

А. Є. Давидок

МОДЕЛЮВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРНОГО ВЗАЄМОВПЛИВУ ШАРУВАТИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА ПОТІК МАСИ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНІЙ СМУЗІ ЗА БЕТА-РОЗПОДІЛУ ФАЗ

Досліджено випадковий дифузійний потік з урахуванням парного взаємовпливу включень у двофазній стохастично неоднорідній багат шаровій смузі з областю найбільш ймовірного їх розташування в околі дії джерела маси (частковий випадок ймовірного β -розподілу). Встановлено, що зі збільшенням приведенного коефіцієнта дифузії ефект парного взаємовпливу шарів нівелюється, а з ростом об'ємної частки включень – підсилюється.

Під час дослідження та моделювання процесів масоперенесення важливо враховувати вплив внутрішньої неоднорідної структури середовища. Проте часто характеристики внутрішніх неоднорідностей у тілі (розміри, кількість та просторове розташування включень) невідомі, тому такі структури, а також і фізичні процеси в них розглядають як випадкові.

Для математичного опису дифузійних, теплових і механічних процесів у багатофазних тілах часто застосовують методи «гомогенізації» неоднорідних структур [2, 14], які ґрунтуються на припущеннях, що характерні відстані зміни фізичних параметрів значно більші за характерні розміри неоднорідностей у тілі, а також, що неоднорідності у тілі розподілені рівномірно [7]. У праці [5] для врахування багатомасштабності деяких природних утворень під час опису стаціонарних процесів фільтрації у стохастично неоднорідному середовищі запропоновано ставити у відповідність крайовій задачі інтегро-диференціальне рівняння. Є. Я. Чапля та О. Ю. Чернуха [8] опрацювали підхід до математичного опису процесів масоперенесення у випадково неоднорідних структурах, розміри неоднорідностей в яких можуть бути сумірними з розмірами тіла. Згідно з цим підходом крайову задачу масоперенесення зводять до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння, а розв'язок знаходять у вигляді ряду Неймана, зручного для процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз [8–11]. Проте під час виконання цієї процедури зазвичай обмежуються двома першими доданками цього ряду [9–11], а отже, потребують оцінки парний, потрійний тощо взаємовпливи випадкових включень на процеси перенесення.

Нижче вивчено випадкові дифузійні потоки у двофазній стохастично неоднорідній смузі з урахуванням парного взаємовпливу включень на основі моделі, для якої рівняння перенесення записано для функції потоку маси, а крайові умови сформульовано як для потоку, так і концентрації домішкової речовини.

Формулювання задачі. Нехай у смузі товщини z_0 , що складається з випадково розташованих n_0 підшарів фази $j = 0$ (матриці) та n_1 підшарів фази $j = 1$ (включень), дифундує домішка. Припускаємо, що координати розташування включень невідомі, а область найймовірнішого їх розташування зосереджена біля поверхні $z = 0$, де діє джерело маси (рис. 1). Така випадкова структура описується частковим випадком ймовірного β -розподілу включень:

$$f(z) = \begin{cases} \beta (1 - z/z_0)^{\beta-1}, & z \in [0; z_0], \\ 0, & z \notin [0; z_0], \end{cases} \quad (1)$$

де β – ступінь вільності розподілу [4].

Вважаємо, що коефіцієнти дифузії є сталими у межах кожної з фаз.

Рівняння дифузії записуємо для випадкової функції потоку $J(z, t)$ [9]

$$\frac{\partial J(z, t)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2 J(z, t)}{\partial z^2} \quad (2)$$

за крайових умов першого роду

$$\begin{aligned} J(z, t)|_{t=0} &= 0; \\ J(z, t)|_{z=0} &= J_* \equiv \text{const}; \quad J(z, t)|_{z=z_0} = F(t), \end{aligned} \quad (3)$$

де $D(z) = \begin{cases} D_0, & z \in \Omega_0; \\ D_1, & z \in \Omega_1, \end{cases}$ – випадковий коефіцієнт дифузії, Ω_j – багатозв'язна

область j -ої фази ($j = 0, 1$), $F(t)$ – функція часу, яку треба додатково визначити [10]. Початкова умова, тобто перша з умов (3), означає, що в нульовий момент часу концентрація домішки $C(z, t)$ у тілі стала $C(z, t)|_{t=0} = C_*$.

