

ВПЛИВ ТЕРТЯ НА ГІСТЕРЕЗИС ЗА ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ПОЗДОВЖНІМ ЗСУВОМ МАСИВУ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

Побудовано точний розв'язок антиплоскої задачі для неоднорідного біматеріалу з міжфазною тріщиною, що перебуває під нормальним стиском та циклічним навантаженням зосередженою силою в поздовжньому напрямку. Методом функцій стрибка задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння для стрибків зміщень і напружень у зонах проковзування з тертям. Проаналізовано вплив параметрів навантажування і тертя на розміри цих зон. Виявлено гістерезисну поведінку стрибків зміщень і напружень у цих областях.

Вступ. Контактні явища з урахуванням тертя – одна з найактуальніших проблем у машинобудуванні, гірничій справі [1–5] тощо. Контактуюванню берегів тріщин із урахуванням контактної взаємодії вивчено недостатньо. Найбільші здобутки у цьому напрямі належать теорії дослідження тріщин на межі поділу двох середовищ, яка широко застосовує модель локального контакту берегів безпосередньо біля вістря [2, 6–8] для усунення фізично некоректної осцилювальної особливості. Вплив сил тертя на контактні напруження між півплощинами із неглибокими гладкими виїмками на поверхні вивчено раніше [9, 10]. Тут варто звернути увагу також на праці [11–16].

Нижче запропонована методика дослідження впливу тертя під час циклічного деформування зосередженою силою за типом поздовжнього зсуву (антиплоска задача) тіла із стиснутою тріщиною на формування зон проковзування та розсіювання енергії.

Формулювання задачі. Розглянемо безмежний ізотропний масив, що складається з двох півпросторів з пружними сталими E_k, ν_k, G_k ($k = 1, 2$), притиснутих до межі поділу нормальними напруженнями $\sigma_{yy} = -p < 0$. Вивчатимемо напружено-деформований стан (НДС) перерізу тіла площиною xOy , перпендикулярною до напрямку z його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини S_k ($k = 1, 2$), а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис $L \sim x$ (рис. 1).

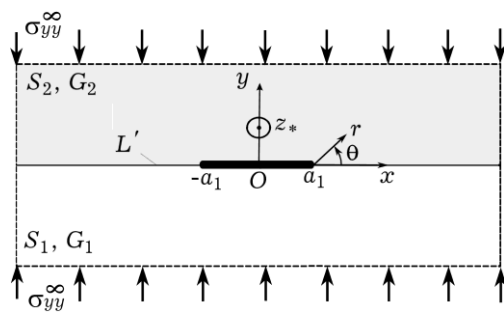


Рис. 1. Силова й геометрична схеми задачі поздовжнього зсуву.

Масив циклічно навантажено знакозмінною зосередженою силою $Q(t)$ у точці $z^* = id \in S_2$, орієнтованою уздовж осі Oz так, що її дія викликає у тілі квазістатичний антиплоский НДС.

Застосування під час розв'язування задачі однакового традиційного позначення для осі z та комплексної змінної $z = x + iy$ не повинно викликати непорозумінь.

Півпростори уздовж лінії L взаємодіють згідно із законами дотикового механічного контакту, під яким розумітимемо узагальнений ідеальний механічний контакт, за якого тіла

контактують механічно ідеально до моменту, коли може початися взаємне проковзування їх поверхонь [17, 18].

Таким чином, отримуємо задачу для поздовжнього зсуву від дії зусиль $Q(t)$ з додатковим впливом стискувальних нормальних напружень, а також сил тертя на межі поділу матеріалів, які на тих поверхнях контакту (лінії L перерізу), де відбувається проковзування матеріалів, досягають свого максимально можливого значення і можуть там спричинити тепловиділення, розсіяння енергії, спрацювання тощо.

