періодів цих функцій та значень кожної з них у періодах іншої та в алгебричній точці* α.

Розглянемо алгебрично незалежні еліптичні функції Якобі $sn_1(z), sn_2(z)$ з алгебричними еліптичними модулями κ_1, κ_2 відповідно, $0 < \kappa_1^2, \kappa_2^2 < 1$, які мають спільний період. Позначимо через $(4K, 2iK_1)$ довільну фіксовану пару основних періодів функції $sn_1(z)$, а через $(4K, 2iK_2)$ − функції $sn_2(z)$, як у праці [5]. Тоді точки $4nK + 2in_1K_1 + 2in_2K_2$ не є полюсами функцій $sn_1(z)$, $sn_2(z)$ за усіх $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Надалі, як і раніше [4], позначатимемо через $d(P)$, $L(P)$ степінь та довжину многочлена P; $\xi_1, \ldots, \xi_5$ − наближальні алгебричні числа, $d_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ − їх степені та довжини.

Теорема. Для довільних алгебричних чисел α, $\xi_1, \ldots, \xi_5$ справджується оцінка

$$\begin{aligned} &\max\{| K - \xi_1 |, | K_1 - \xi_2 |, | sn_2(2iK_1) - \xi_3 |, | sn_1(\alpha) - \xi_4 |, \\ &| sn_2(\alpha) - \xi_5 |\} > \exp\left(-\Lambda M^3\right), \end{aligned} \tag{1}$$

де $M^2 = d\left(\frac{\ln L_1}{d_1} + \ldots + \frac{\ln L_5}{d_5} + \ln d\right)$, $d = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \ldots, \xi_5)$, $\Lambda > 0$ − константа, залежна лише від чисел κ_1, κ_2 та α.

Д о в е д е н н я. Для цього використаємо метод Гельфонда−Чудновського−Фельдмана, викладений у працях [1−3].

Нехай λ − достатньо велике натуральне число, c_1, c_2, c_3, c_4 − додатні константи, які не залежать від d, d_i, L_i та λ. Покажемо, що оцінка

$$\begin{aligned} &\max\{| K - \xi_1 |, | K_1 - \xi_2 |, | sn_2(2iK_1) - \xi_3 |, | sn_1(\alpha) - \xi_4 |, \\ &sn_2(\alpha) - \xi_5 |\} < \exp\left(-\lambda^8 M^3\right) \end{aligned} \tag{2}$$

неможлива. Доводитимемо від протилежного.

Так як для довільної функції Якобі $sn(z)$ з еліптичним модулем κ справджується $(sn'(z))^2 = (1 - sn^2(z))(1 - \kappa^2 sn^2(z))$, то визначимо наближальні алгебричні числа ξ_6, ξ_7, ξ_8 такими рівностями: $\xi_6^2 = (1 - \xi_4^2)(1 - \kappa_1^2 \xi_4^2)$, $\xi_7^2 = (1 - \xi_5^2)(1 - \kappa_2^2 \xi_5^2)$, $\xi_8^2 = (1 - \xi_3^2)(1 - \kappa_2^2 \xi_3^2)$.

Покладемо:

$$L = S = [\lambda^2 M], \quad N = [\lambda M]. \tag{3}$$

Позначимо через $\zeta_1, ..., \zeta_n$ лінійно незалежні серед чисел $\xi_1^{u_1}, ..., \xi_5^{u_5}$, $u_i = 0, 1, ..., d_i - 1$. Визначимо:

$$F(z) = \sum_{k,l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2} z^k sn_1^{l_1}(z) sn_2^{l_2}(z), \quad C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau} \zeta_\tau, \quad C_{k,l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. − 2014. − Вип. 12. − С. 59−63.

Покладемо $\varphi_1(z) = sn_2(z+K)$, $\varphi_2(w) = sn_2(z+3K)$. Тоді

$$sn_2(z+w) = \frac{\varphi_1(z)\varphi_2'(w) + \varphi_2(w)\varphi_1'(z)}{1-\kappa_2^2\varphi_1^2(z)\varphi_2^2(w)} = \frac{\Lambda_1(z,w)}{\Lambda_2(z,w)}. \qquad (5)$$

Подібно, як і в праці [3], визначимо многочлени так

$$G_{s,p,l} = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_1^p(z,w)\Lambda_2^l(z,w))\,|_{w=0}, \qquad (6)$$

