

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ДВОСКЛАДОВОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА ЗА СКЛАДНОГО НАГРІВАННЯ

На основі моделі термочутливого тіла визначено стаціонарний розподіл температури в двоскладовому скінченному циліндрі за умов складного теплообміну на плоских обмежувальних поверхнях, тепловиділеннях на межі контакту складових та теплоізоляції циліндричної поверхні. Знайдено температурні напруження та досліджено вплив залежності теплових та механічних характеристик матеріалів складових від температури на рівень та характер розподілу температури і напружень, коли задані взідні параметри.

Для реалізації сучасних вимог інженерної практики до розрахунку температурних полів і викликаних ними напружень у багаточарових елементах конструкцій, які працюють в умовах високотемпературного нагрівання, використовують модель термочутливого тіла, тобто враховують залежність теплових та механічних характеристик матеріалів складових від температури. При цьому важливо також враховувати реальні умови їх нагрівання та взаємодії з довкіллям [1–4].

Такі математичні моделі точніше описують тепловий і термопружний стани багаточарових елементів конструкцій. Для визначення температури вони є нелінійними крайовими задачами математичної фізики, а для знаходження напружено-деформованого стану – крайовими задачами для систем звичайних диференціальних рівнянь чи рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Зазвичай ці задачі не мають точних аналітичних розв'язків, тому потребують розробки нових методів їх розв'язування [2, 4].

**Формулювання задачі.** Розглянемо скінченний термочутливий циліндр (рис.1), який складається із двох циліндрів різної довжини, виготовлених із різних матеріалів. На одній із плоских обмежувальних поверхонь  $\tilde{z} = \tilde{z}_1$  заданий потік тепла  $q_0$ , а через іншу плоску поверхню  $\tilde{z} = \tilde{z}_3$  циліндр конвективно обмінюється теплом із зовнішнім середовищем сталої температури  $t_c$ . Коефіцієнт теплообміну через цю поверхню сталий і рівний  $\alpha$ . У площині контакту циліндрів  $\tilde{z} = \tilde{z}_2$  рівномірно розподілені джерела тепла, які створюють потік тепла  $q_1$ .

Через теплоізоляцію циліндричної поверхні температурне поле змінюється лише у напрямку осової координати циліндра. Вісь абсцис вибрана так, що її початок знаходиться під першою складовою.

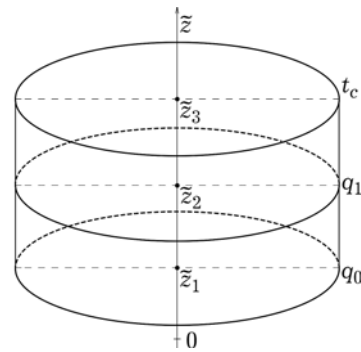


Рис. 1.

**Математична модель для визначення розподілу температури.** Вона охоплює:

- рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left( \lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{d\tilde{z}} \right) = 0, \quad \tilde{z}_i < \tilde{z} < \tilde{z}_{i+1}, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$\lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{dt_1}{d\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_1} = -q_0, \quad \left[ \lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{dt_2}{d\tilde{z}} + \alpha(t_2 - t_c) \right]_{\tilde{z}=\tilde{z}_3} = 0; \quad (2)$$

• умови контакту на поверхні дотику складових циліндра

$$t_1|_{\tilde{z}=\tilde{z}_2} = t_2|_{\tilde{z}=\tilde{z}_2}, \quad \lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{dt_1}{d\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_2} = \lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{dt_2}{d\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_2} + q_1. \quad (3)$$

Модель (1)–(3) є нелінійною через залежність коефіцієнтів теплопровідності  $\lambda_t^{(i)}(t_i)$  ( $i = 1, 2$ ) від температур  $t_i$  ( $i = 1, 2$ ), і ці залежності у довідниковій літературі переважно задають у вигляді таблиць.

Для теоретичних досліджень зручно мати температурні залежності коефіцієнтів теплопровідності у вигляді явних функціональних залежностей  $\lambda_t^{(i)} = \lambda_t^{(i)}(t_i)$ . Для цього таблично задану функцію апроксимують деякою функціональною залежністю. За такої апроксимації для визначення невідомих параметрів використовують, наприклад, метод найменших квадратів.