Таку зону проковзування (тріщину з контактуючими (налягальними) берегами) на кожному кроці циклу можна моделювати стрибком компонент векторів напружень і переміщень на $L'_{(n)}$ [19, 20]:

$$[\Xi]_L \equiv \Xi^- - \Xi^+ = \mathbf{f} \quad \text{на} \quad L'_{(n)} \rightarrow L'_{(n)} = [-a_{(n)}; a_{(n)}], \quad (1)$$

де $\Xi_{(n)}(z, t) = \{\sigma_{yz}, \partial w / \partial x\}_{(n)}(z, t)$ – вектор стану; $\mathbf{f}_{(n)}(x, t) = \{f_{3(n)}, f_{6(n)}\}(x, t)$

– вектор стрибка, причому $x \in L'_{(n)}$; n у круглих дужках – номер кроку циклу; t – момент часу, як формальний монотонно зростальний параметр, пов'язаний із змінюваністю сили. Тут і далі використано позначення: $[\varphi]_L = \varphi(x, -0) - \varphi(x, +0)$, $\langle \varphi \rangle_L = \varphi(x, -0) + \varphi(x, +0)$; індекси "+" та "-" відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії L .

З урахуванням закону Гука вираз (1) дає:

$$\begin{aligned} [\sigma_{yz}]_{L'_{(n)}} &\equiv \sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_{3(n)}(x, t), \\ \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{L'_{(n)}} &\equiv \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \left[\frac{\sigma_{xz}}{G} \right]_{L'_{(n)}} \equiv \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_{6(n)}(x, t), \quad x \in L'_{(n)}; \\ f_{3(n)}(x, t) &= f_{6(n)}(x, t) = 0, \quad \text{якщо} \quad x \notin L'_{(n)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Умови дотикового третього контакту в стиснутій тріщині передбачають, що з досягненням дотичними напруженнями $\sigma_{yz(n)}$ на ділянці $L'_{(n)}$ певного критичного значення τ_{yz}^{\max} починається проковзування, причому цей поріг дотичні напруження не можуть перевищити. Обмежуючись при цьому класичним законом тертя Амонтона [1, 4, 5], розглянемо варіант контактної задачі, який стверджує, що у всіх точках ділянки $L'_{(n)}$ дотичні напруження (зусилля тертя)

$$\sigma_{yz(n)}^{\pm} = -\text{sgn}([w]_{(n)})\tau_{yz}^{\max}, \quad \tau_{yz}^{\max} = -\alpha\sigma_{yy}, \quad (\sigma_{yy} < 0, |w^- - w^+| \neq 0), \quad (3)$$

де α – коефіцієнт тертя ковзання. Поза ділянкою $L'_{(n)}$ дотичні напруження у місці відсутності проковзування не перевищують максимально допустимі

$$|\sigma_{yz(n)}| \leq \tau_{yz}^{\max}, \quad (\sigma_{yy} = -p < 0, w^- - w^+ = 0) \quad (4)$$

і взаємного переміщення берегів (стрибка зміщень) немає. Знак (напрямок дії) дотичних напружень вибираємо залежно від знака різниці переміщень $[w]_{(n)}$ на $L'_{(n)}$ у розглядуваній точці.

З допомогою закону тертя у класичному вигляді (3) вдається спростити крайові умови для основної задачі, однак вибір складніших моделей тертя [3, 5, 7], у тому числі з урахуванням спрацювання, не ускладнить принципово процесу розв'язування.

Розв'язування задачі. Перший крок. Використовуючи методики п. 20.2 [19], можна отримати залежності, згідно з якими компоненти тензора напружень і похідні вектора переміщень на лінії L необмеженої площини S , а також всередині неї такі:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(1)}^{\pm}(x, t) &= \mp p_k f_{3(1)}(x, t) - C g_{6(1)}(x, t) + \sigma_{yz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ \sigma_{xz(1)}^{\pm}(x, t) &= \mp C f_{6(1)}(x, t) + p_k g_{3(1)}(x, t) + \sigma_{xz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ g_{r(n)}(z, t) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{L'_n} \frac{f_{r(n)}(x, t) dx}{x - z}, \quad p_k = G_k p, \quad C = G_1 G_2 p, \quad p = \frac{1}{G_1 + G_2}, \\ \sigma_{yz(1)}(z, t) + i \sigma_{xz(1)}(z, t) &= \sigma_{yz(1)}^0(z, t) + i \sigma_{xz(1)}^0(z, t) + i p_k g_{3(1)}(z, t) - C g_{6(1)}(z, t), \\ (z \in S_k; r = 3, 6; k = 1, 2; j = 3 - k). \end{aligned} \quad (5)$$

