

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ П'ЯТИШАРОВОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

*На основі моделі термочутливого тіла сформульовано математичну модель та визначено стаціонарний розподіл температури в п'ятишаровому безмежному порожнистому циліндрі, в другому та четвертому шарах якого є розподілені за параболічним законом джерела тепла, на внутрішній обмежувальній поверхні задано сталий потік тепла, а через зовнішню здійснюється конвективний теплообмін із навколишнім середовищем. Знайдено компоненти напружено-деформованого стану та досліджено вплив залежності теплових та механічних характеристик матеріалів складових від температури на розподіл температури і напружень.*

Знання про компоненти напружено-деформованого стану елементів конструкцій, коли задане силове та теплове навантаження, лежать в основі їх розрахунку на міцність і надійність. За їх експлуатації в умовах високотемпературного нагрівання адекватно визначають температурне поле та спричинений ним напружено-деформований стан за моделлю термочутливого тіла [3, 4], в якій враховують залежність теплових та механічних характеристик, а також параметрів теплообміну (коефіцієнтів теплообміну, ступенів чорноти поверхонь) від температури.

Детальний огляд досліджень з визначення термопружного стану термочутливих тіл подано в праці [3]. Математичні моделі термопружного стану багат шарових тіл, в яких враховано залежність термомеханічних характеристик матеріалів шарів від температури, а також нові методи їх розв'язування подано в працях [1–7]. Про важливість урахування термочутливості матеріалів складових під час визначення розподілів температури і напружень свідчать публікації [2–6].

Тут на основі моделі термочутливого тіла сформульовано математичну модель та визначено стаціонарний розподіл температури в елементі мікроелектроніки, який моделюють п'ятискладовим порожнистим термочутливим циліндром з наявними в другому та четвертому шарах джерелами тепла, коли на внутрішній циліндричній поверхні заданий потік тепла, а через зовнішню відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем. Визначено компоненти напружено-деформованого стану. Досліджено вплив термочутливості матеріалів складових циліндра на розподіли температури та компонент напружено-деформованого стану.

**Формулювання задачі.** Розглянемо безмежний по осі термочутливий порожнистий циліндр, який складається із п'яти шарів, виготовлених із різних матеріалів. Циліндр нагрівається наявними у другому та четвертому шарах джерелами тепла, які розподілені за параболічним законом

$$W^{(2,4)}(r) = -\frac{4W_0^{(2,4)}}{(r_{3,5} - r_{2,4})^2}(r - r_{2,4})(r - r_{3,5}).$$

На внутрішній обмежувальній поверхні  $r = r_1$  заданий сталий потік тепла  $q$ , а через зовнішню  $r = r_6$  циліндр конвективно обмінюється теплом із середовищем, температура якого  $t = t_{\text{зов}}$ . Коефіцієнт теплообміну через цю поверхню сталий і рівний  $\alpha$ . На межі дотику сусідніх шарів  $r = \{r_2, r_3, r_4, r_5\}$  виконуються умови ідеального теплового контакту. За таких умов необхідно визначити розподіл температури та компонент напружено-деформованого стану циліндра.

**Математична модель для визначення розподілу температури.** Вона містить:

- рівняння теплопровідності для шарів

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{dr} \right) = W^{(i)}(r) (\delta_{i2} + \delta_{i4}), \quad r_i < r < r_{i+1}, \quad i = \overline{1,5}; \quad (1)$$

- крайові умови на внутрішній та зовнішній обмежувальних поверхнях

$$\lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{dt_1}{dr} \Big|_{r=r_1} = q, \quad \left[ \lambda_t^{(5)}(t_5) \frac{dt_5}{dr} + \alpha(t_5 - t_{\text{зов}}) \right]_{r=r_6} = 0; \quad (2)$$

- умови контакту на поверхнях дотику складових циліндра

$$t_i \Big|_{r=r_{i+1}} = t_{i+1} \Big|_{r=r_{i+1}}, \quad i = \overline{1,4}, \quad (3)$$

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{dr} \Big|_{r=r_{i+1}} = \lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1}) \frac{dt_{i+1}}{dr} \Big|_{r=r_{i+1}}, \quad i = \overline{1,4}, \quad (4)$$

де  $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$  – символ Кронекера.