Надалі розглянемо випадок, коли $C_* \neq 0$.

Розв'язання вихідної крайової задачі. Трактуючи неоднорідність структури тіла як внутрішні джерела [9], вихідну задачу (2), (3) зводимо до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння з випадковим ядром [11]:

$$J(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J(z', t') dz' dt', \quad (4)$$

де $L_s(z) = \sum_{i=1}^{n_1} (D_1 - D_0) \eta_{i1}(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\eta_{i1}(z)$ – випадкова «функція структури»

[8], $J_0(z, t)$ – розв'язок однорідної крайової задачі, $G(z, z', t, t')$ – детермінована функція Гріна [9].

З розв'язку однорідної задачі отримаємо вираз для функції $F(t)$:

$$F(t) \equiv J_0(z, t)|_{z=z_0} = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left(J_* / \xi_n + (-1)^n C_* D_0 \right).$$

Розв'язок інтегро-диференціального рівняння (4) знайдемо методом послідовних ітерацій у вигляді ряду Неймана [10]:

$$\begin{aligned} J(z, t) &= J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J_0(z', t') dz' dt' + \\ &+ \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G(z', z'', t', t'') L_s(z'') J_0(z'', t'') dz'' dt'' dz' dt' + \\ &+ \int_0^t \int_0^{z_0} G L_s \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G L_s \int_0^{t''} \int_0^{z_0} G L_s J_0 dz'' dt'' dz' dt' + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Перший член ряду визначає потік $J_0(z, t)$ в однорідному середовищі з характеристиками матриці, другий є сумою збурень потоку, що виникають за вміщення у тіло включень з характеристиками, відмінними від характеристик матриці. Третій доданок ряду відповідає збуренням, що виникають, якщо в середовищі з коефіцієнтом дифузії матриці поміщає по чергово по два включення з іншими характеристиками, тобто описує ефекти парного взаємовпливу включень на потік маси і т.п. [8].

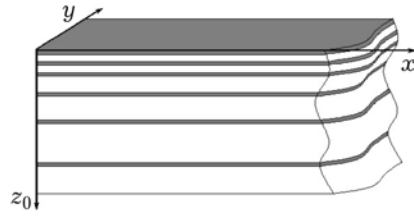


Рис. 1. Смуга з приповерхневим розташуванням включень.

Усреднення дифузійного потоку за ансамблем конфігурацій фаз.

Випадковий потік у двофазній смузі з рівномірним розподілом фаз за нульової початкової концентрації з урахуванням парного взаємовпливу включень досліджено у праці [3]. Проте через присутність у тілі дифундувальної речовини в нульовий момент часу збільшується величина потоку [10], тому для цього випадку слід вивчити ефект парного взаємовпливу підшарів, так само, як і за значної концентрації включень біля джерела маси. Тому розглядаємо варіант β -розподілу (1) і усереднюємо (5) за ансамблем конфігурацій фаз. Для цього обмежимося трьома першими членами ряду Неймана (5), вважаючи, що характерна товщина включень h_1 , а випадковою координатою, яка характеризує їх положення, є координата верхньої межі прошарку:

$$\begin{aligned} \langle J(z, t) \rangle \approx \langle J_0(z, t) \rangle + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \langle L_s(z') \rangle J_0(z', t') dz' dt' + \\ + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \langle L_s(z') \rangle \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G(z', z'', t', t'') L_s(z'') J_0(z'', t'') dz'' dt'' \rangle dz' dt'. \quad (6) \end{aligned}$$

Врахуємо, що $\langle J_0(z, t) \rangle = J_0(z, t)$, $\langle L_s(z') \rangle = (D_1 - D_0) \sum_{i=1}^{n_j} \langle \eta_{i1}(z') \rangle \partial^2 / \partial z'^2$, а

$$\langle L_s(z') G(z', z'', t', t'') L_s(z'') \rangle = (D_1 - D_0)^2 \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \eta_{j1}(z'') \rangle \frac{\partial^2 G}{\partial z'^2} \frac{\partial^2}{\partial z''^2}. \quad (7)$$