Верхній індекс “+” стосується значення $k = 2$; “-“ - $k = 1$. Величини з індексом “0” зверху характеризують відповідні у суцільному тілі без модельних неоднорідностей (тріщин) за певного зовнішнього навантаження (однорідний розв'язок):

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^0(z, t) + i \sigma_{xz}^0(z, t) &= i \{ M(z, t) + (p_k - p_j) M^*(z, t) \}, \\ M(z, t) &= -\frac{Q(t)}{2\pi(z - z_*)}, \quad M^*(z, t) = (2 - k)M(z, t) + (k - 1)\bar{M}(z, t), \quad (z \in S_k, k = 1, 2). \end{aligned} \quad (6)$$

Використовуючи (5), (6) та умову (3) наявності сили тертя на деяких ділянках $L'_{(n)}$ тріщин за взаємного зсуву берегів у напрямі осі z , отримаємо з умов (2) систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР)

$$\begin{cases} f_{3(1)}(x, t) = 0, \\ g_{6(1)}(x, t) = F_{6(1)}(x, t) = \frac{1}{2C} \left(\langle \sigma_{yz(1)}^0(x, t) \rangle + 2 \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \tau_{yz}^{\max} \right), \end{cases} \quad (7)$$

розв'язком якої з огляду на геометричну і силову симетрію задачі і припущення про єдину ділянку проковзування $L'_{(1)} = [-a_{(1)}; a_{(1)}]$ є:

$$\begin{aligned} f_{6(1)}(x, t) &= \frac{1}{\pi C \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} \left\{ \pi \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \tau_{yz}^{\max} x + p_1 Q(t) \operatorname{Im} \frac{\sqrt{z_*^2 - a_{(1)}^2}}{x - z_*} \right\} = \\ &= \frac{x}{C \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} \left(-\tau_{yz}^{\max} + \frac{p_1 Q(t) \sqrt{a_{(1)}^2 + d^2}}{\pi(x^2 + d^2)} \right), \quad (x \in [-a_{(1)}; a_{(1)}]). \end{aligned} \quad (8)$$

Тут

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{yz(1)}^0(x, t) + i \sigma_{xz(1)}^0(x, t) \rangle &= i \{ (3p_1 + p_2) M(x, t) + (p_2 - p_1) \bar{M}(x, t) \}, \\ \langle \sigma_{yz(1)}^0(x, t) \rangle &= -4p_1 \operatorname{Im} M(x, t), \end{aligned} \quad (9)$$

а під функцією $\sqrt{z^2 - a^2}$ розуміють таку її вітку, що коли $z \rightarrow \infty$, задовольняється умова $\sqrt{z^2 - a^2}/z \rightarrow 1$.

З (8), враховуючи, що зі зростанням навантаження $\operatorname{sgn}[w]_{(1)} = -1$, інтегруванням можна отримати вираз для стрибка переміщень $[w]_{(1)}$:

$$\begin{aligned} [w]_{(1)}(x, t) &= \int_{-a_{(1)}}^x f_{6(1)}(x, t) dx = -\frac{1}{C} \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \tau_{yz}^{\max} \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2} + \\ &+ \frac{p_1 Q(t)}{\pi C} \operatorname{Im} I(x, a_{(1)}, z_*) = \frac{p_1 Q(t)}{2\pi C} \ln \frac{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2} - \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2} + \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}} + \\ &+ \frac{1}{C} \tau_{yz}^{\max} \sqrt{a_{(1)}^2 - x^2}, \quad (|x| \leq a_{(1)}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{де } I(x, a, z) \equiv \sqrt{z^2 - a^2} \int_{-a}^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}(x - z)} = i \ln \frac{a(z - x)}{a^2 - xz - i\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (11)$$

Якщо ввести в розгляд узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) виразом

$$K_{31} + iK_{32} = \lim_{r \rightarrow 0(0=0)} \sqrt{\pi r} (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}), \quad (12)$$