що справджуються такі оцінки довжини та степеня: $\deg G_{s,p,l} \le 4(p+l)$, $\ln L(G_{s,p,l}) \le s\ln(s(p+l)+c_1(s+p))$. З (4) ,(5) та (6), як у праці [3], отримаємо:

$$F^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}((\Lambda_2^{-L}(z,w)(F(z+w)\Lambda_2^L(z,w)))\,|_{w=0} = \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\left(\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}\Lambda_2^{-L}(z,w)\right)|_{w=0} \times$$

$$\times \sum_{k,l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\left(\frac{d^{t-i}}{d\,w^{t-i}}(z+w)^k sn_1^{l_1}(z+w)\right)|_{w=0}\; G_{i,l_2,L-l_2}(z). \qquad (7)$$

Покладемо:

$$F_{s,t}(z) = \sum_{k,l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\left(\frac{d^{t-i}}{d\,w^{t-i}}(z+w)^k sn_1^{l_1}(z+w)\right)|_{w=0}\; G_{i,l_2,L-l_2}(z). \qquad (8)$$

Через $F_{s,n,n_1}(\xi_1,\ldots,\xi_8)$ та $F_{s,\,t,\,n,\,n_1}(\xi_1,\ldots,\xi_8)$ позначимо вирази, отримані з $F^{(s)}(4nK+2in_1K_1+\alpha)$ та $F_{s,t}(4nK+2in_1K_1+\alpha)$ заміною чисел $4K, 2iK_1$, $sn_2(2iK_1)$, $sn_1(\alpha)$, $sn_2(\alpha)$, $sn_1{}'(\alpha)$, $sn_2{}'(\alpha)$, $sn_2{}'(2iK_1)$ числами $\xi_1,\ldots,\xi_8$.

Розглянемо $F_{s,t,n,n_1}(\xi_1,\ldots,\xi_8)$, $1 \le n, n_1 \le N$, $0 \le t \le s \le S$, як N^2S лінійних форм від nKL^2 змінних $C_{k,l_1,l_2,\tau}$. Згідно з [6] (лема 4.1) та (3), (8) виберемо не всі рівні нулю числа $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ так, що для $1 \le n, n_1 \le N$, $0 \le t \le s \le S$:

$$F_{s,t,n,n_1}(\xi_1,\ldots,\xi_8) = 0, \quad 0 < \max|C_{k,l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_2\lambda^3 n^{-1}M^3). \qquad (9)$$

З (2), (3), (9) при $1 \le n, n_1 \le \lambda N$, $0 \le s \le S$ отримаємо:

$$|F^{(s)}(4nK+2in_1K_1+\alpha) - F_{s,n,n_1}(\xi_1,\ldots,\xi_8)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 M^3). \qquad (10)$$

З (9) і (10), якщо $1 \le n, n_1 \le N$, $0 \le s \le S$, дістанемо:

$$|F^{(s)}(4nK+2in_1K_1+\alpha)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 M^3). \qquad (11)$$

Покажемо, що оцінка (11) виконується також і для $1 \le n, n_1 \le \lambda N$, $0 \le s \le S$. Нехай при $0 \le s \le S$ нерівність (11) справджується для $1 \le n, n_1 \le 2^d N$, $2^d < \lambda$. Доведемо, що тоді вона справджується і для $1 \le n, n_1 \le 2^{d+1}N$.

Позначимо $(2\omega_{1,i}, 2\omega_{3,i})$ пару основних періодів функції Вейєрштрасса $\wp_i(z)$, якій відповідає $sn_i(z)$, $e_{1,i} = \wp(\omega_{1,i})$, $e_{3,i} = \wp(\omega_{3,i})$, $i = 1, 2$. Покладемо:

$$G(z) = F(z)\sigma_1^L\left((z+iK_1')/\sqrt{e_{1,1}-e_{3,1}}\right)\sigma_2^L\left((z+iK_2')/\sqrt{e_{1,2}-e_{3,2}}\right). \qquad (12)$$

Виберемо найменше можливе ціле r так, щоб виконувалась умова

$$r > 16(2^d N+1)(|K|+|K_1|+|K_2|+|\alpha|+1). \tag{13}$$

Позначимо $R = 4r$. Тоді з (3), (4), (9), (12), (13) випливає:

$$|G(z)|_{|z|\le R} < \exp(-c_3 2^d \lambda^4 M^3). \tag{14}$$

З праці [6] (лема 4.5) та (14) при $0 \le s \le S$ отримаємо:

$$|G^{(s)}(z)|_{|z|\le r} < \exp(-2^d \lambda^5 M^3). \tag{15}$$

Так як $4nK + 2in_1K_1 + \alpha$ не є полюсами $sn_1(z)$ та $sn_2(z)$, то для $\varepsilon = R^{-1}$ в ε-околах $V(\varepsilon, 4nK + 2in_1K_1 + \alpha)$ точок $4nK + 2in_1K_1 + \alpha$ при $1 \le n,\ n_1 \le \lambda N$ з (3) отримаємо:

$$\left|\sigma_1^L\left((z+iK_1')/\sqrt{e_{1,1}-e_{3,1}}\right)\right|_{z\in V(\varepsilon,4nK+2in_1K_1+\alpha)} > \exp(-c_4\lambda^4 M^2). \tag{16}$$

