УДК 512.552.13

Б. М. Кузніцька[1], О. В. Домша[2]

КІЛЬЦЯ РОЗДІЛЬНОГО РАНГУ 1

Введено поняття кільця роздільного рангу 1. Встановлено, що локально роздільне кільце є кільцем роздільного рангу 1, а також те, що комутативна область Безу роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників.

О. Хелмер ввів адекватне кільце [3] як новий клас кілець елементарних дільників без умов обмеженості на ланцюги ідеалів. Зокрема, комутативне кільце називають адекватним, якщо для довільних елементів $a, b \in R, a \neq 0$ існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, $rR + bR = R$, $s'R + bR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s. У праці [7] зауважили, що тоді $rR + sR = R$ і це дало можливість ввести в розгляд роздільні кільця як узагальнення адекватних. Більше того, згідно з результатами [6], роздільні області Безу − це не що інше, як комутативні області Безу, скінченні гомоморфні образи яких є кільцями з властивістю заміни.

Водночас вводять [1] поняття локально регулярних кілець як класу кілець, таких що є узагальненням локальних і регулярних кілець. Зокрема, комутативне кільце R називають *локально регулярним*, якщо для довільного елемента $a \in R$ хоча би один з елементів a або $1 - a$ є регулярним у сенсі Неймана.

Відмітимо, що згідно з [5] комутативне регулярне кільце є адекватним.

Нижче введено поняття роздільного елемента, а також локально роздільного кільця як такого кільця R, що для довільного $a \in R$ хоча би один елемент a або $1 - a$ є роздільним. Встановлено існування таких кілець. Введено поняття кільця роздільного рангу 1 і показано, що локально роздільне кільце є кільцем роздільного рангу 1. Як наслідок, згідно з [6], отримано, що комутативна область роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників. Введемо всі необхідні означення і факти. Під кільцем розуміємо комутативне кільце з одиницею і $1 \neq 0$, а під кільцем Безу − комутативне кільце, в якому довільний скінченно породжений ідеал є головним. Елемент $a \in R$ називають адекватним, якщо для довільного елемента $b \in R$ існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, де $rR + bR = R$, $s'R + bR \neq R$ для такогож довільного елемента $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$. Елемент $a \in R$ називають роздільним, якщо для таких довільних елементів $b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$, існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, де $rR + bR = R$, $sR + cR = R$ і $rR + sR = R$ [7]. Відмітимо, що згідно з [6] маємо такий результат.

Теорема 1. Нехай R − комутативна область Безу. Ненульовий елемент $a \in R$ є роздільним тоді і лише тоді, коли фактор-кільце R / aR є кільцем з властивістю заміни.

Нагадаємо, що кільце R є кільцем з властивістю заміни, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент $e \in R$, що $e \in aR$ і $1 - e \in (1 - a)R$ [5]. Кільце R називають напіврегулярним, якщо $R / J(R)$ є регулярним кільцем і ідемпотенти піднімаються по модулю радикала Джекобсона $J(R)$. Відомо, що напіврегулярне кільце R є кільцем з властивістю заміни [5]. В праці [6] встановлено такий результат.

Теорема 2. Нехай R − комутативна область Безу і $a \in R \setminus \{0\}$. Елемент a є адекватним тоді і лише тоді, коли фактор-кільце R / aR є напіврегулярним.

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. − 2014. − Вип. 12. − С. 49−51.

Звідси як наслідок теореми 1 і 2 маємо такий результат.

Теорема 3. У комутативній області Безу довільний адекватний елемент є роздільним. Більше того, в довільному комутативному кільці він також роздільний.

Твердження 1. Нехай R − комутативне кільце Безу і a − адекватний елемент у кільці R. Тоді a є роздільним елементом.

Д о в е д е н н я . Нехай $aR + bR + cR = R$. Згідно з означенням адекватного елемента, для елемента a існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, де $rR + bR = R$, $s'R + bR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s. Тоді, якщо $sR + cR = tR$, де $tR \neq R$, маємо $tR + bR = kR \neq R$, що неможливо, оскільки $aR \subset sR \subset kR$, $bR \subset kR$, $cR \subset tR \subset kR$ і водночас $aR + bR + cR = R$. Отже, $sR + cR = R$. Якщо б $rR + sR = nR \neq R$, тоді б згідно з означенням адекватного елемента $a \in R$ мали б, з одного боку, $nR + bR = R$, оскільки $rR \subset nR$, а з іншого − $nR + bR \neq R$, оскільки $sR \subset nR \neq R$. Це неможливо, отже, $rR + sR = R$, а значить, a є роздільним елементом кільця R. Твердження доведено.

Твердження 2. Нехай R − комутативна область Безу і a − роздільний елемент. Тоді довільний дільник роздільного елемента є роздільним.