то нескладно отримати аналітичний вираз для КІН для тріщини $L'_{(1)} = [-a_{(1)}; a_{(1)}]$ із зоною проковзування:

$$\begin{aligned} K_{32}(t) = 0, \quad K_{31(1)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi a_{(1)}}} \int_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}} \sqrt{\frac{a_{(1)} \pm x}{a_{(1)} \mp x}} \left(\langle \sigma_{yz(1)}^0(x, t) \rangle + 2 \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \tau_{yz}^{\max} \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi a_{(1)}}} \left\{ \pi a_{(1)} \operatorname{sgn}[w]_{(1)} \tau_{yz}^{\max} - p_1 Q(t) \operatorname{Im} \frac{a_{(1)} \pm z_*}{\sqrt{z_*^2 - a_{(1)}^2}} \right\} = \\ &= -\sqrt{\pi a_{(1)}} \tau_{yz}^{\max} + \sqrt{\frac{a_{(1)}}{\pi}} \frac{p_1 Q(t)}{\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Звернемося до питання про розмір зони проковзування $a_{(1)}$. Можливі два варіанти: штучно обмежити можливі (допустимі) її розміри або дозволити проковзуванню вільно відбуватися вздовж усієї лінії контакту півплощин, щойно напруження досягне там критичних значень. Для апіорі заданого розміру тріщини у разі достатньо великих зусиль розмір тріщини обмежуватиме зону проковзування і тоді на краях тріщини виникатимуть сингулярні напруження, а відтак, існуватимуть ненульові КІН. За відсутності обмеження для визначення розміру межі зони проковзування цілком можливо використати умову рівності нулю КІН [6] і з виразу (13) отримати умову можливості проковзування та розмір зони проковзування:

$$Q(t) \geq Q_{(1)}^* = \frac{\pi d \tau_{yz}^{\max}}{p_1}, \quad a_1(t) = \sqrt{\frac{p_1^2 Q(t)^2}{\pi^2 \tau_{yz}^{\max 2}} - d^2} = d \sqrt{\frac{Q(t)^2}{Q_{(1)}^{*2}} - 1}. \quad (14)$$

Тут і далі $Q_{(n)}^*$ – критичне значення сили початку проковзування на кроці n , що досягається у певний момент часу $t_{(n)}^*$ ($t_{(n)}^* \leq t_{(n)}$), де $t_{(n)}$ – момент завершення кроку циклу. При цьому, якщо визначені з цієї умови межі зони проковзування перевищуватимуть попередньо окреслені допустимі межі, то слід брати до уваги останні.

Маючи аналітичний розв'язок для всіх параметрів НДС і, зокрема, для КІН, можна легко визначати межі зони та роботу сил тертя на ділянці $L'_{(1)}$ порушення контакту також і для довільного навантаження. Цю роботу, а отже, і енергію, розсіяну на $L'_{(1)}$ за початковий крок зміни зовнішнього навантаження від нуля до максимального (остаточного на цьому кроці) значення, обчислюємо за допомогою інтеграла

$$W_{(1)}^d(t) = - \int_{-a_{(1)}}^{a_{(1)}} \tau_{yz}^{\max} |[w]_{(1)} dx = \frac{\pi a_{(1)}^2 \tau_{yz}^{\max 2}}{2C} - \frac{\tau_{yz}^{\max}}{C} p_1 Q(t) \left(\sqrt{a_{(1)}^2 + d^2} - d \right). \quad (15)$$

За однакових матеріалів півпросторів ($G_1 = G_2 = G$) у формулах для розглянутих випадків навантаження треба вважати $C = G/2$, $p_1 = p_2 = 1/2$.

За гладкого контакту між півпросторами (нульовий коефіцієнт тертя) у згаданих формулах треба покласти $\tau_{yz}^{\max} = 0$, пам'ятаючи, що розмір зони

проковзування повинен бути апріорі обмежений заданим розміром тріщини, бо інакше зона проковзування буде необмежено великою.

Якщо вважати, що проковзування з тертям відбувається без попереднього обмеження розміру зони проковзування, то, підставляючи формули (14) у формулу (15), отримаємо максимальні значення розсіяння енергії:

$$W_{(1)}^d(t) = -\frac{1}{2\pi C} (p_1 Q(t) - \pi d \tau_{yz}^{\max})^2 = -\frac{p_1^2}{2\pi C} (Q(t) - Q_{(1)}^*). \quad (16)$$

Перший (початковий) крок завершується в момент часу $t_{(1)}$ за досягнення діючою силою деякого максимального на кроці значення $Q(t_{(1)}) = \beta_{(1)} Q_{(1)}^*$ ($\beta_{(1)} > 1$).