З (15) і (16), якщо $1 \le n,\ n_1 \le \lambda N,$ випливає:

$$|F(z)|_{z\in V(\varepsilon,4nK+2in_1K_1+\alpha)} < \exp(-2^{2d-1}\lambda^5 M^3). \tag{17}$$

З (14)–(17) для $1 \le n,\ n_1 \le 2^{d+1}N,\ \ 0 \le s \le S$ отримаємо:

$$|F^{(s)}(4nK + 2in_1K_1 + \alpha)| < \exp(-\frac{2^d\lambda^5}{3}M^3). \tag{18}$$

Використавши (10), для $1 \le n,\ n_1 \le 2^{d+1}N$ та $0 \le s \le S$ з (18) отримали:

$$|F_{s,n,n_1}(\xi_1,\dots,\xi_8)| < \exp(-\frac{2^d\lambda^5}{4}M^3). \tag{19}$$

Розглядаючи $F_{s,t,n,n_1}(\xi_1,\dots,\xi_8)$, $0 \le t \le s \le S$, $1 \le n,\ n_1 \le 2^{d+1}N$ як значення відповідного многочлена в алгебричних точках, з праці [6] (лема 4.1) та (3) для $F_{s,t,n,n_1}(\xi_1,\dots,\xi_8) \ne 0$ дістанемо оцінку

$$|F_{s,t,n,n_1}(\xi_1,\dots,\xi_8)| > \exp(-\lambda^{3,5}M^3). \tag{20}$$

З (20) одержимо:

$$|F_{s,n,n_1}(\xi_1,\dots,\xi_8)| > \exp(-\lambda^4 M^3). \tag{21}$$

Оцінки (19) та (21) суперечливі, тому для $1 \le n,\ n_1 \le 2^{d+1}N,\ \ 0 \le t \le s \le S$ отримаємо $F_{s,n,n_1}(\xi_1,\dots,\xi_8) = 0,$ що разом з (10) доводить оцінку (11) для $1 \le n,\ n_1 \le \lambda N,\ \ 0 \le s \le S$.

Оцінимо $|C_{k,l_1,l_2,\tau}|$ зверху. Покладемо:

$$\alpha_t = \left(1 - \frac{t}{\lambda L}\right)\frac{4K + 2iK_1 + \alpha}{4}, \quad t = 1,\dots,L. \tag{22}$$

З (3) і (22) випливає:

$$|sn(\alpha_t) - sn(\alpha_j)| > \exp(-\lambda \ln M), \quad t \ne j. \tag{23}$$

З леми 4 праці [1] отримаємо таке твердження: нехай функція $F(z)$ визначена (4), $\Delta = \det(sn_1^{l_1}(\alpha_t))_{l_1,t=1,\dots,L}$, $\Delta(n_1,t) = \det((4nK + 2in_1K_1 + \alpha_t)^k)_{n,k=1,\dots,L}$, $\Delta(t) = \det(sn_2^{l_2}(2in_1K_1 + \alpha_t)_{l_2,n_1=1,\dots,L}$, $\Delta_{l_1,t}$ – алгебричне доповнення елемента $sn_1^{l_1}(\alpha_t)$ визначника Δ, $\Delta_{l_2,n_1}(t)$ – елемента $sn_2^{l_2}(2in_1K_1 + \alpha_t)$ визначника $\Delta(t)$, $\Delta_{k,n}(n_1,t)$ – елемента $(4nK+2in_1K_1+\alpha_t)^k$ визначника $\Delta(n_1,t)$. Якщо Δ, $\Delta(t)$ та $\Delta(n_1,t)\neq 0$, то

$$C_{k,l_1,l_2}=\sum_{t,\,n,\,n_1=1}^{L}\frac{\Delta_{l_1,t}}{\Delta}\frac{\Delta_{l_2,n_1}(t)}{\Delta(t)}\frac{\Delta_{k,n}(n_1,t)}{\Delta(n_1,t)}F(4nK+2in_1K_1+\alpha_t). \tag{24}$$

З (22), (23) випливає, що Δ, $\Delta(t)$ та $\Delta(n_1,t)$, які є визначниками Вандер–монда, відмінні від нуля. Використовуючи лему 5.7 праці [2], співвідношення (3), (23), отримаємо:

$$\left|\frac{\Delta_{l_1,t}}{\Delta}\right|,\ \left|\frac{\Delta_{l_2,n_1}(t)}{\Delta(t)}\right|,\ \left|\frac{\Delta_{n,k}(n_1,t)}{\Delta(n_1,t)}\right|<\exp(c_5\lambda^3N\ln N). \tag{25}$$