Математична модель (1)–(4) нелінійна внаслідок залежностей коефіцієнтів теплопровідності  $\lambda_t^{(i)}(t_i)$  ( $i = \overline{1,5}$ ) від температури, які у довідниковій літературі переважно задають у вигляді таблиць. Для теоретичних досліджень зручно мати залежності коефіцієнтів теплопровідності у вигляді явних аналітичних виразів  $\lambda_t^{(i)} = \lambda_t^{(i)}(t)$ . Щоб їх отримати, таблично задану функцію апроксимують деякою функціональною залежністю. Тоді для визначення невідомих параметрів використовують, наприклад, метод найменших квадратів.

Нехай коефіцієнти теплопровідності задані у діапазоні  $[t_p; t_k]$ . Надалі описуватимемо їх доволі поширеними лінійними залежностями  $\lambda_t^{(i)} = a_i t_i + b_i$ . Використовуючи метод найменших квадратів, невідомі параметри  $a_i$  та  $b_i$  підбираємо так, щоб сума квадратів різниць їх експериментальних і теоретичних значень була найменша.

Подамо коефіцієнти теплопровідності складових циліндра у вигляді  $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} \lambda_t^{(i)*}(T_i)$ , де величини  $\lambda_{t_0}^{(i)}$  мають розмірність коефіцієнта теплопровідності, а  $\lambda_t^{(i)*}(T_i)$  – безрозмірна функція безрозмірної температури  $T_i = t_i/t_k$ ,  $i = \overline{1,3}$  (тут за відлікову вибрали температуру  $t_k$ ). За лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури такі подання матимуть вигляд

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} (1 + k_i (T_i - T_b)), \quad (5)$$

де  $T_p = t_p/t_k$ ,  $k_i = a_i t_k / (a_i t_p + b_i)$ , а  $\lambda_{t_0}^{(i)} = a_i t_p + b_i$ .

Для запису задачі (1)–(6) у безрозмірному вигляді за характерний розмір виберемо деяке значення  $l_0$  і введемо безрозмірну координату  $\rho = r/l_0$ .

У результаті обезрозмірення математична модель (1)–(6) набуде вигляду

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \lambda_t^{(i)*}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \right) = W^{(i)}(\rho) (\delta_{i2} + \delta_{i4}), \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,5}, \quad (6)$$

$$\lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{dT_1}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_1} = \text{Ki}, \quad \left[ \lambda_t^{(5)*}(T_5) \frac{dT_5}{d\rho} + \text{Bi}(T_5 - T_{\text{зоб}}) \right]_{\rho=\rho_6} = 0, \quad (7)$$

$$T_i \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} = T_{i+1} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}}, \quad i = \overline{1,4}, \quad (8)$$

$$\lambda_t^{(i)*}(T_i) \frac{dT_i}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} = K_\lambda^{(i+1)} \lambda_t^{(i+1)*}(T_{i+1}) \frac{dT_{i+1}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}}, \quad i = \overline{1,4}, \quad (9)$$

де  $T_{\text{зоб}} = t_{\text{зоб}}/t_k$ ,  $K_\lambda^{(i+1)} = \lambda_{t_0}^{(i+1)}/\lambda_{t_0}^{(i)}$  ( $i = \overline{1,4}$ );

$\text{Po}^{(2,4)} = W_0^{(2,4)} t_0^3 / (\lambda_{t_0}^{(2,4)} t_p)$  – критерій Померанцева;

$\text{Ki} = ql_0 / (t_0 \lambda_{t_0}^{(1)})$  – критерій Кірпічова;

$\text{Bi} = \alpha l_0 / \lambda_{t_0}^{(5)}$  – критерій Біо;

$W^{(1,3,5)}(\rho) = 0$ ;  $W^{(2,4)}(\rho) = -4\text{Po}^{(2,4)} \cdot \rho(\rho - \rho_{2,4})(\rho - \rho_{3,5}) / (\rho_{3,5} - \rho_{2,4})^2$ .