Загальна схема розв'язування задачі. Наступні кроки. Отримані на першому (початковому) кроці в момент його завершення $t_{(1)}$ значення НДС масиву на другому кроці матимуть зміст залишкових. Тому, вважаючи, що на кожному наступному кроці знак прикладеної сили змінюється на протилежний, а відносно її значення монотонно зростає від 0 до максимального за модулем, застосуємо для розв'язку таку методику.

Вважаємо, що формулювання задачі на другому кроці відрізняється від такого на попередньому лише наявністю вже заданого стрибка переміщень та напружень, спричинених попереднім кроком. Тоді подання поля напружень має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t) = & \sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)}) + \sigma_{yz(2)}^0(z, t) + \\ & + i\sigma_{xz(2)}^0(z, t) + ip_k g_{3(2)}(z, t) - Cg_{6(2)}(z, t), \quad (z \in S_k; k = 1, 2; j = 3 - k). \end{aligned} \quad (17)$$

Напруження та переміщення повинні задовольняти крайові умови (3) на $L'_{(2)}$ з урахуванням напряду навантаження. Тоді з урахуванням (17) можна сформулювати локальну задачу для другого кроку

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(2)}(z, t) + i\sigma_{xz(2)}(z, t) = & \{ \sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t) \} - \\ & - \{ \sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)}) \}, \quad (z \in S_k; k = 1, 2; j = 3 - k) \end{aligned}$$

з крайовими умовами

$$\sigma_{yz(2)}^\pm(x, t) = -\operatorname{sgn}([w]_{(2)}) \tau_{yz}^{\max} - \sigma_{yz(1)}^\pm(x, t_{(1)}), \quad (18)$$

яка, як і для попереднього кроку, породжує СІР

$$\begin{aligned} f_{3(2)}(x, t) = 0, \quad g_{6(2)}(x, t) = F_{6(2)}(x, t) = \\ = \frac{1}{2C} \{ \langle \sigma_{yz(2)}^0(x, t) \rangle + 2\tau_{yz}^{\max} (\operatorname{sgn}[w]_{(2)} - \operatorname{sgn}[w]_{(1)}) \} \end{aligned} \quad (19)$$

для визначення локальних (щодо досягнутого у момент часу $t_{(1)}$ НДС) стрибків переміщень та напружень від локального (для цього кроку) навантаження:

$$Q_{(2)}(t) = Q(t) - Q_{(1)}(t_{(1)}), \quad (t > t_{(1)}). \quad (20)$$

Отриманий аналогічно до першого кроку розв'язок (19) з урахуванням того, що зі зміною знака навантаження, тобто $Q_{(2)}(t) < 0$, маємо $\operatorname{sgn}[w]_{(2)} = 1$ і основні чинники задачі мають вигляд

$$f_{6(2)}(x, t) = \frac{x}{C\sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}} \left(2\tau_{yz}^{\max} + \frac{p_1 Q_{(2)}(t) \sqrt{a_{(2)}^2 + d^2}}{\pi(x^2 + d^2)} \right), \quad (x \in [-a_{(2)}; a_{(2)}]); \quad (21)$$

$$[w]_{(2)}(x, t) = \int_{-a_{(2)}}^x f_{6(2)}(x, t) dx = \frac{p_1 Q_{(2)}(t)}{2\pi C} \ln \frac{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2} - \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}}{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2} + \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}} - \frac{2}{C} \tau_{yz}^{\max} \sqrt{a_{(2)}^2 - x^2}, \quad (|x| \leq a_{(2)}); \quad (22)$$

$$K_{32}(t) = 0, \quad K_{31(2)}(t) = 2\sqrt{\pi a_{(2)}} \tau_{yz}^{\max} + \sqrt{\frac{a_{(2)}}{\pi}} \frac{p_1 Q_{(2)}(t)}{\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2}}. \quad (23)$$

З виразу (23) отримуємо розмір нової зони проковзування та умову, коли проковзування починається знову:

$$a_2(t) = \sqrt{\frac{p_1^2 Q_{(2)}(t)^2}{4\pi^2 \tau_{yz}^{\max 2}} - d^2}, \quad Q(t) \geq \frac{2\pi d \tau_{yz}^{\max}}{p_1} = Q_{(2)}^* = 2Q_{(1)}^*. \quad (24)$$

