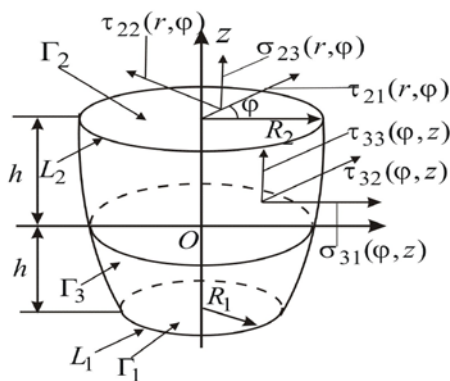


## РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРИВИМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Розглянуто навантажене тіло обертання, тривимірний напружено-деформований стан якого розділено на основний і самозрівноважений. Самозрівноважений стан подано у вигляді ряду за власними функціями. За допомогою розкладу в ряди Фур'є тривимірну крайову задачу спрощено до дослідження незв'язаних між собою систем трьох одновимірних рівнянь. На основі методу найменших квадратів задачу про визначення коефіцієнтів в одержаних рядах зведено до знаходження мінімумів узагальнених квадратичних форм. Встановлено числові критерії збіжності розв'язку.

Багато з несучих елементів конструкцій (колони, опори, різноманітні вали тощо), які широко використовують у будівництві і машинобудуванні, можна розглядати як тіла обертання. На сьогодні відомі розв'язки тривимірних задач для найпростішого тіла обертання – циліндра, які здебільшого мають наближений характер і побудовані з використанням загальних розв'язків для безмежних тіл [1–3, 9, 12, 13]. Серед перших підходів до побудови загальної розв'язку задачі теорії пружності для циліндра у тривимірній постанові був запропонований Дж. Дуголлою [12]. Подання компонентів тензора напружень через гармонічні функції Дуголла застосовано в працях [8, 9]. Використовуючи подання розв'язку через три гармонічні функції, автор публікації [1] запропонував аналітичний підхід до побудови тривимірної задачі теорії пружності для циліндра скінченної довжини із крайовими умовами в термінах переміщень. Вивчено [5, 7, 10, 15] задачі теорії пружності у циліндричній системі координат з використанням однорідних розв'язків (власних функцій). Розвинуто [4, 11, 14] аналітичні методи знаходження напруженого стану суцільного циліндра.



**Формулювання задачі.** Розглянемо статичний тривимірний напружено-деформований стан (НДС) тіла обертання (див. рисунок) з твріною лінією  $r = R(z)$  у циліндричній системі координат  $(r, \varphi, z)$ . Ізотропне тіло обертання обмежене двома торцями  $\Gamma_1$  ( $z = -h$ ),  $\Gamma_2$  ( $z = h$ ) і бічною поверхнею обертання  $\Gamma_3$ , яка перетинається з поверхнями  $\Gamma_j$  уздовж ліній  $L_j$ ,  $j = \overline{1, 2}$ . Вважатимемо, що навантаження, задані на бічній поверхні тіла обертання, діють у напрямку відповідних осей циліндричної системи координат. У позначеннях навантажень перший індекс  $j$  відповідає номеру поверхні  $\Gamma_j$ , а другий – осі, в напрямку якої діє зусилля.

У праці [6] знайдено в явному вигляді основний напружений стан циліндра за будь-яких головних векторів сил і моментів, прикладених до його поверхонь. Після виділення основного НДС знайдемо самозрівноважений напружений стан тіла обертання, за якого торці вільні від навантажень

$$\sigma_z(r, \varphi, \pm h) = 0, \quad \tau_{rz}(r, \varphi, \pm h) = 0, \quad \tau_{z\varphi}(r, \varphi, \pm h) = 0 \quad (1)$$