**Побудова розв'язку математичної моделі.** Для побудови розв'язку задачі (6)–(9) введемо змінні Кірхгофа

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_k} \lambda_t^{(i)*}(T_i) dT_i, \quad i = \overline{1,5}, \quad (10)$$

у результаті відносно них отримаємо задачу:

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\theta_i}{d\rho} \right) = W^{(i)}(\rho) (\delta_{i2} + \delta_{i4}), \quad \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad i = \overline{1,5}, \quad (11)$$

$$\frac{d\theta_1}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_1} = \text{Ki}, \quad \left[ \frac{d\theta_5}{d\rho} + \text{Bi}(T_5(\theta_5) - T_{\text{зоб}}) \right]_{\rho=\rho_6} = 0, \quad (12)$$

$$T_i(\theta_i) \Big|_{\rho=\rho_i} = T_{i+1}(\theta_{i+1}) \Big|_{\rho=\rho_{i+1}}, \quad i = \overline{1,4}, \quad (13)$$

$$\frac{d\theta_i}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}} = K_\lambda^{(i+1)} \frac{d\theta_{i+1}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{i+1}}, \quad i = \overline{1,4}. \quad (14)$$

Отже, застосовуючи перетворення Кірхгофа, з нелінійної задачі теплопровідності отримали простішу задачу для змінних Кірхгофа, в якій нелінійності зосередилися у другій умові (12) та умовах (13). За лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності складових від температури (5) з виразу змінних Кірхгофа (10)

$$\theta_i = (T_i - T_p) + \frac{k_i}{2} (T_i - T_p)^2 \quad (15)$$

знаходимо, що

$$T_i(\theta_i) = \frac{\sqrt{1 + 2k_i\theta_i} - 1}{k_i} + T_p. \quad (16)$$

Зазначимо, що вибраний перед коренем квадратним у виразах  $T_i(\theta_i)$  знак забезпечує їх фізичну коректність.

Проінтегрувавши рівняння (11), знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_i}{d\rho} &= \frac{C_{i1}}{\rho} + \tilde{W}^{(i)}(\rho) (\delta_{i2} + \delta_{i4}), \\ \theta_i &= C_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + C_{i2} + \overline{W}^{(i)}(\rho) (\delta_{i2} + \delta_{i4}), \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\tilde{W}^{(2,4)}(\rho) = -\frac{4\rho_0^{(2,4)}}{(\rho_{3,5} - \rho_{2,4})^2} \left( \frac{\rho^3/4 - (\rho_{3,5} + \rho_{2,4})\rho^2/3 + \rho_{3,5}\rho_{2,4}\rho/2 -}{-\rho_{2,4}^3(\rho_{3,5} - \rho_{2,4}/2)/6\rho} \right),$$

$$\bar{W}^{(2,4)}(\rho) = -\frac{4\rho_0^{(2,4)}}{(\rho_{3,5} - \rho_{2,4})^2} \left( \rho^2(\rho^2/16 - \rho(\rho_{3,5} + \rho_{2,4})/9 + \rho_{3,5}\rho_{2,4}/4) - \right. \\ \left. - \rho_{2,4}^3(\rho_{2,4}/16 - (\rho_{3,5} + \rho_{2,4})/9 + \rho_{3,5}/4) - (\rho_{2,4}^3(\rho_{3,5} - \rho_{2,4}/2)\ln(\rho/\rho_{2,4})) \right) / 6.$$

Розв'язки (17) містять десять невідомих сталих інтегрування. Для їх визначення, наприклад, сталі виразу змінної Кірхгофа першої складової  $C_{11}$  та  $C_{12}$  вважатимемо відомими (базовими). Решту виразимо через базові, використовуючи умови контакту сусідніх складових (13), (14). Зауважимо, що тут замість умов (13) вживаємо рівносильні їм умови, наведені раніше [3]:

$$(\theta_{i+1} - \theta_i)|_{\rho=\rho_{i+1}} = \frac{k_{i+1} - k_i}{2} (T_i(\theta_i) - T_p)^2 \Big|_{\rho=\rho_{i+1}}, \quad i = \overline{1,4}. \quad (18)$$

З умов (14) отримуємо:

$$C_{21} = C_{11}/K_\lambda^{(2)} \quad C_{31} = (C_{11}/K_\lambda^{(2)} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3)) / K_\lambda^{(3)}, \\ C_{41} = (C_{11}/K_\lambda^{(2)} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3)) / K_\lambda^{(3)} K_\lambda^{(4)}, \\ C_{51} = ((C_{11}/K_\lambda^{(2)} + \rho_3 \tilde{W}^{(2)}(\rho_3)) / K_\lambda^{(3)} K_\lambda^{(4)} + \rho_5 \tilde{W}^{(4)}(\rho_5)) / K_\lambda^{(5)},$$

а з умов (18):

$$C_{(i+1)2} = \theta_i|_{\rho=\rho_{i+1}}(C_{11}, C_{12}) + \frac{k_{i+1} - k_i}{2} \left( \frac{\sqrt{1 + 2k_i \theta_i|_{\rho=\rho_{i+1}}(C_{11}, C_{12}) - 1}}{k_i} \right)^2,$$