Нехай коефіцієнти теплопровідності кожної складової циліндра задані у діапазоні температури  $[t_p, t_k]$ . Під час теоретичних досліджень описуватимемо їх доволі поширеними лінійними залежностями  $\lambda_t^{(i)} = a_i t_i + b_i$ . Параметри  $a_i$  та  $b_i$  невідомі. За методом найменших квадратів їх підбираємо так, щоб сума квадратів різниць їх експериментальних і теоретичних значень була найменшою.

Подамо коефіцієнти теплопровідності складових циліндра у вигляді  $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} \lambda_t^{(i)*}(T_i)$ , де величини  $\lambda_{t_0}^{(i)}$  мають розмірність коефіцієнта теплопровідності, а  $\lambda_t^{(i)*}$  – безрозмірна функція безрозмірної температури  $T_i = t_i/t_k$ ,  $i = 1, 2$  (тут за відлікову вибрана температура  $t_k$ ). За лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури такі подання матимуть вигляд

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} (1 + k_i (T_i - T_p)), \quad (4)$$

де  $T_p = t_p/t_k$ ,  $k_i = a_i t_k / (a_i t_p + b_i)$ , а  $\lambda_{t_0}^{(i)} = a_i t_p + b_i$ .

Для запису задачі (1)–(3) у безрозмірному вигляді виберемо за характерний розмір деяке значення  $l_0$  і введемо безрозмірну координату  $z = \tilde{z}/l_0$ .

У результаті обезрозмірення математична модель (1)–(3) набуде вигляду

$$\frac{d}{dz} \left( \lambda_t^{(i)*}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \right) = 0, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$\lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_1} = -\text{Ki}_0, \quad \left[ \lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{dT_2}{dz} + \text{Bi}(T_2 - T_c) \right]_{z=z_3} = 0, \quad (6)$$

$$T_1|_{z=z_2} = T_2|_{z=z_2}, \quad \lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_2} = K_\lambda \lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{dT_2}{dz} \Big|_{z=z_2} + \text{Ki}_1, \quad (7)$$

де

$$\text{Ki}_0 = \frac{q_0 l_0}{t_k \lambda_{t_0}^{(1)}}, \quad \text{Ki}_1 = \frac{q_1 l_0}{t_k \lambda_{t_0}^{(1)}} - \text{критерії Кірпічова},$$

$$\text{Bi} = \frac{\alpha l_0}{\lambda_{t_0}^{(2)}} - \text{критерій Біо}, \quad T_c = t_c/t_k, \quad K_\lambda = \lambda_{t_0}^{(2)}/\lambda_{t_0}^{(1)}.$$

**Побудова розв'язку математичної моделі.** Для побудови розв'язку задачі (5)–(7) введемо змінні Кірхгофа:

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_t^{(i)*}(T_i) dT_i, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

похідні яких

$$\frac{d\theta_i}{dz} = \lambda_t^{(i)*}(T_i) \frac{dT_i}{dz}.$$

Як наслідок з задачі (5)–(7), отримаємо задачу на змінні  $\theta_i$ :

$$\frac{d^2\theta_i}{dz^2} = 0, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\frac{d\theta_1}{dz} \Big|_{z=z_1} = -\text{Ki}_0, \quad \left[ \frac{d\theta_2}{dz} + \text{Bi} (T_2(\theta_2) - T_c) \right]_{z=z_3} = 0, \quad (10)$$

$$T_1(\theta_1) \Big|_{z=z_2} = T_2(\theta_2) \Big|_{z=z_2}, \quad \frac{d\theta_1}{dz} \Big|_{z=z_2} = K_\lambda \frac{d\theta_2}{dz} \Big|_{z=z_2} + \text{Ki}_1. \quad (11)$$

Бачимо, що у результаті застосування перетворення Кірхгофа з нелінійної задачі теплопровідності (5)–(7) отримали простішу задачу на змінні Кірхгофа, в якій нелінійності зосередилися у виразах температури  $T_i(\theta_i)$  на межі контакту та плоскій поверхні, через яку відбувається конвективний теплообмін. За лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності складових від температури (4), як наслідок з формул (8) для знаходження виразів залежності температур складових від змінних Кірхгофа, маємо рівняння

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_t^{(i)*}(T_i) dT_i = (T_i - T_p) + \frac{k_i}{2} (T_i - T_p)^2, \quad (12)$$

для яких

$$T_i(\theta_i) = \frac{\sqrt{1 + 2k_i\theta_i} - 1}{k_i} + T_p. \quad (13)$$

Зауважимо, що вибраний перед коренем квадратним у виразах  $T_i(\theta_i)$  знак забезпечує їх фізичну коректність.