Усреднюючи вирази $\langle \eta_{i1}(z') \rangle$ та $\langle \eta_{i1}(z') \eta_{j1}(z'') \rangle$, одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \rangle = \frac{v_1}{h_1 z_0^{\beta-2}} \begin{cases} z_0^\beta - (z_0 - z')^\beta, & z' \leq h_1 \\ (z_0 + h_1 - z')^\beta - (z_0 - z')^\beta, & z' \geq h_1 \end{cases}, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \eta_{j1}(z'') \rangle = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \rangle \langle \eta_{j1}(z'') \rangle + n_1^2 \psi_\eta(z', z''), \quad (9)$$

де $\psi_\eta(z', z'')$ – функція кореляції фаз, яку визначають за формулою [1]

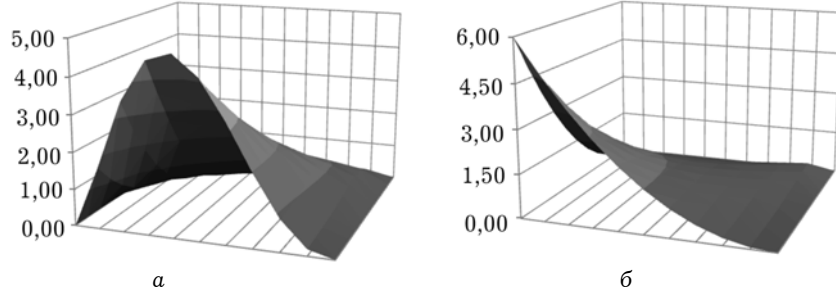
$$\psi_\eta(z', z'') = \int_0^{z_0 - h_1} \int_0^{z_0 - h_1} z' z'' w_2(z', z'') dz' dz''. \quad (10)$$

Тут $w_2(z', z'')$ – двовимірний спільний розподіл випадкових величин z' і z'' . Для означення функції $w_2(z', z'')$ використали формулу густини імовірнісного двовимірного β -розподілу [13]:

$$\begin{aligned} w_2(z', z'') = \frac{\Gamma(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}{\Gamma(\beta_1) \Gamma(\beta_2) \Gamma(\beta_3)} \left(\frac{z'}{z_0} \right)^{\beta_1 - 1} \left(\frac{z''}{z_0} \right)^{\beta_2 - 1} \left(1 - \frac{z'}{z_0} \right)^{\beta_2 + \beta_3 - 1} \times \\ \times \left(1 - \frac{z''}{z_0} \right)^{\beta_1 + \beta_3 - 1} \left(1 - \frac{z' z''}{z_0^2} \right)^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}, \quad (11) \end{aligned}$$

де $\Gamma(x)$ – гама-функція, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$, $0 \leq z', z'' \leq z_0$.

На рис. 2 проілюстровані поверхні густини двовимірного розподілу $w_2(z', z'')$, порашовані за формулою (11) для ступенів вільності $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = \beta_3 = 2,5$ (рис. 2а) та $\beta_1 = \beta_2 = 1$; $\beta_3 = 2$ (рис. 2б).


 Рис. 2. Густина двовимірного β -розподілу.

Підставляючи у співвідношення (6) вирази (7)–(10) та використовуючи зв'язок $n_1^2 = (v_1 z_0)^2 / h_1^2$, одержимо формулу для визначення потоку маси домішкової речовини у двофазній багатошаровій смузі з ймовірним приповерхневим розташуванням включень, що враховує парний взаємовплив шарів:

$$\begin{aligned}
 \langle J(z, t) \rangle_{conf} = & J_0(z, t) + \frac{(D_1 - D_0)v_1}{z_0^{\beta-2}h_1} \int_0^t \int_0^{h_1} A_1(z')G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' + \\
 & + \int_{h_1}^{z_0} A_2(z')G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' \Big] dt' + (D_1 - D_0)^2 \left\{ \frac{v_1^2}{h_1^2 z_0^{2\beta-4}} \int_0^t \int_0^{h_1} A_1(z')G(z, z', t, t') \times \right. \\
 & \times \int_0^{t'} \int_0^{h_1} A_1(z'') \frac{\partial^2 G(z', z'', t', t'')}{\partial z'^2} \frac{\partial^2 J_0(z'', t'')}{\partial z''^2} dz'' + \\
 & \left. + \int_{h_1}^{z_0} A_2(z'') \frac{\partial^2 G(z', z'', t', t'')}{\partial z'^2} \frac{\partial^2 J_0(z'', t'')}{\partial z''^2} dz'' \right) dt'' dz' + \\
 & + \int_{h_1}^{z_0} A_2(z')G(z, z', t, t') \int_0^{t'} \int_0^{h_1} A_1(z'') \frac{\partial^2 G(z', z'', t', t'')}{\partial z'^2} \frac{\partial^2 J_0(z'', t'')}{\partial z''^2} dz'' + \\
 & + \int_{h_1}^{z_0} A_2(z'') \frac{\partial^2 G(z', z'', t', t'')}{\partial z'^2} \frac{\partial^2 J_0(z'', t'')}{\partial z''^2} dz'' \Big] dt'' dz' + \left(\frac{v_1 z_0}{h_1} \right)^2 \times \\
 & \times \int_0^t \int_0^{z_0} \int_0^{t'} \int_0^{z_0} \Psi_{\eta} G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 G(z', z'', t', t'')}{\partial z'^2} \frac{\partial^2 J_0(z'', t'')}{\partial z''^2} dz'' dt'' dz' dt' \Big\}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Тут $A_1(z) = z_0^{\beta} - (z_0 - z)^{\beta}$, $A_2(z) = (z_0 + h_1 - z)^{\beta} - (z_0 - z)^{\beta}$.

Підставимо у (12) вирази для функції Гріна та дифузійного потоку домішки в однорідному шарі:

$$\frac{1}{J_*} \langle J(z, t) \rangle_{conf} = J_1(z, t) + J_2(z, t) + J_3(z, t), \quad (13)$$

$$\text{де } J_1(z, t) = 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left(\frac{1}{\xi_n} + (-1)^n \frac{D_0 C_*}{J_*} \right) \sin(\xi_n z);$$

$$J_2(z, t) = -\frac{2(D_1 - D_0)v_1}{D_0 z_0^{\beta}} \frac{1}{h_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk} \left(1 + (-1)^n \frac{D_0 C_*}{J_*} \xi_n \right) \left(e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right) F_{kn} \sin(y_k z);$$

$$J_3(z, t) = -\frac{2(D_1 - D_0)^2}{z_0^{2\beta-3} D_0 \pi^2} \left(\frac{v_1}{h_1}\right)^2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sin(y_k z) \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_{nk} y_k^2 \left(t e^{-D_0 y_k^2 t} - \frac{e^{-D_0 y_k^2 t} - e^{-D_0 \xi_n^2 t}}{D_0 (\xi_n^2 - y_k^2)} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left(1 + (-1)^n \frac{D_0 C_*}{J_*} \xi_n \right) \left(F_{kn} \left[z_0^\beta \left(h_1 - \frac{\sin 2y_k h_1}{2y_k} \right) + B_f \right] + (-1)^{k+n} 2\Psi_\eta \bar{c}_{nk} z_0^{2\beta-1} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nl} y_l^2 \left(\frac{e^{-D_0 y_k^2 t} - e^{-D_0 y_l^2 t}}{D_0 (y_l^2 - y_k^2)} - \frac{e^{-D_0 y_k^2 t} - e^{-D_0 \xi_n^2 t}}{D_0 (\xi_n^2 - y_k^2)} \right) \left(1 + (-1)^n \frac{D_0 C_*}{J_*} \xi_n \right) F_{ln} \tilde{F}_{kn} \right\}.$$