де  $\theta_i|_{\rho=\rho_{i+1}}(C_{11}, C_{12}) = C_{i1}(C_{11}) \ln(\rho_{i+1}/\rho_i) + C_{i2}(C_{12}) + \bar{W}^{(i)}(\rho_i)$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

Отже, сталі інтегрування  $C_{i1}$  та  $C_{i2}$  ( $i = 2, 5$ ) виражено через базові  $C_{11}$  та  $C_{12}$ , які знаходимо з граничних умов (12). Використавши першу з них, маємо:

$$C_{11} = -\rho_1 K_i.$$

З другої отримуємо алгебричне рівняння

$$C_{51}/\rho_6 + \text{Vi} \left( \left( \sqrt{1 + 2k_5 \theta_5|_{\rho=\rho_6}} - 1 \right) / k_5 + T_p - T_{\text{зов}} \right) = 0, \quad (19)$$

з якого обчислюємо сталу інтегрування  $C_{12}$ .

Розв'язок рівняння (19) побудовано за допомогою пакета програм аналітичних перетворень. Знайшовши аналітичний вираз для  $C_{12}$ , який не наводимо через його громіздкість, автоматично отримуємо вирази і для решти сталих інтегрування, що обчислюють через  $C_{12}$ . Знаючи  $C_{ij}$  ( $i = \overline{1,5}$ ,  $j = 1, 2$ ), за формулами (16) визначаємо розподіли температури в розглядуваному термочутливому циліндрі.

**Температура в порожнистому нетермочутливому циліндрі.** Радіальний розподіл температури в аналогічному нетермочутливому циліндрі

$$T_{in} = \bar{C}_{i1} \ln \frac{\rho}{\rho_i} + \bar{C}_{i2} + \bar{W}_n^{(i)}(\rho)(\delta_{i2} + \delta_{i4}), \quad (20)$$

де сталі інтегрування

$$\bar{C}_{11} = -\rho_1 \text{Ki}, \quad \bar{C}_{i1} = \left( \bar{C}_{(i-1)1} + \rho_i \bar{W}_n^{(i-1)}(\rho_i) \right) / K_{\lambda_n}^{(i)},$$

$$\bar{C}_{i2} = \bar{C}_{(i-1)1} \ln(\rho_i / \rho_{i-1}) + \bar{C}_{(i-1)2} + \bar{W}_n^{(i-1)}(\rho_i),$$

а сталу  $\bar{C}_{12}$  визначаємо з рівняння

$$\bar{C}_{51} / \rho_6 + \text{Bi} \left( \bar{C}_{51} \ln(\rho_6 / \rho_5) + \bar{C}_{52} - T_{\text{зоб}} \right) = 0,$$

причому

$$\bar{W}_n^{(2,4)}(\rho) = -\frac{4\text{Po}_n^{(2,4)}}{(\rho_{3,5} - \rho_{2,4})^2} \left( \rho^3 / 4 - (\rho_{3,5} + \rho_{2,4}) \rho^2 / 3 + \right. \\ \left. + \rho_{3,5} \rho_{2,4} \rho / 2 - \rho_{2,4}^3 (\rho_{3,5} - \rho_{2,4} / 2) / 6 \rho \right);$$

$$\bar{W}_n^{(2,4)}(\rho) = -\frac{4\text{Po}_n^{(2,4)}}{(\rho_{3,5} - \rho_{2,4})^2} \left( \rho^2 (\rho^2 / 16 - \rho (\rho_{3,5} + \rho_{2,4}) / 9 + \rho_{3,5} \rho_{2,4} / 4) - \right. \\ \left. - \rho_{2,4}^3 (\rho_{2,4} / 16 - (\rho_{3,5} + \rho_{2,4}) / 9 + \rho_{3,5} / 4) - (\rho_{2,4}^3 (\rho_{3,5} - \rho_{2,4} / 2) / 6) \ln \rho / \rho_{2,4} \right);$$

$$\text{Po}_n^{(2,4)} = \text{Po}^{(2,4)} \cdot \lambda_{t_0}^{(3)} / \lambda_{t_n}^{(3)} - \text{критерій Померанцева};$$

$$\text{Ki} = ql_0 / \left( t_0 \lambda_{t_n}^{(1)} \right) - \text{критерій Кіріпчова};$$

$$\text{Bi}_n = \text{Bi} \cdot \lambda_{t_0}^{(5)} / \lambda_{t_n}^{(5)} - \text{критерій Біо};$$

$$K_{\lambda_n}^{(j)} = \lambda_{t_n}^{(j)} / \lambda_{t_n}^{(j-1)} \quad (j = \overline{2,5}).$$