з навантаженою бічною поверхнею

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)\sigma_r(R(z), \varphi, z) - \sin(\theta)\tau_{rz}(R(z), \varphi, z) &= \sigma_{31}(\varphi, z), \\
\cos(\theta)\tau_{rz}(R(z), \varphi, z) - \sin(\theta)\sigma_z(R(z), \varphi, z) &= \tau_{33}(\varphi, z), \\
\cos(\theta)\tau_{r\varphi}(R(z), \varphi, z) - \sin(\theta)\tau_{z\varphi}(R(z), \varphi, z) &= \tau_{32}(\varphi, z),
\end{aligned} \tag{2}$$

де  $\sigma_{31}(\varphi, z)$ ,  $\tau_{33}(\varphi, z)$ ,  $\tau_{32}(\varphi, z)$  – відомі неперервні навантаження,  $\theta$  – кут між віссю  $Oz$  і дотичною до твірної лінії.

Для знаходження тривимірного самозрівноваженого напруженого стану використаємо загальне подання тензора напружень [5, 6] у циліндричній системі координат через три функції переміщень, які запишемо у вигляді рядів Фур'є:

$$\begin{aligned}
\Phi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_n^c(r, z) \cos n\varphi + \Phi_n^s(r, z) \sin n\varphi], \\
\Psi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\Psi_n^c(r, z) \cos n\varphi + \Psi_n^s(r, z) \sin n\varphi], \\
Q(r, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [Q_n^c(r, z) \cos n\varphi + Q_n^s(r, z) \sin n\varphi],
\end{aligned} \tag{3}$$

де  $\Phi_n^c(r, z)$ ,  $\Psi_n^c(r, z)$ ,  $Q_n^s(r, z)$ ,  $\Phi_n^s(r, z)$ ,  $\Psi_n^s(r, z)$ ,  $Q_n^c(r, z)$  – коефіцієнти розкладу функцій переміщень, які називатимемо коефіцієнтами цих функцій.

Якщо врахувати, що функції переміщень задовольняють рівняння Лапласа, то їх коефіцієнти для одного і того ж значення індексу  $n$  будуть відповідно розв'язками рівняння

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{n^2}{r^2} \right\} \Phi_n(r, z) = 0. \tag{4}$$

Праві частини крайових умов (2) на бічній поверхні тіла обертання також подамо у вигляді рядів Фур'є:

$$\begin{aligned}
\sigma_{31}(\varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ \sigma_{g,n}^c(z) \cos n\varphi + \sigma_{g,n}^s(z) \sin n\varphi \}, \\
\tau_{33}(\varphi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ \tau_{1,n}^c(z) \cos n\varphi + \tau_{1,n}^s(z) \sin n\varphi \}, \\
\tau_{32}(\varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ \tau_{2,n}^c(z) \cos n\varphi + \tau_{2,n}^s(z) \sin n\varphi \}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Розкладемо компоненти тензора напружень у ряди Фур'є [5], використаємо співвідношення (1)–(3), (5) і встановимо, що для фіксованого значення  $n$  окремі два набори коефіцієнтів  $\Phi_n^c(r, z)$ ,  $\Psi_n^c(r, z)$ ,  $Q_n^s(r, z)$  та  $\Phi_n^s(r, z)$ ,  $\Psi_n^s(r, z)$ ,  $Q_n^c(r, z)$  будуть незалежними один від одного.

Розглянемо детально напружений стан, який описує перший набір функцій, і всі компоненти якого надалі позначатимемо без верхніх індексів. Співвідношення (2), після розкладу напружень і врахування формул (5), подамо як умови на коефіцієнти розкладу:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)\sigma_{r,n}(R(z), z) - \sin(\theta)\tau_{rz,n}(R(z), z) &= \sigma_{g,n}^c(z), \\
\cos(\theta)\tau_{rz,n}(R(z), z) - \sin(\theta)\sigma_{z,n}(R(z), z) &= \tau_{1,n}^c(z), \\
\cos(\theta)\tau_{r\varphi,n}(R(z), z) - \sin(\theta)\tau_{z\varphi,n}(R(z), z) &= \tau_{2,n}^s(z),
\end{aligned} \tag{6}$$

де  $\sigma_{r,n}$ ,  $\sigma_{z,n}$ ,  $\tau_{rz,n}$ ,  $\tau_{r\varphi,n}$  – коефіцієнти розкладу компонентів тензора напружень у ряди Фур'є.