Проінтегрувавши рівняння (9), знаходимо, що

$$\frac{d\theta_i}{dz} = C_{i1}; \quad \theta_i = C_{i1}(z - z_i) + C_{i2}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (14)$$

Використовуючи умови (10), (11), знайдемо сталі інтегрування. При цьому замість умови рівності температур (перша з умов (11)) використаємо рівносильну їй умову, наведену в праці [2]:

$$(\theta_2 - \theta_1) \Big|_{z=z_2} = \frac{k_2 - k_1}{2} (T_1(\theta_1) - T_p)^2 \Big|_{z=z_2}, \quad (15)$$

де  $T_1(\theta_1)$  має вигляд (13).

З першої умови (10) та другої умови (11) знаходимо:

$$C_{11} = -\text{Ki}_0, \quad C_{21} = -\frac{\text{Ki}_0 + \text{Ki}_1}{K_\lambda}.$$

З другої умови (10) отримуємо рівняння для визначення сталої  $C_{12}$ :

$$-\frac{\text{Ki}_0 + \text{Ki}_1}{K_\lambda} + \text{Bi} \left( \frac{\sqrt{1 + 2k_2 \left( C_{11} \frac{\text{Ki}_0 + \text{Ki}_1}{K_\lambda} (z_3 - z_2) + C_{12} \right)} - 1}{k_2} + T_p - T_c \right) = 0, \quad (16)$$

де з умови (15)

$$C_{22} = C_{12} - \text{Ki}_0 (z_2 - z_1) + \frac{k_2 - k_1}{2} \left( \frac{\sqrt{1 + 2k_1 (C_{12} - \text{Ki}_0 (z_2 - z_1)) - 1}}{k_1} \right)^2. \quad (17)$$

Розв'язок рівняння (16) отримано з допомогою пакета програм аналітичних перетворень. Знайшовши аналітично вираз для сталої інтегрування  $C_{12}$ , автоматично отримуємо вирази і для решти сталих інтегрування, які обчислюють через  $C_{12}$ . На основі формул (13) і (14) записуємо вирази розподілів температури в такому двоскладовому термочутливому циліндрі. Зауважимо, що в результаті розв'язання рівняння (16) одержано два його корені, вирази яких не наводимо через громіздкість. Під час числових досліджень використовуємо той із них, який забезпечує фізично коректний розподіл температури.

**Визначення розподілу температури в складовому нетермочутливому циліндрі.** Обезрозмірена математична модель для визначення температури в аналогічному нетермочутливому циліндрі має вигляд

$$\frac{d^2 T_{in}}{dz^2} = 0, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

$$\left. \frac{dT_{1n}}{dz} \right|_{z=z_1} = -\text{Ki}_{0n}, \quad \left[ \frac{dT_{2n}}{dz} + \text{Bi}_n (T_{2n} - T_c) \right]_{z=z_3} = 0, \quad (19)$$

$$T_{1n}|_{z=z_2} = T_{2n}|_{z=z_2}, \quad \left. \frac{dT_{1n}}{dz} \right|_{z=z_2} = K_{\lambda n} \left. \frac{dT_{2n}}{dz} \right|_{z=z_2} + \text{Ki}_{1n}. \quad (20)$$

Тут

$$\text{Ki}_{0n} = \frac{q_0 l_0}{\lambda_{tn}^{(1)} t_k}, \quad \text{Ki}_{1n} = \frac{q_1 l_1}{\lambda_{tn}^{(1)} t_k} - \text{критерії Кірпічова},$$

$$\text{Bi}_n = \frac{\alpha l_0}{\lambda_{tn}^{(2)}} - \text{критерій Біо}, \quad T_{in} = t_{in}/t_k, \quad K_{\lambda n} = \lambda_{tn}^{(2)}/\lambda_{tn}^{(1)}.$$