Для $1\le n,\ n_1\le L$ та точок $z=4nK+2in_1K_1+\alpha_t$ справджується така оцінка: $\min|\sigma^L(z)|>\exp(-c_6\lambda^6M^3)$, тому з (17) при $(1/2)\lambda\le 2^d\le\lambda$ одержимо $|f(4nK+2in_1K_1+\alpha_t)|<\exp(-(1/4)\lambda^7M^3)$. Звідси і з (24), (25) випливає:

$$|C_{k,l_1,l_2}|<\exp(-\lambda^6M^3). \tag{26}$$

Розглядаючи C_{k,l_1,l_2} як значення відповідного многочлена (4) з цілими коефіцієнтами $\mathrm{P}_{k,p,l}\in\mathrm{Z}[v_1,\dots,v_5]$ у точці $\xi_1,\dots,\xi_5$ і використовуючи (3) та лему 4.1 [6], для $C_{k,\,l_1,\,l_2}\neq 0$ отримаємо оцінку $|C_{k,l_1,l_2}|>\exp(-\lambda^4M^3)$, що суперечить оцінці (26). Тому всі C_{k,l_1,l_2} дорівнюють нулю. Але тоді з (4) і всі $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ дорівнюють нулю, що суперечить (9). Останнє протиріччя доводить, що (2) не справджується. Отже, за достатньо великого Λ оцінка (1) виконується, що й потрібно довести.

Якщо в (2) замінити K_1 на K_2 і $sn_2(K_1)$ на $sn_1(K_2)$ та розглядати точки $4nK+2in_2K_2+\alpha$, то за допомогою подібних міркувань отримаємо, що припущення (2) не справджується і для чисел $K,\ K_2,\ sn_1(K_2), sn_1(\alpha)$, $sn_2(\alpha)$. Тому отримаємо твердження.

Наслідок 1. Для алгебричних чисел α, $\xi_1,\dots,\xi_5$ справджується
$\max\{|K-\xi_1|,|K_2-\xi_2|,|sn_1(2iK_2)-\xi_3|,|sn_1(\alpha)-\xi_4|,$
$|sn_2(\alpha)-\xi_5|\}>\exp\left(-\Lambda D^3\right)$,
де $D^2=d\left(\frac{\ln L_1}{d_1}+\ldots+\frac{\ln L_5}{d_5}+\ln d\right)$, $d=\deg\mathrm{Q}(\xi_1,\ldots,\xi_5)$, $\Lambda>0$ – константа, залежна лише від чисел κ_1,κ_2 та α.

Наслідок 2. Для довільних алгебричних чисел α, $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_7$ справджується оцінка

$$\max\{|K-\xi_1|,|K_1-\xi_2|,|K_2-\xi_3|,|sn_1(2iK_2)-\xi_4|,|sn_2(2iK_1)-\xi_5|,$$
$$|sn_1(\alpha)-\xi_6|,|sn_2(\alpha)-\xi_7|\}>\exp\left(-\Lambda D^3\right),$$

де $D^2=d\left(\frac{\ln L_1}{d_1}+\ldots+\frac{\ln L_7}{d_7}+\ln d\right)$, $d=\deg\mathrm{Q}(\xi_1,\ldots,\xi_7)$, $\Lambda>0$ – константа, залежна лише від чисел κ_1,κ_2 та α.

1. *Фельдман Н. И.* Алгебраическая независимость некоторых чисел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1980. – **4.** – С. 46–50.
2. *Фельдман Н. И.* Седьмая проблема Гильберта. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 312 с.
3. *Chudnovsky G. V.* Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann–Weierschtrass theorem // Inventiones Math. – 1980. – **61.** – P. 267–290.
4. *Fel'dman N. I., Nesterenko Yu. V.* Transcendental Numbers. – Berlin: Springer-Verlag, 1998. – 346 p.
5. *Lawden D. F.* Elliptic functions and applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 272 p.
6. *Reyssat E.* Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp // Bull. Soc. Math. France. – 1980. – **108.** – P. 47–79.

ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДОВ И ЗНАЧЕНИЙ ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ

Пусть $sn_i(z)$, $i = 1, 2$, – *алгебраически независимые эллиптичекие функции Якоби с общим периодом. Получено оценку совместного приближения периодов этих функций и значений каждой из них в периодах другой и в алгебраической точке* α.

APPROXIMATION OF PERIODS AND VALUES OF TWO JACOBI ELLIPTIC FUNCTIONS

Let $sn_i(z)$, $i = 1, 2$, *be algebraically independent Jacobi elliptic functions with common period. We obtain an estimation of a simultaneous approximation of periods of these functions and the values of each of these functions at the periods of the other function and at the algebraic point* α.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
17.09.14