У праці [5] побудовано функції переміщень (3) для  $n = 0$ , а в [6] – для  $n > 0$  у вигляді рядів за власними функціями, які тотожно задовольняють крайові умови (1) та рівняння (4) і коефіцієнти яких мають вигляд

$$\Phi_n = h \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{a_{n,k} I_n(\beta_k r) \sin(\mu_k \gamma)\} + d_{n,2} z r^n,$$

$$\Psi_n = h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{a_{n,k} \delta(\mu_k) I_n(\beta_k r) \cos(\mu_k \gamma)\} + d_{n,1} r^n + (1 - \nu) d_{n,2} (r^{n+2} + \chi_n z^2 r^n), \quad (7)$$

$$Q_n = h^2 \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k} I_n(\lambda_k r) \cos(k\pi\gamma) - 2d_{n,2} (r^{n+2} + \chi_n z^2 r^n) r^n,$$

де  $a_{n,k}$  – невідомі комплексні, а  $g_{n,k}$ ,  $d_{n,j}$  – дійсні коефіцієнти;  $\mu_k$ ,  $\operatorname{Re}(\mu_k) > 0$  – нулі рівняння  $\sin(2\mu) + 2\mu = 0$ ,  $I_n(\beta r)$  – модифікована функція Бесселя,  $\delta(\mu) = -\frac{2(1-\nu)}{\mu} - \operatorname{tg}(\mu)$ ,  $\beta_k = \frac{\mu_k}{h}$ ,  $\lambda_k = \frac{k\pi}{h}$ ,  $\chi_n = -\frac{1}{2(n+1)}$ ,

$\gamma = \frac{z}{h}$ ,  $\gamma \in [-1, 1]$  – безрозмірна змінна,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Підставимо у співвідношення [5] подання (7) і знайдемо після відповідних обчислень коефіцієнти розкладу нормальних

$$\begin{aligned} \sigma_{r,n} &= 2G \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re}\{a_{n,k} [\mu_k^2 \chi(\mu_k, \gamma) U_{n,2}(\beta_k r) - 2\nu \mu_k \cos(\mu_k \gamma) I_n(\beta_k r)]\} + \right. \right. \\ &+ g_{n,k} k^2 \pi^2 U_{n,3}(\lambda_k r) \cos(k\pi\gamma) \left. \left. + k_n d_{n,1} r^{n-2} + d_{n,2} [k_{n,1} z^2 r^{n-2} + k_{n,2} r^n] \right\}, \right. \\ \sigma_{z,n} &= -2G \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{a_{n,k} [\mu_k^2 \chi(\mu_k, \gamma) + 2(1-\nu) \mu_k \cos(\mu_k \gamma)] I_n(\beta_k r)\}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi,n} &= 2G \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re}\{a_{n,k} [\mu_k^2 \chi(\mu_k, \gamma) U_{n,5}(\beta_k r) - 2\nu \mu_k \cos(\mu_k \gamma) I_n(\beta_k r)]\} - \right. \right. \\ &- n g_{n,k} k^2 \pi^2 U_{n,3}(\lambda_k r) \cos(k\pi\gamma) \left. \left. - k_n d_{n,1} r^{n-2} + d_{n,2} [k_{n,3} r^n - k_{n,1} z^2 r^{n-2}] \right\} \right. \end{aligned}$$