$$\text{Тут } \xi_n = \frac{\pi(2n-1)}{2z_0}, \quad y_k = \frac{k\pi}{z_0}, \quad c_{nk} = \frac{\xi_n}{\xi_n^2 - y_k^2}, \quad \bar{c}_{nk} = \frac{y_k}{y_k^2 - \xi_n^2}, \quad x_{kn}^\pm = y_k \pm \xi_n,$$

$$F_{kn} = a_{kn} z_0^\beta + \bar{f}(h_1, z_0 + h_1, x_{kn}^-) - \bar{f}(h_1, z_0 + h_1, x_{kn}^+) - \bar{f}(0, z_0, x_{kn}^-) + \bar{f}(0, z_0, x_{kn}^+),$$

$$B_f = \bar{f}(0, z_0, 2y_k) - \bar{f}(0, z_0, 0) + \bar{f}(h_1, z_0 + h_1, 0) - \bar{f}(h_1, z_0 + h_1, 2y_k), \quad y_{kn}^\pm = y_k \pm y_l,$$

$$\bar{f}(a, c, p) = \int_a^{z_0} (c-z)^\beta \cos(pz) dz, \quad a_{kn} = \sin(x_{kn}^- h_1) / x_{kn}^- - \sin(x_{kn}^+ h_1) / x_{kn}^+,$$

$$c_{nl} = c_{nk}|_{k=l}, \quad F_{ln} = F_{kn}|_{k=l}, \quad \tilde{F}_{kn} = F_{kn}|_{x_{kn}^\pm = y_{kn}^\pm}.$$

Формула (13) є розрахунковою для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз потоку у шаруватій смузї з ймовірним приповерхневим розташуванням включень, що враховує парний взаємовплив шарів.

Числовий аналіз третього доданка ряду Неймана. У праці [11] досліджено вплив параметрів випадкової структури тіла на усереднений дифузійний потік, обчислений за двома першими доданками (13). Проаналізуємо тут кількісну та якісну поведінку третього доданка усередненого ряду Неймана $J_3(z, t)$, що описує ефект парного взаємовпливу шарів. Числові розрахунки виконували за безрозмірних змінних [6] $\eta = z/z_0$, $\tau = D_0 t/z_0^2$, а ряди у формулі (13) обчислювали з точністю 10^{-9} . Як базові прийняли параметри $\tau = 0,1$; $D_1 / D_0 = 0,01$; $v_1 = 0,5$; $h_1 = 0,01$; $C_* / J_* = 0,1$; $\beta = \beta_3 = 2$.

У таблиці наведено розрахункові дані усередненого дифузійного потоку $\langle J(\eta, \tau) \rangle / J_*$ для доданків $J_1(\eta, \tau)$, $J_2(\eta, \tau)$, $J_3(\eta, \tau)$ на безрозмірних глибинах η . Розбиття інтервалу $\eta \in [0;1]$ виконали з кроком 0,1.

Розрахункові дані складових усередненого потоку в шарі з ймовірною приповерхневою концентрацією включень

Вхідні дані:	$\tau = 0.1; D_1 / D_0 = 0,01; v_1 = 0,5;$			$\tau = 0.2; D_1 / D_0 = 0,03; v_1 = 0,6;$		
	$h_1 = 0,01; C_* / J_* = 0,1; \beta = 2$			$h_1 = 0,02; C_* / J_* = 0,3; \beta = 3$		
η	$J_1(\eta, \tau)$	$J_2(\eta, \tau)$	$J_3(\eta, \tau)$	$J_1(\eta, \tau)$	$J_2(\eta, \tau)$	$J_3(\eta, \tau)$
1	2	3	4	5	6	7
0,0	1,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000
0,1	0,837968	-0,072504	-0,001685	0,930226	-0,051441	-0,002962
0,2	0,685923	-0,131522	-0,002795	0,863229	-0,095056	-0,005045
0,3	0,552279	-0,168246	-0,003118	0,801486	-0,125629	-0,005955
0,4	0,442646	-0,179987	-0,002821	0,746936	-0,140879	-0,005896
0,5	0,359202	-0,169585	-0,002571	0,700837	-0,141016	-0,005536
0,6	0,300754	-0,143409	-0,001671	0,663754	-0,127948	-0,004249
0,7	0,263510	-0,108769	-0,001231	0,635673	-0,104449	-0,003166