З задачі (18)–(20) знаходимо:

$$T_{1n} = \bar{C}_{11} (z - z_1) + \bar{C}_{12}, \quad T_{2n} = \bar{C}_{21} (z - z_2) + \bar{C}_{22}, \quad (21)$$

де

$$\bar{C}_{11} = -\text{Ki}_{0n}, \quad \bar{C}_{12} = \frac{\text{Ki}_{0n} + \text{Ki}_{1n}}{K_{\lambda n}} \left( \frac{1}{\text{Bi}_n} + z_3 - z_2 \right) + \text{Ki}_{0n} (z_2 - z_1) + T_c,$$

$$\bar{C}_{21} = -\frac{\text{Ki}_{0n} + \text{Ki}_{1n}}{K_{\lambda n}}, \quad \bar{C}_{22} = \frac{\text{Ki}_{0n} + \text{Ki}_{1n}}{K_{\lambda n}} \left( \frac{1}{\text{Bi}_n} + z_3 - z_2 \right) + T_c.$$

**Визначення температурних напружень.**

Ненульові компоненти тензора напружень  $\tilde{\sigma}_{yy} = \tilde{\sigma}_{zz} = \tilde{\sigma}(z)$ , що визначають термопружний стан двоскладового циліндра, знаходять за формулою [4]

$$\tilde{\sigma}(\tilde{z}) = \frac{E(\tilde{z}, t)}{1 - \nu(\tilde{z}, t)} \left( \frac{(\tilde{A}\tilde{N}_t - \tilde{B}\tilde{M}_t) \cdot \tilde{z} + \tilde{A}\tilde{M}_t - \tilde{C}\tilde{N}_t}{\tilde{A}^2 - \tilde{B}\tilde{C}} - \Phi(\tilde{z}, t) \right), \quad (22)$$

де  $\{E(\tilde{z}, t), \Phi(\tilde{z}, t), \alpha_t(\tilde{z}, t), \tilde{z}, t\} =$

$$= \begin{cases} \{E_1(t_1), \Phi(t_1), \alpha_t^{(1)}(t_1), \tilde{z}, t_1\} & \tilde{z}_1 \leq \tilde{z} < \tilde{z}_2 \\ \{E_2(t_2), \Phi(t_2), \alpha_t^{(2)}(t_2), \tilde{z}, t_2\} & \tilde{z}_2 \leq \tilde{z} \leq \tilde{z}_3 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}} \frac{\tilde{z} \cdot E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} d\tilde{z}, \quad \tilde{B} = \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}} \frac{E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} d\tilde{z}, \quad \tilde{C} = \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}} \frac{\tilde{z}^2 \cdot E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} d\tilde{z},$$

$$\tilde{N}_t = \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}} \frac{E_i(t_i) \cdot \Phi(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} d\tilde{z}, \quad \tilde{M}_t = \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_{i+1}} \frac{E_i(t_i) \cdot \Phi(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} \tilde{z} d\tilde{z},$$

а  $E_i(t_i)$ ,  $\nu_i(t_i)$ ,  $\alpha_i(t_i)$  – залежні від температури модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та температурні коефіцієнти лінійного розширення складових циліндра.

При цьому ці напруження задовольняють умови

$$\int_{\tilde{z}_1}^{\tilde{z}_3} \tilde{\sigma}(\tilde{z}) d\tilde{z} = 0; \quad \int_{\tilde{z}_1}^{\tilde{z}_3} \tilde{z} \cdot \tilde{\sigma}(\tilde{z}) d\tilde{z} = 0.$$

Якщо термомеханічні характеристики складових подати у вигляді  $\chi_i(t) = \chi_0^{(i)} \chi_i^*(T)$ , де  $\chi_0^{(i)}$  – розмірні величини, що дорівнюють значенню відповідної характеристики при температурі  $t_p$ , а величини  $\chi_i^*(T_i)$  – безрозмірні величини від безрозмірних температур  $T_i$ , то

$$\nu_i(t_i) = \nu_0^{(i)} \nu_i^*(T_i), \quad \alpha_{ti}(t_i) = \alpha_{t0}^{(i)} \alpha_{ti}^*(T_i), \quad E_i(t_i) = E_0^{(i)} E_i^*(T_i).$$