та дотичних напружень

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi,n} &= G \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -2n \operatorname{Re}[a_{n,k} \mu_k^2 \chi(\mu_k, \gamma) U_{n,3}(\beta_k r)] - \right. \\ &- g_{n,k} k^2 \pi^2 U_{n,4}(\lambda_k r) \cos(k\pi\gamma) \left. + d_{n,2} [k_{n,4} r^n - 2k_{n,1} z^2 r^{n-2}] - 2k_n d_{n,1} r^{n-2} \right\}, \\ \tau_{z\varphi,n} &= G \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -2 \operatorname{Re}[a_{n,k} \psi(\mu_k, \gamma) \frac{nh}{r} I_n(\beta_k r)] + k^2 \pi^2 g_{n,k} \sin(k\pi\gamma) U_{n,1}(\lambda_k r) \right\} \quad (9) \\ \tau_{rz,n} &= G \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re}[a_{n,k} \mu_k \psi(\mu_k, \gamma) U_{n,1}(\beta_k, r)] - \frac{nh}{r} \pi g_{n,k} \sin(k\pi\gamma) I_n(\lambda_k r) \right\}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \chi(\mu_k, \gamma) &= \gamma \sin(\mu_k \gamma) + \delta(\mu_k) \cos(\mu_k \gamma), \\ \psi(\mu_k, \gamma) &= \mu_k \gamma \cos(\mu_k \gamma) - [(1-2\nu) + \mu_k \delta(\mu_k)] \sin(\mu_k \gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{n,1}(\beta_k r) &= \frac{1}{\beta_k} I'_n(\beta_k r) = I_{n-1}(\beta_k r) - \frac{n}{\beta_k r} I_n(\beta_k r); \\
U_{n,2}(\beta_k r) &= \frac{1}{\beta_k^2} I''_n(\beta_k r) = \left[ \frac{n(n+1)}{\beta_k^2 r^2} + 1 \right] I_n(\beta_k r) - \frac{1}{\beta_k r} I_{n-1}(\beta_k r); \\
U_{n,3}(\beta_k r) &= \frac{1}{\beta_k^2} \frac{d}{dr} \frac{I_n(\beta_k r)}{r} = \frac{1}{\beta_k r} I_{n-1}(\beta_k r) - \frac{(n+1)}{\beta_k^2 r^2} I_n(\beta_k r); \\
U_{n,4}(\lambda_k r) &= U_{n,2}(\lambda_k r) - \frac{1}{\lambda_k r} U_{n,1}(\lambda_k r) + \frac{n^2}{\lambda_k^2 r^2} I_n(\lambda_k r); \\
U_{n,5}(\beta_k r) &= \frac{1}{\beta_k r} U_{n,1}(\beta_k r) - n^2 \frac{I_n(\beta_k r)}{\beta_k^2 r^2}, \quad k_n = n(n-1) \\
k_{n,1} &= -n(n-1)\nu, \quad k_{n,2} = (n-2)(1+\nu)/2, \\
k_{n,3} &= -(n+2)(1+\nu)/2, \quad k_{n,4} = -n(1+\nu).
\end{aligned}$$

Внесемо напруження (8), (9) у крайові умови (6) та одержимо систему трьох рівнянь для визначення шуканих невідомих:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} C_{m,k}^n(\gamma) + \sum_{j=1}^2 d_{n,j} E_{m,j}^n(R) = P_m^n(\gamma), \quad m = \overline{1,3}, \quad (10)$$

де

$$c_{n,3k-2} = \operatorname{Re} a_{n,k}, \quad c_{n,3k-1} = \operatorname{Im} a_{n,k}, \quad c_{n,3k} = g_{n,k}; \quad \varepsilon = \frac{h}{R}; \quad \delta_1 = \frac{R}{h};$$

$$C_{m,3k-2}^n = \operatorname{Re} V_{m,k}^n(\gamma), \quad C_{m,3k-1}^n = -\operatorname{Im} V_{m,k}^n(\gamma), \quad C_{m,3k}^n = Y_{m,k}^n(\gamma);$$

$$P_1^n(\gamma) = \frac{\sigma_{g,n}(h\gamma)}{G}, \quad P_2^n(\gamma) = \frac{\tau_{1,n}(h\gamma)}{G}, \quad P_3^n(\gamma) = \frac{\tau_{2,n}(h\gamma)}{G};$$