1	2	3	4	5	6	7
0,8	0,242309	-0,071614	-0,000870	0,616198	-0,073483	-0,002085
0,9	0,232061	-0,035197	-0,000473	0,604803	-0,037842	-0,001035
1,0	0,229091	0,000000	0,000000	0,601058	0,000000	0,000000

Зазначимо, що для поданих у таблиці даних доданок $J_3(\eta, \tau)$ на 1–2 порядки менший, ніж абсолютні значення потоку в однорідному шарі $J_1(\eta, \tau)$ і доданок $J_2(\eta, \tau)$, який описує збурення потоку, спричинені поодинокими включеннями. Проте параметри задачі можуть змінюватись у широких межах, тому вивчимо їхній вплив на кількісну та якісну поведінку функції $J_3(\eta, \tau)$.

На рис. 3 подані розподіли функції $|J_3(\eta, \tau)|$ у моменти часу $\tau = 0,1; 0,15; 0,2; 0,3$; (криві 1–4 на рис. 3а) та для різних значень $D_1 / D_0 = 0,001; 0,01; 0,05; 0,1$ (криві 1–4 на рис. 3б). На рис. 4 проілюстровано залежність абсолютного значення третього доданка усередненого ряду Неймана від об’ємної частки включень $v_1 = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ (криві 1–5 на рис. 4а) та від значень ступенів вільності β -розподілу $\beta = \beta_3 = 2; 2,5; 3; 3,5$ (криві 1–4 на рис. 4б). Збільшенню параметра β відповідає ущільнення прошарків в околі поверхні $z = 0$. На рис. 5 побудовані графіки функції $|J_3(\eta, \tau)|$ для різних значень відношення $C_* / J_* = 0,1; 0,2; 0,4; 0,6$ (криві 1–4, рис. 5а) та товщини прошарків $h_1 = 0,001; 0,01; 0,05$ (криві 1–3, рис. 5б).

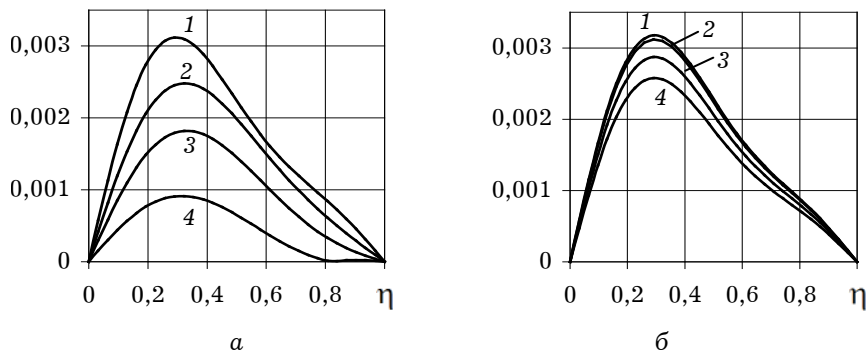


Рис. 3. Розподіли функції $|J_3(\eta, \tau)|$ для різних моментів часу (а) та різних значень D_1 / D_0 (б).

Зазначимо, що зі зростанням часу процесу та відношення D_1 / D_0 третій доданок усередненого ряду Неймана зменшується (рис. 3). Протилежна ситуація спостерігається зі зміною значень параметрів $v_1, h_1, C_* / J_*, \beta$: з їх збільшенням абсолютне значення $J_3(\eta, \tau)$ зростає (рис. 4 і 5).