Формула для визначення напружень (22) у безрозмірних величинах матиме вигляд

$$\tilde{\sigma}(z) = \frac{E(z, t)}{1 - \nu(z, t)} \left( \frac{(AN_t - BM_t)z + AM_t - CN_t - \Phi(z, T)}{A^2 - BC} \right), \quad (23)$$

де

$$\sigma(z) = \frac{\tilde{\sigma}(z)}{E_0^{(1)} \alpha_{t0}^{(1)} t_k}, \quad \Phi_i^*(T_i) = (T_i - T_p) + \frac{k_\alpha^{(i)}}{2} (T_i - T_p)^2,$$

$$\Phi(z, T) = \Phi_1^*(T_1) + \left( \frac{\alpha_{t0}^{(2)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \Phi_2^*(T_2) - \Phi_1^*(T_1) \right) S_+(z - z_2), \quad S_+(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0, \end{cases}$$

$$A = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz, \quad B = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz,$$

$$C = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z^2 E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz, \quad N_t = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i) \Phi_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz,$$

$$M_t = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i) \Phi_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} z dz.$$

### Часткові випадки.

1. Розглянемо випадок, коли коефіцієнти теплопровідності та механічні характеристики складових нетермочутливого циліндра рівні опорним значенням відповідних складових термочутливого. Тоді розподіл температури матиме вигляд (21), де  $\lambda_{tn}^{(i)} = \lambda_{t0}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ .

Коефіцієнти Пуассона, теплового розширення та модулі Юнга складових такого циліндра будуть

$$\nu_i = \nu_0^{(i)}, \quad \alpha_{ti} = \alpha_{t0}^{(i)}, \quad E_i = E_0^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

а формула для обчислення напружень набуде вигляду

$$\sigma(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)} \left( \frac{(AN_t - BM_t)z + AM_t - CN_t - \Phi(z)}{A^2 - BC} \right), \quad (24)$$

$$\text{де } \{E(z), \Phi(z), z\} = \begin{cases} \{1, v_0^{(1)}, T_{1n} - T_p\}, & z_1 \leq z < z_2, \\ \left\{ \frac{E_0^{(2)}}{E_0^{(1)}}, v_0^{(2)}, \frac{\alpha_{t0}^{(2)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} (T_{2n} - T_p) \right\}, & z_2 \leq z \leq z_3, \end{cases}$$

$$A = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{z_{i+1}^2 - z_i^2}{2(1 - v_0^{(i)})}, \quad B = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{z_{i+1} - z_i}{1 - v_0^{(i)}}, \quad C = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{z_{i+1}^3 - z_i^3}{3(1 - v_0^{(i)})},$$

$$N_t = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \frac{\bar{C}_{i1} (z_{i+1} - z_i)^2 + (\bar{C}_{i2} - T_p)(z_{i+1} - z_i)}{1 - v_0^{(i)}},$$

$$M_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \frac{1}{1 - v_0^{(i)}} \left( (z_{i+1} - z_i)^3 \bar{C}_{i1} / 3 + (z_{i+1} - z_i)^2 (\bar{C}_{i1} z_i + \bar{C}_{i2} - T_p) / 2 + \right. \\ \left. + z_i (z_{i+1} - z_i) (\bar{C}_{i2} - T_p) \right).$$

2. За середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності, тобто коли

$$\lambda_{tn}^{(i)} = \lambda_{tc}^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} (\lambda_{t0}^{(i)} (1 + k_i (T_i - T_p))) dT = \lambda_{t0}^{(i)} \left( 1 + \frac{k_i}{2} (T_i - T_p) \right), \quad i = 1, 2,$$

матимемо розподіл температури (21), де

$$\text{Ki}_{0n} = \text{Ki}_0 \cdot \lambda_0^{(1)} / \lambda_c^{(1)}, \quad \text{Ki}_{1n} = \text{Ki}_1 \cdot \lambda_0^{(1)} / \lambda_c^{(1)}, \\ \text{Bi}_n = \text{Bi} \cdot \lambda_{t0}^{(2)} / \lambda_{tc}^{(2)}, \quad K_{\lambda n} = \lambda_{tc}^{(2)} / \lambda_{tc}^{(1)}.$$