Розсіяння енергії на другому кроці

$$W_{(2)}^d(t) = - \int_{-a_{(2)}}^{a_{(2)}} \tau_{yz}^{\max} |[w]_{(2)}| dx = \frac{\pi a_{(2)}^2 \tau_{yz}^{\max 2}}{2C} - \frac{\tau_{yz}^{\max}}{C} p_1 Q_{(2)}(t) (\sqrt{a_{(2)}^2 + d^2} - d). \quad (25)$$

Міркуючи так само, можна отримати локальний розв'язок для кожного наступного кроку циклу навантаження.

Цікаво, що згідно з (24) критичне навантаження другого кроку (розвантаження) удвічі більше, ніж першого (навантаження), а на всіх подальших кроках воно вже є таким самим: $Q_{(n)}^* = 2Q_{(1)}^*$ ($n \geq 2$).

Підсумкові значення і стрибка переміщень, і розсіяної енергії після n -го кроку визначаємо як суперпозицію

$$[w](x, t) = \sum_{n=1}^N [w]_{(n)}(x, t_{(n)}) + [w]_{(n+1)}(x, t), \quad (|x| \leq a_{(n+1)}; \quad t > t_{(n)}); \quad (26)$$

$$W^d(t) = \sum_{n=1}^N W_{(n)}^d(t_{(n)}) + W_{(n+1)}^d(t), \quad (t > t_{(n)}). \quad (27)$$

Числовий аналіз. На рис. 2 побудована залежність розміру зони проковзування $a_{(n)}/d$ на n -му кроці від інтенсивності прикладеної сили

$$\beta_{(n)} = Q_{(n)}(t) / Q_{(1)}^*.$$

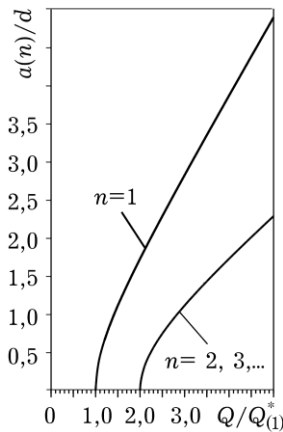


Рис. 2. Залежність розміру зони проковзування від параметрів навантаження упродовж циклу.

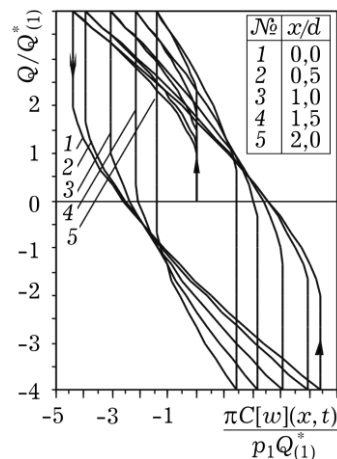


Рис. 3. Гістерезисні залежності стрибка переміщень у повному циклі навантаження.

Зауважимо, що при $\beta_{(n)} \leq 1$ проковзування відсутнє завжди, а при $1 \leq \beta_{(n)} \leq 2$ відбудеться лише на першому (початковому) кроці. Зона проковзування монотонно зростає синхронно зі збільшенням навантаження.

Рис. 3 ілюструє гістерезисну поведінку сумарного стрибка переміщень $\pi C[w](x, t) / p_1 Q_{(1)}^*$ у різних точках x/d зони проковзування залежно від інтенсивності навантаження у циклі $4Q_{(1)}^* \rightarrow -4Q_{(1)}^* \rightarrow 4Q_{(1)}^* \rightarrow -4Q_{(1)}^* \rightarrow \dots$. Тут добре помітно, що така поведінка притаманна стрибку переміщень не лише в центрі зони проковзування, а й у всіх інших її точках.

Висновки. Отримано точний розв'язок антиплоскої задачі для біматеріалу з міжфазною тріщиною з контактуючими берегами, де може відбуватися проковзування з тертям. Цей розв'язок дає можливість отримати явні вирази для переміщень, КІН та дисипації енергії. Для врахування циклічності навантаження запропонована багатокрокова методика розв'язування, в основі якої лежить ідея про врахування на кожному кроці навантажування НДС від попереднього кроку як залишкового. Вивчено залежність розміру зони контакту на різних стадіях навантаження від його параметрів. Досліджено критичні значення навантаження для визначення моменту появи проковзування.