Ефект парного взаємовпливу шарів є найвідчутнішим для великих значень об’ємної частки включень v_1 (крива 5 на рис. 4а) та великих значень ступенів вільності β -розподілу (крива 4 на рис. 4б), тобто за значного ущільнення включень у приповерхневій області. Максимальні значення, які досягає функція $|J_3(\eta, \tau)|$, наприклад, для малих значень D_1 / D_0 , великих β та C_* / J_* , на два порядки менші, ніж абсолютні значення доданків $|J_1(\eta, \tau)|$ та $|J_2(\eta, \tau)|$. Оскільки кількісні дослідження виконані для широкого

інтервалу параметрів задачі, то можна стверджувати, що ефектом парного взаємовпливу шарів під час вивчення випадкових потоків маси у шаруватих тілах можна знехтувати.

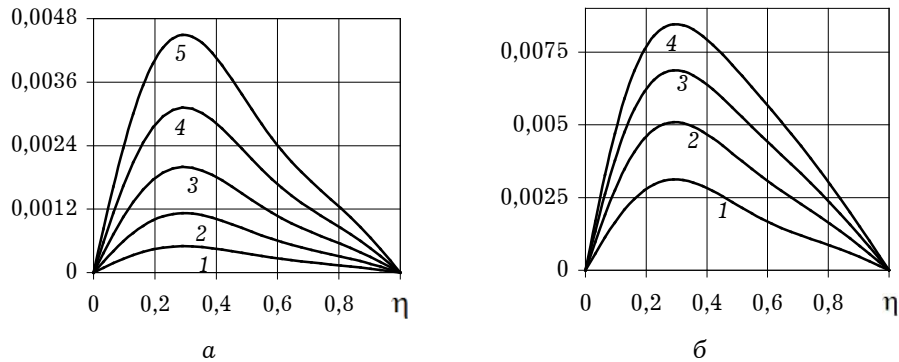


Рис. 4. Розподіли функції $|J_3(\eta, \tau)|$ для різних значень об'ємної частки включення (а) та ступенів вільності β -розподілу (б).

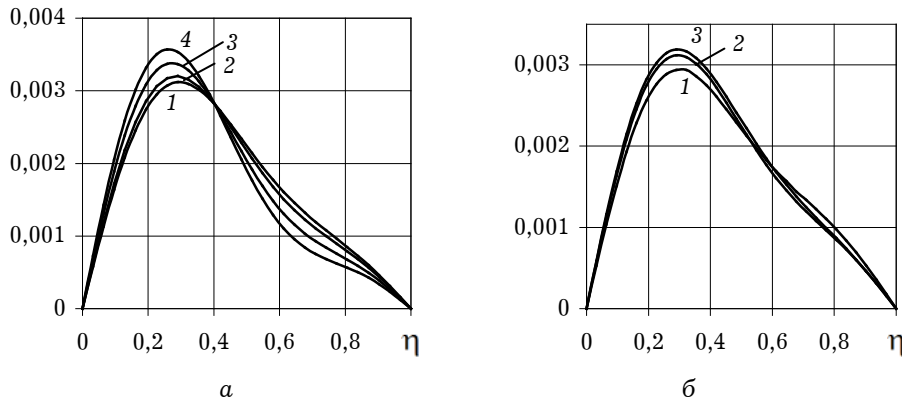


Рис. 5. Розподіли функції $|J_3(\eta, \tau)|$ для різних значень відношення C^*/J^* (а) та різних значень товщини включень (б).

Висновки. Отже, найбільший ефект від парного взаємовпливу прошарків спостерігається за великих значень об'ємної частки включень та ступенів вільності β -розподілу, тобто за ущільнення прошарків до поверхні $z = 0$. При цьому зі збільшенням часу дифузії вплив третього доданка ряду Неймана зменшується за всіх значень параметрів задачі. Проте навіть для найбільших значень абсолютна величина третього доданка ряду Неймана на декілька порядків менша, ніж першого і другого.

Розв'язки задач переносу у випадково неоднорідних тілах побудовано у вигляді розкладу в ряд Неймана в околі розв'язку однорідної крайової задачі з характеристиками однієї з фаз, тому, як правило, накладають умову, що об'ємна частка цієї фази превалює. Числовий аналіз третього члена ряду Неймана, який описує парний взаємовплив підшарів, виявив, що умова наявності в тілі превалюючої фази не є обов'язковою, тобто досліджуючи потоки у випадково неоднорідних шаруватих тілах, достатньо врахувати два перші члени ряду Неймана як для сумірних об'ємних часток фаз, так і за наявності в структурі превалюючої фази.