Термопружні характеристики набудуть вигляду

$$v_i = v_c^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} v_i(T_i) dT_i, \quad \alpha_{ti} = \alpha_{tc}^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} \alpha_{ti}(T_i) dT_i, \\ E_i = E_c^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} E_i(T_i) dT_i, \quad i = 1, 2.$$

Формула для обчислення напружень матиме вигляд (24), у якій опорні значення механічних характеристик слід замінити на середньоінтегральні.

**Числові дослідження.** Вивчимо вплив залежності теплових та механічних характеристик матеріалів складових циліндра від температури на рівень та характер розподілу температури і напружень, коли задані вхідні параметри.

Експериментально задані коефіцієнти теплопровідності та термомеханічні характеристики проапроксимували з використанням методу найменших квадратів лінійними залежностями типу (4). При цьому отримали, що для вольфраму

$$\lambda_{t1} = 161.72(1 - 0.407(T_1 - T_p)), \quad v_1 = 0.29(1 + 0.05172(T_1 - T_p)), \\ \alpha_{t1} = 4.43 \cdot 10^{-6} (1 + 0.10457(T_1 - T_p)), \quad E_1 = 4.04 \cdot 10^{11} (1 - 0.2277(T_1 - T_p))$$

та сталі

$$\lambda_{t2} = 32.757(1 - 0.337(T_2 - T_p)), \quad v_2 = 0.24(1 + 0.291(T_2 - T_p)), \\ \alpha_{t2} = 12.47 \cdot 10^{-6} (1 + 0.294(T_2 - T_p)), \quad E_2 = 2.197 \cdot 10^{11} (1 - 0.278(T_2 - T_p)).$$

Координати меж складових циліндра прийняли рівними:  $z_1 = 0, z_2 = 0.2, z_3 = 1$ , причому за характерний розмір взяли значення  $l_0 = z_3$ . Значення безрозмірних температур прийняли такими:  $T_p = 1/3, T_k = 1, T_c = 1/3$ , а критеріїв Біо та Кірпічова –  $\text{Bi} = 5, \text{Ki}_0 = 0.02, \text{Ki}_1 = \{0.05, 0.07, 0.09\}$ . Характеристики матеріалів взято в діапазоні температур  $300 \div 900 \text{ К}$ .

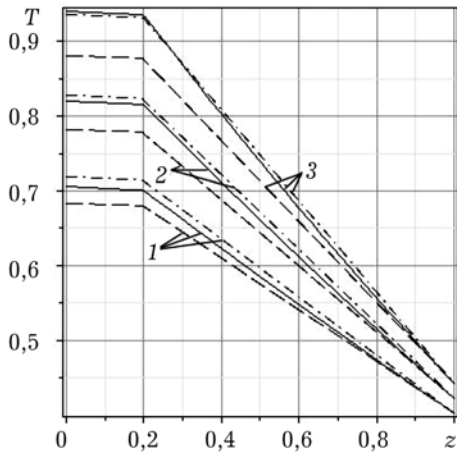


Рис. 2.

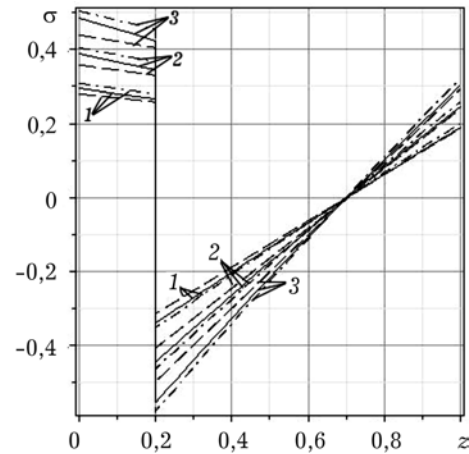


Рис. 3.