Числово проаналізовано вплив тертя на зміну розміру зони проковзування, обчислено дисипацію енергії для розглянутого випадку навантажування. Досліджено, що дисипація енергії стає інтенсивнішою з наближенням точки прикладання сили до межі поділу матеріалів.

1. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
2. Дундурс Дж., Комниноу М. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитных материалов. – 1979. – № 3. – С. 387–396.
3. Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З. Умови контактної взаємодії (огляд) // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 110–125.
4. Hills D. A, Nowell D., Sackfield A. Mechanics of elastic contact. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 1993. – 238 p.
5. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
6. Черепанов Г. П. О развитии трещин в сжатых телах // Прикл. математика и механика. – 1966. – 30, № 1. – С. 82–93.
7. Comninou M., Schmueser D., and Dundurs J. Frictional slip between a layer and a substrate caused by a normal load // Int. J. Engn. Sci. – 1980. – 18. – P. 131–137.
8. Herrmann K. P., Loboda V. V. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Archive of App. Mech. – 1999. – 69. – P. 317–335.
9. Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є. Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 101–109.
10. Мартыняк Р. М., Криштафович А. А. Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с локальными поверхностными выемками // Трение и износ. – 2000. – 21, № 4. – С. 350–360.
11. Архипенко К. М., Кривий О. Ф. Міжфазна балка при різних типах контактної взаємодії з неоднорідною анізотропною площиною // Машинознавство. – 2008. – № 3 (129). – С. 16–21
12. Острык В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
13. Кундрат М. М., Сулим Г. Т. Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним включенням при симетричному та антисиметричному навантаженнях / Мат. проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2003. – С. 322–324.

14. Семенов Б. Н. Контакт с трением двух упругих полуплоскостей с жестким включением на границе контакта // Тез. докл. 4 Всесоюз. конф. «Смеш. задачи мех. деформируемого тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). – Одесса, 1989. – Ч. 2. – С. 85.
15. Sekine H. Mechanics of debonding along the surfaces of dispersed flat inclusions in composite materials (A model of debonding along the surface of a flat inclusion) // Trans. ASME: J. of Appl. Mech. – 1982. – **48A**, № 11 (435). – P. 1415–1420.
16. Weertman J., Lin I.-H., Thomson R. Double slip plane crack model // Acta met. – 1983. – **31**, № 4. – P. 473–482.
17. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – 946 с.
18. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пискозуб Л. Г. Модели тонкого включения в условиях его идеального и неидеального контактного взаимодействия с окружающим материалом // VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010 (Минск, 25 окт. – 1 нояб. 2010 г.): в 2 ч. – Минск: БГУ, 2010. – Ч. 2. – С. 399–404.
19. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
20. Piskozub J. Z., Sulim G. T. Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions // J. of Eng. Mat., Special Issue Thermomechanics. – 2008. – **61**. – P. 315–337.

ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ НА ГИСТЕРЕЗИС ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГОМ МАССИВА С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Построено точное решение антиплоской задачи для неоднородного биматериала с трещиной на границе раздела, подверженного нормальной нагрузке и циклическому нагружению сосредоточенной силой в продольном направлении. Методом функций скачка задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения для скачков смещений и напряжений в зонах проскальзывания с трением. Проанализировано влияние параметров нагружения и трения на размеры этих зон. Отмечено гистерезисное поведение скачков напряжений и перемещений в этих областях.

INFLUENCE OF FRICTION ON HYSTERESIS UNDER CYCLING LOADING OF SOLID WITH INTERFACE CRACK BY THE LONGITUDINAL SHEAR

We construct the exact solution of the anti-plane problem for an inhomogeneous bimaterial with the interface crack exposed to the normal load and cyclic loading by a concentrated force in the longitudinal direction. Using jump function method the problem is reduced to the solution of singular integral equations for the jumps of displacements and stresses in areas with sliding friction. We analyze the effect of friction and loading parameters on the size of these zones. Hysteretic behavior of the jumps of stresses and displacements in these areas is observed.

¹Українська академія друкарства, Львів

²Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

³Луцький нац. техн. ун-т, Луцьк