$$\begin{aligned}
V_{1,k}^n &= 2\{\cos(\theta)[\mu_k^2 \chi(\mu_k, \gamma) U_{n,2}(\beta_k R) - 2\nu \mu_k \cos(\mu_k \gamma) I_n(\beta_k R)] - \\
&\quad - \sin(\theta) \mu_k \psi(\mu_k, \gamma) U_{n,1}(\beta_k R)\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,k}^n &= 2\{\cos(\theta) \mu_k \psi(\mu_k, \gamma) U_{n,1}(\beta_k R) + \\
&\quad + \sin(\theta)[\mu_k^2 \chi(\mu_k, \gamma) + 2(1-\nu) \mu_k \cos(\mu_k \gamma)] I_n(\beta_k R)\};
\end{aligned}$$

$$V_{3,k}^n = 2\{-n \cos(\theta) \mu_k^2 \chi(\mu_k, \gamma) U_{n,3}(\beta_k R) + \frac{hn}{R} \sin(\theta) \psi(\mu_k, \gamma) I_n(\beta_k R)\};$$

$$Y_{1,k}^n = 2nk^2 \pi^2 \cos(\theta) U_{n,3}(\lambda_k R) \cos(k\pi\gamma) + k\pi \frac{nh}{R(z)} \sin(\theta) \sin(k\pi\gamma) I_n(\lambda_k R);$$

$$Y_{2,k}^n = -\pi k \frac{nh}{R(z)} \cos(\theta) \sin(k\pi\gamma) I_n(\lambda_k R);$$

$$Y_{3,k}^n = -2k^2 \pi^2 \cos(\theta) U_{n,4}(\lambda_k R) \cos(k\pi\gamma) + k\pi \sin(\theta) \sin(k\pi\gamma) U_{n,1}(\lambda_k R);$$

$$E_{1,1}^n(R) = 2k_n^1 \cos(\theta) R^{n-2}; \quad E_{2,j}^n = 0, \quad j = \overline{1,2};$$

$$E_{1,2}^n(R) = 2 \cos(\theta) [h^2 k_{n,1}^1 R^{n-2} \gamma^2 + k_{n,2}^1 R^n];$$

$$E_{3,1}^n(R) = -2k_n^1 R^{n-2} \cos(\theta), \quad E_{3,2}^n(R) = [k_{n,4}^1 R^n - 2k_{n,1}^1 h^2 \gamma^2 R^{n-2}] \cos(\theta).$$

У наведених виразах потрібно враховувати, що  $R = R(z)$ .

Задля реалізації числових розрахунків обмежимося у функціях (7) першими  $N$  членами ряду за індексом  $k$ . Відзначимо, що напруження, виражені через ці функції, точно задовольняють рівняння тривимірної теорії пружності і крайові умови (1). Нескінченну систему трьох крайових рівнянь (10) запишемо у скінченному вигляді:

$$\sum_{k=1}^M c_{n,k} A_{m,k}^n(\gamma) = P_m^n(\gamma), \quad m = \overline{1,3}, \quad (11)$$

де  $M = 3N + 2$ ;

$$\begin{aligned} c_{n,k} &= \operatorname{Re} a_{n,k}, & c_{n,k+N} &= \operatorname{Im} a_{n,k}, & c_{n,k+2N} &= g_{n,k}, & k &= \overline{1,N}; \\ c_{n,3N+1} &= d_{n,1}, & c_{n,3N+2} &= d_{n,2}; & A_{m,k}^n &= \operatorname{Re} V_{m,k}^n, & A_{m,k+N}^n &= \operatorname{Im} V_{m,k}^n, \\ A_{m,k+2N}^n &= W_{m,k}^n; & A_{m,3N+j}^n &= E_{m,j}^n(R), & j &= \overline{1,2}, \end{aligned}$$

а інші позначення такі, як в (10).