На рис. 2 і 3 подано графіки зміни розподілів безрозмірних температур та напружень відповідно по товщині складових циліндра: суцільна лінія — термочутливий циліндр, штрихова — нетермочутливий за опорних значень термомеханічних характеристик, штрих-пунктирна — нетермочутливий за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик. Лінії 1 відповідають значенню  $Ki_1 = 0.05$ ; 2 — 0.07; 3 — 0.09.

У табл. 1 подано максимальні розбіжності між безрозмірними температурами та викликаними ними напруженнями у термочутливому та нетермочутливому циліндрах за опорних чи середньоінтегральних термомеханічних характеристик.

Таблиця 1

$Ki_1$	Температури							
	Опорні характеристики				Середньоінтегральні			
	складова 1		складова 2		складова 1		складова 2	
	$z$	%	$z$	%	$z$	%	$z$	%
0.05	0	3.21	0.2	3.13	0.19	1.86	0.29	1.99
0.07	0	4.73	0.2	4.63	0.19	0.87	0.49	1.70
0.09	0	6.41	0.2	6.31	0	0.51	0.62	1.44
Напруження								
0.05	0	6.34	0.2	6.32	0.19	4.86	0.2	4.42
0.07	0	8.06	0.2	8.01	0.19	5.72	0.2	4.70
0.09	0	9.73	0.2	9.66	0.19	6.64	0.2	4.96

Аналогічно досліджували розподіли температур та напружень (рис. 4 і 5) для інших матеріалів складових циліндра — кераміки ( $ZrO_2$ ) та титанового сплаву ( $Ti-6Al-4V$ ), для яких

$$\lambda_{t1} = 1.915(1 + 0.24664(T_1 - T_p)), \quad \nu_1 = 0.333,$$

$$\alpha_{t1} = 8.783 \cdot 10^{-6} (1 - 1.4128(T_1 - T_p) + 1.7496(T_1 - T_p)^2),$$

$$E_1 = 116.381(1 - 0.521357(T_1 - T_p) - 0.084215(T_1 - T_p)^2),$$

$$\lambda_{t2} = 6.2(1 + 3.016(T_2 - T_p)), \quad \nu_2 = 0.2984(1 + 0.118(T_2 - T_p)),$$

$$\alpha_{t2} = 8.8559 \cdot 10^{-6} \left( 1 + 0.49014(T_2 - T_p) - 0.36754(T_2 - T_p)^2 \right),$$

$$E_2 = 105.05(1 - 0.5916(T_2 - T_p)).$$

Координати меж складових циліндра прийняли рівними:  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 0.7$ ,  $z_3 = 1$ , критерій Біо  $Bi = 5$  та Кірпічова  $Ki_1 = 0.01$ , а  $Ki_0 = 0.3$  – криві 1, 0.5 – криві 2, 0.8 – криві 3, причому суцільні лінії – розподіли безрозмірних температур чи напружень для термочутливого циліндра, штрихові – нетермочутливого за опорних значень термомеханічних характеристик, штрихпунктирні – нетермочутливого за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик. Значення безрозмірних температур залишили такими ж. Характеристики матеріалів взято в діапазоні температур  $300 \div 1100$  К.

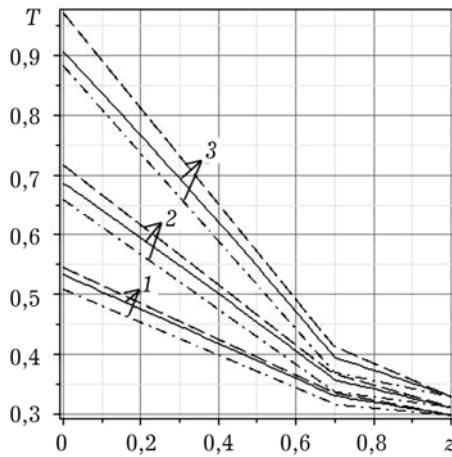


Рис. 4.

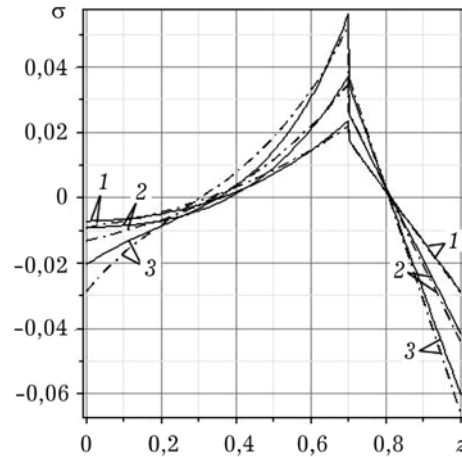


Рис. 5.