1. Білушак Ю., Чапля Є., Чернуха О. Двоточкова функція кореляції та дисперсія випадкового дифузійного поля концентрації в смугі з рівномірним розподілом шаруватих включень // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 16. – С. 7–22.

2. Гамбин Б., Назаренко Л. В., Телега Е. Стохастическая гомогенизация уравнений стационарной термоупругости // Доп. НАН України. – 2002. – № 10. – С. 31–44.
3. Давидок А. Є. Моделювання випадкових потоків маси у двофазній шаруватій смузї за рівномірного розподілу фаз з урахуванням парного взаємовпливу шарів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 19. – С. 43–52.
4. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятности и математической статистике. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
5. Кузнецов О.Л., Каракин А.В., Кухаренко Ю.А., Кухаренко П.Ю. Фильтрация жидкостей в многомасштабных пористых средах // Геоинформатика. – 2001. – № 4. – С. 11–15.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1978. – 480 с.
7. Хорошун Л.П., Солтанов Н.С. Термоупругость двухкомпонентных смесей. – К.: Наук. думка, 1984. – 112 с.
8. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – К.: Наук. думка, 2009. – 302 с.
9. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю., Давидок А.Є. Математичне моделювання дифузійних потоків у випадково неоднорідній шаруватій смузї // Доп. НАН України. – 2012. – № 11 – С. 40–46.
10. Чернуха О. Ю., Давидок А. Є. Моделювання дифузійних потоків у двофазній багатошаровій випадково неоднорідній смузї за рівномірного розподілу фаз // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2013. – Вип. 11. – С. 142–150.
11. Чернуха О. Ю., Давидок А. Є. Моделювання дифузійного потоку у смузї з ймовірним приповерхневим розташуванням шаруватих включень // Моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 65. – С.145–156.
12. Chaplya Y. Y., Chernukha O. Y., Bilushchak Y. I. Contact initial boundary value problem of the diffusion of admixture particles in a two-phase stochastically inhomogeneous stratified strip // J. of Math. Sci. – 2012. – **183**, № 1. – P. 83–99.
13. Jacobs R., Bekker A., Human S. Bivariate Beta Distributions and Beyond//Int. Statistical Inst.: Proc. 58th World Statistical Congress (Session CPS009). – Dublin, 2011. – P. 3984–3990.
14. Matysiak S. J., Mieszkowski R. On homogenization of diffusion processes in microperiodic stratified bodies // Int. J. Heat and Mass Trans. – 1999. – **26**. – P. 539–547.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРНОГО ВЗАИМОВЛИЯНИЯ СЛОИСТЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА ПОТОК МАССЫ В СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЕ ПРИ БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИИ ФАЗ

Исследован случайный диффузионный поток с учетом парного взаимовлияния включений в двухфазной стохастически неоднородной многослойной полосе с областью наиболее вероятного их расположения в окрестности действия источника массы (частный случай вероятностного β -распределения). Установлено, что при увеличении приведенного коэффициента диффузии эффект парного взаимовлияния слоев нивелируется, а с ростом объемной доли включений – усиливается.

MODELING AND INVESTIGATION OF PAIRWISE COUPLING EFFECT OF LAYER INCLUSIONS ON THE DIFFUSION FLOW IN A RANDOMLY NONHOMOGENEOUS STRIP UNDER THE BETA DISTRIBUTION OF PHASES

A random diffusion flow is investigated taking into account the pairwise coupling effect of sublayers for diffusion processes in a two-phase stochastically nonhomogeneous multilayered strip, in which a domain of the most probable disposition of inclusions is located in the neighborhood of the mass source action (the partial case of the probable beta distribution). It is estimated that increase of the reduced diffusion coefficient levels up the pairwise coupling effect of sublayers, whereas increase of the inclusions volume fraction reinforces the effect.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів
Центр математичного моделювання ІППММ
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.09.14