Зауважимо, що системи крайових рівнянь (11) для кожного значення  $n > 0$  містять три лінійних рівняння зі залежними від  $\gamma \in [-1, 1]$  коефіцієнтами. Їх числове розв'язування для  $n > 0$  подібне, тому для дослідження їх розв'язку та збіжності розглянемо типову систему трьох крайових умов:

$$\sum_{k=1}^M c_k A_k^m(\gamma) = P_m(\gamma), \quad m = \overline{1,3}, \quad \gamma \in [-1, 1], \quad (12)$$

де  $c_k = c_{n,k}$ ,  $A_k^m(\gamma) = A_{m,k}^n(\gamma)$ . Для дослідження випадку, коли  $n = 0$ , можна використати аналітично-числовий підхід [5, 6].

Зауважимо, що через використання скінченної кількості невідомих  $c_k$  рівняння (12) виконуватимуться наближено. Метод знаходження невідомих  $c_k$  ґрунтується на принципі найменших квадратів, який забезпечує найкраще задоволення крайових умов і призводить до знаходження мінімуму квадратичного функціонала

$$\begin{aligned} \Omega_N \{c_1, \dots, c_M\} &\equiv \sum_{m=1}^3 \|f_N^m - P_m\|^2 \equiv \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{m=1}^3 \left\{ \sum_{k=1}^M c_k A_k^m(\gamma) - P_m(\gamma) \right\}^2 \right\} d\gamma \equiv \\ &\equiv \sum_{k,j=1}^M c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^M c_k V_k + P^2, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $\|f(\gamma)\| = \sqrt{\int_{-1}^1 f^2(\gamma) d\gamma}$  – норма в просторі функцій  $L_2[-1, 1]$ ;  $W_{kj} = W_{jk}$ ;

$$\begin{aligned} W_{kj} &= \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^3 A_k^m(\gamma) A_j^m(\gamma) d\gamma; & V_k &= \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^3 A_k^m(\gamma) P_m(\gamma) d\gamma; & k, j &= \overline{1, M}; \\ f_N^m(\gamma) &= \sum_{k=1}^M c_k A_k^m(\gamma), & m &= \overline{1, 3}; & P^2 &= \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^3 P_m(\gamma)^2 d\gamma. \end{aligned}$$

Функціонал (13) дорівнює узагальненій квадратичній формі, мінімум якої позначимо  $F(N)$ , а невідомі коефіцієнти, на яких він досягається, як  $c_k^N$ .

Невідомі  $c_k^N$  визначимо з умови мінімуму узагальненої квадратичної форми від багатьох змінних. Для цього знайдемо частинні похідні

$\frac{\partial \Omega_N \{c_1, \dots, c_M\}}{\partial c_j}$ ,  $j = \overline{1, M}$ , прирівняємо їх до нуля і після перетворень одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^M c_k W_{kj} = V_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (14)$$

Розв'яжемо її і знайдемо змінні  $c_k^N$ ,  $k = \overline{1, M}$ . Підставимо їх у співвідношення (7) та визначимо коефіцієнти функції переміщень, які для вибраної  $n$ -ої гармоніки розкладу відповідно позначимо  $\Phi_n^N$ ,  $Q_n^N$ ,  $\Psi_n^N$ .

**Лема** [5]. *Функція  $F(N)$  є невід'ємна та незростає.*

**Теорема.** *Якщо для заданого  $n$  і довільного  $\varepsilon > 0$  існує таке  $N$ , що  $F(N) < \frac{\varepsilon^2}{4}$ , то існують межі послідовностей*

$$\Phi_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_n^N, \quad \Psi_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_n^N, \quad Q_n = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_n^N,$$

*а виражені через знайдені функції напруження задовольнятимуть крайові умови (10) у метриці  $L_2[-1, 1]$ .*

Доведення теореми аналогічне, як у праці [6].

Відзначимо, що узагальнена квадратична форма (13) вибрана так, що для її мінімуму і побудованого за допомогою коефіцієнтів  $c_k^N$  розв'язку виконуватиметься нерівність

$$\sum_{m=1}^3 \|f_N^m - P_m\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (15)$$

Із доведення теореми випливає, що для заданого  $\varepsilon > 0$ , за виконання умов теореми, нерівності (15) визначають похибку задоволення крайових умов (11) і дають оцінку точності побудованого розв'язку.