З огляду на те, що розподіл напружень у термочутливому кусково-однорідному циліндрі краще наближається таким розподілом в аналогічному нетермочутливому за сталих середньоінтегральних значень механічних характеристик його складових, на рис. 5 зображено тільки графіки в термочутливому та нетермочутливому з середньоінтегральними значеннями термомеханічних характеристик складових циліндрах.

Максимальні розбіжності між безрозмірними температурами та напруженнями у термочутливому та нетермочутливому циліндрах наведено в табл. 2.

Таблиця 2

$Ki_0$	Температури							
	Опорні характеристики				Середньоінтегральні			
	складова 1		складова 2		складова 1		складова 2	
	$z$	$\sigma_0$	$z$	$\sigma_0$	$z$	$\sigma_0$	$z$	$\sigma_0$
0.3	0	1.90	0.7	0.8	0	4.31	0.7	3.92
0.5	0	3.82	0.7	1.85	0.09	4.40	0.7	5.31
0.8	0	6.82	0.7	3.82	0.37	5.04	0.7	6.43
Напруження								
0.3	0	158.2	1	39.08	0	31.2	1	1.44
0.5	0	236.8	1	61.4	0	44.8	1	6.09
0.8	0	144.0	1	79.1	0	41.5	1	9.95



**Висновки.** Побудовано нелінійну математичну модель розподілу температури в двоскладовому термочутливому циліндрі з нагрівальним елементом між складовими, коли на обмежувальній поверхні першої складової задано потік тепла, а через другу циліндр конвективно обмінюється теплом зі середовищем сталої температури, і знайдено її аналітичний розв'язок.

Визначено температурні напруження, спричинені знайденим нерівномірним розподілом температури.

Досліджено вплив термочутливості матеріалів складових циліндра на характер та рівень розподілу температури та напружень. Встановлено, що кращу оцінку напруженого стану в кусково-однорідних тілах, які працюють в умовах високотемпературного нагрівання, на основі моделі термочутливого тіла отримуємо, використовуючи середньоінтегральні значення термомеханічних характеристик матеріалів складових для розглядуваного діапазону температур. При цьому реальні максимальні розбіжності між відповідними значеннями напружень є істотними і можуть перевищувати 30%. Під час застосування для такої оцінки опорних значень термомеханічних характеристик термочутливих складових ці розбіжності можуть бути ще більшими.

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
2. Кушнір Р. М., Попович В. С. Про визначення усталеного термопружного стану багатослових структур за високотемпературного нагрівання // Вісник Київськ. нац. унів. імені Тараса Шевченка. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 42–47.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
4. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл. / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. ТЗ: Термопружність термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с.

#### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХСОСТАВНОГО ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ СЛОЖНОМ НАГРЕВЕ**

*На основани модели термочувствительного цилиндра определено стационарное распределение температуры в двухсоставном цилиндре в условиях сложного теплообмена на плоских ограничивающих поверхностях и тепловыделениях на границе контакта составляющих при теплоизоляции цилиндрической поверхности. Найденны температурные напряжения и исследовано влияние зависимости тепловых и механических характеристик материалов составляющих от температуры на уровень и характер распределения температуры и напряжений в зависимости от входных параметров.*

#### **MATHEMATICAL MODELING AND DEFINITION OF THERMOSTRESSED STATE OF A TWO-COMPONENT THERMOSENSITIVE CYLINDER UNDER CONDITIONS OF COMPLEX HEATING**

*Stationary temperature distribution of two-component cylinder under conditions of complex heat transfer on flat limited surfaces and heat emission on the edge of contact components under conditions of insulation cylindrical surface, which are based on the model of thermosensitive body, have been defined. The temperature stresses, which were caused by defined temperature field, have been found. The influence of the dependence of thermal and mechanical characteristics of materials of components on temperature on the quantity and the distribution of temperature and stresses, depending on the input parameters, has been investigated.*