Д о в е д е н н я . Нехай $a = dx$ для деяких елементів $d, x \in R$. Нехай $aR + bR + cR = R$. Згідно з означенням елемента a існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, де $rR + bR = R$, $sR + cR = R$, $rR + sR = R$. Нехай $dR + rR = hR$. Тоді для деяких елементів $d_0, r_0 \in R$ маємо рівність $d = hd_0$, $r = hr_0$, причому $d_0R + r_0R = R$. Звідси отримаємо рівність $d_0u + r_0v = 1$ для деяких елементів $u, v \in R$. Тоді з рівності $a = hd_0x = hr_0s$ випливає, що виконуються рівності $d_0x = r_0s$ та $sd_0u + sr_0v = s$. А звідси $d_0(su + xv) = s$, тобто існує включення $sR \subset d_0R$. Звідси $d_0R + cR = R$, $hR + bR = R$ і очевидно, що $d_0R + hR = R$, оскільки $rR \subset hR$, $sR \subset d_0R$ і $rR + sR = R$. Твердження доведено.

Відмітимо, що очевидними прикладами роздільних елементів можуть послужити одиниці кільця і факторіальні елементи.

Означення 1. Комутативне кільце R називають *локально роздільним*, якщо для довільного елемента $a \in R$ хоча би один елемент a або $1 - a$ є роздільним.

Очевидними прикладами локально роздільного кільця є локальне і роздільне кільця. Нагадаємо, що роздільне кільце − комутативне, в якому довільний елемент є роздільним [7].

Твердження 3. Локально регулярне кільце є локально роздільним.

Д о в е д е н н я . Згідно з [2] довільний регулярний елемент комутативного кільця є адекватним елементом. Твердження 1 завершує доведення твердження.

Згідно з твердженням 1, аналогічно маємо такий результат.

Твердження 4. Адекватне кільце є локально роздільним.

Приклад Хенріксена [4], зокрема, кільце $R = \{z_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots \mid z_0 \in \mathbf{Z}, a_i \in \mathbf{Q}\}$. є прикладом локально роздільного кільця, яке не є адекватним. Відмітимо, що в цьому кільці для довільного ряду $f(x) \in R$ хоча би один з двох рядів $f(x)$ і $1 - f(x)$ є факторіальним, а отже, роздільним.

Для комутативних областей Безу маємо такий результат.

Твердження 5. Комутативна область Безу є локально роздільною тоді і лише тоді, коли з умови $aR + bR = R$ випливає, що a або b є роздільним елементом.

Д о в е д е н н я . Необхідність, згідно з означенням локально роздільного кільця, очевидна.

Нехай $aR + bR = R$, тоді $au + bv = 1$. Згідно з означенням локально роздільного кільця, маємо, що au або $bv = 1 - au$ є роздільним елементом. Твердження 2 свідчить, що a або b є роздільними елементами кільця R. Твердження доведено.

У праці [6] введено поняття кільця акуратного рангу 1. Частковим його випадком, згідно з теоремою 1, служить кільце роздільного рангу 1 [6].

Означення 2. Комутативне кільце R називають *кільцем роздільного рангу 1*, якщо для таких елементів $a, b \in R$, що $aR + bR = R$, існує такий елемент $t \in R$, що $a + bt$ – роздільний елемент.

Твердження 6. Локально роздільна область Безу є кільцем роздільного рангу 1.

Д о в е д е н н я . Нехай R – локально роздільна область Безу і $aR + bR = R$. Якщо a – роздільний елемент, то очевидно, що $a + b0$ – роздільний елемент. Якщо ж a не є роздільним елементом, то тоді з очевидної умови $aR + (a + b)R = R$ і означення локально роздільного кільця випливає, що $a + b$ – роздільний елемент. Твердження доведено.

Згідно з теоремою 1 і відомими результатами отримаємо такий результат.

Теорема 4. Комутативна область Безу роздільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників.

1. *Contessa M.* On PM-rings // Commun. Algebra. – 1982. – **10.** – P. 93–108.
2. *Gillman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82.** – P. 362–365.
3. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, № 2. – P. 225–236.
4. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divsor rings // Michigan Math. J. – 1955–1956. – **3.** – P. 159–163.
5. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – **128.** – P. 269–278.
6. *Zabavsky B. V.* Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings // Mat. Stud. – 2014. – **41.** – P. 101–108.
7. *Zabavsky B. V., Kuznitska B. M.* Avoidable rings // Int. Algebraic Conf. dedicated 100^{th} anniversary of L. A. Kaluzhin. – Kyiv, July 7–12, – 2014. – P. 50.

КОЛЬЦА РАЗДЕЛЬНОГО РАНГА 1

Введено понятие кольца раздельного ранга 1. Показано, что локально раздельное кольцо является кольцом раздельного ранга 1, а также выявлено, что коммутативная область Безу раздельного ранга 1 является кольцом элементарных делителей.

AVOIDABLE RINGS OF RANGE 1

This paper introduces the concept of avoidable rings of range 1. It is shown that locally avoidable ring is a ring of avoidable range 1, and we obtain that the commutative Bezout domain of avoidable range 1 is an elementary divisor ring.

[1]Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів
[2]Львів. регіон. ін-т держ. управління
Нац. академії держ. управління
при Президентові України, Львів-Брюховичі

Одержано
03.10.14