**Висновки.** Знаходження розв'язку тривимірної крайової задачі для пружного тіла обертання спрощено до задоволення послідовності незв'язаних між собою систем трьох одновимірних крайових рівнянь. Ці системи рівнянь подібні між собою, а їх коефіцієнти виражено через тригонометричні і бesselеві функції. Розв'язок системи рівнянь для фіксованої гармоніки  $n$  зведено до знаходження мінімуму узагальненої квадратичної форми, яка вибрана так, що крайові умови (11) найточніше задовольнялися заданою скінченною кількістю власних функцій. Суттєвою перевагою запропонованого методу є те, що за числової реалізації контролюється похибка одержаного розв'язку, яку визначає одне число – знайдений мінімум узагальненої квадратичної форми.

1. Байда Э. Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1983. – 232 с.
2. Галеркин Б. Г. К общему решению задач теории упругости в трех измерениях с помощью функций напряжений и перемещений // Докл. АН ССР. Сер. А. – 1931. – № 10. – С. 281–286.
3. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – М.: Высш. шк., 1975. – 526 с.
4. Мелешко В. В., Токовий Ю. В., Барбер Дж. Р. Осесимметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С.120–137.

5. Ревенко В. П. О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 52–65.
6. Ревенко В. П. Дослідження напруженого стану навантаженого скінченного циліндра з використанням власних функцій // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 183–190.
7. Ревенко В. П. Визначення тривимірного напруженого стану квадратної призми, ослабленої круговим отвором, під дією одновісного розтягу // Там само. – 2012. – Вип. 10. – С. 198–204.
8. Сумцов В. С. Про напружений стан циліндра конечної довжини. // Прикл. механіка. – 1958. – **4**, № 4. – С. 433–441.
9. Токовий Ю. В. Зведення тривимірної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра до розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 1. – С. 49–60.
10. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 1979. – 262 с.
11. Chau K. T., Wei X. X. Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I: Analytic solution // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – **37**. – P. 5707–5732.
12. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1904. – **41**, № 8. – P. 129–228.
13. Hata K. Some remarks on the three-dimensional problems concerned with the isotropic and anisotropic elastic solids // Memoirs of the Faculty of Engineering (Hokkaido Univ.). – 1956. – **10**, № 2. – P. 129–177.
14. Okumura I., Onaka T. An expression for solutions to three-dimensional elasticity problems in cylindrical and spherical coordinates // Struct. Eng. / Earthquake Eng. – 1986. – **3**, № 2. – P. 185–194.
15. Robert M., Keer L. M. Stiffness of an elastic circular cylinder of finite length // J. Appl. Mech. – 1988. – **55**, № 3. – P. 560–565.

#### РЕШЕНИЕ ТРЁХМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

*Рассмотрено нагруженное тело вращения, трехмерное напряженно-деформированное состояние которого разделено на основное и самоуравновешенное. Самоуравновешенное представлено в виде ряда по собственным функциям. С помощью разложения в ряды Фурье трёхмерная краевая задача упрощена к исследованию несвязанных между собой систем трех одномерных уравнений. На основании метода наименьших квадратов задачу об определении коэффициентов в полученных рядах сведено к нахождению минимума обобщенных квадратичных форм. Найдены числовые критерии сходимости решения.*

#### SOLUTION OF 3D BOUNDARY VALUE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR BODIE OF ROTATION

*Considered stressed body of rotation, three-dimensional stress-strain state is divided into principal stressed state and self-balanced one. Self-balanced stress state is given in the form of series in eigenfunctions. Using Fourier series expansion in three-dimensional boundary value problem simplified to investigation of systems three 1D equations. Based on the method of least squares problem of determining the coefficients reduced to finding the minimum of the generalized quadratic forms. Criteria for convergence solution are found.*