**Визначення напружено-деформованого стану.** Якщо модулі пружності  $E_i(t_i)$ , коефіцієнти Пуассона  $\nu_i(t_i)$  та коефіцієнти теплового розширення  $\alpha_{ti}(t_i)$  складових циліндра подати у вигляді  $\chi_i(t_i) = \chi_0^{(i)} \chi_i^*(T_i)$ , де  $\chi_0^{(i)}$  – розмірні величини, що дорівнюють значенням відповідних характеристик при температурі  $t_p$ , а величини  $\chi_i^*(T_i)$  – безрозмірні функції безрозмірних температур  $T_i$ , то

$$E^{(i)}(t_i) = E_0^{(i)} E_i^*(T_i), \quad \nu^{(i)}(t_i) = \nu_0^{(i)} \nu_i^*(T_i), \quad \alpha_t^{(i)}(t_i) = \alpha_{t_0}^{(i)} \alpha_{ti}^*(T_i).$$

Радіальні  $\sigma_r^{(i)}$ , колові  $\sigma_\phi^{(i)}$  та осьові  $\sigma_z^{(i)}$  напруження, радіальні  $e_r^{(i)}$  та колові  $e_\phi^{(i)}$  деформації, а також радіальні переміщення  $u_r^{(i)}$  обчислюємо за формулами з праці [1], враховуючи, що в нашому випадку масові сили відсутні:

$$\sigma_r^{(i)}(\rho) = \gamma_{1r}^{(i)}(\rho) \sigma^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{2r}^{(i)}(\rho) e_z + \gamma_{0r}^{(i)}(\rho), \quad (21)$$

$$\sigma_\phi^{(i)}(\rho) = \sigma^{(i)}(\rho) - \sigma_r^{(i)}(\rho), \quad (22)$$

$$\sigma_z^{(i)}(\rho) = E^{(i)} e_z + \nu^{(i)} \sigma^{(i)}(\rho) - E^{(i)} \Phi_i(T_i), \quad (23)$$

$$e_r^{(i)}(\rho) = \left( \sigma_r^{(i)}(\rho) - \nu^{(i)} \left( \sigma_\phi^{(i)}(\rho) + \sigma_z^{(i)}(\rho) \right) + E^{(i)} \Phi_i(T_i) \right) / E_i, \quad (24)$$

$$e_\phi^{(i)}(\rho) = \left( \sigma_\phi^{(i)}(\rho) - \nu^{(i)} \left( \sigma_r^{(i)}(\rho) + \sigma_z^{(i)}(\rho) \right) + E^{(i)} \Phi_i(T_i) \right) / E_i, \quad (25)$$

$$u_r^{(i)}(\rho) = \rho \cdot e_r^{(i)}(\rho), \quad (26)$$

де  $\sigma^{(i)} = \sigma_r^{(i)} + \sigma_\phi^{(i)}$  – сумарні напруження, які обчислюють так:

$$\sigma^{(i)}(\rho) = \gamma_{10}^{(i)}(\rho) \sigma^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{20}^{(i)}(\rho) e_z + \gamma_{00}^{(i)}(\rho). \quad (27)$$

У формулах (21)–(27) введемо позначення:

$$\begin{aligned} \gamma_{10}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\psi^{(i)}(\rho)} \left( (1 - \delta_{1i}) \gamma_{1r}^{(i-1)}(\rho_i) \chi_2^{(i)}(\rho) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1 - (v^{(1)}(\rho_1))^2}{E^{(1)}(\rho_1)} + (1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{1r}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \beta^{(k)} \gamma_{1r}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) \chi_1^{(i)}(\rho) \right), \\ \gamma_{20}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\psi^{(i)}(\rho)} \left( v^{(i)}(\rho) - v^{(i)}(\rho_i) + (1 - \delta_{1i}) \gamma_{2r}^{(i-1)}(\rho_i) \chi_2^{(i)}(\rho) + (v^{(i)}(\rho_i) - \right. \\ &\quad \left. - v^{(1)}(\rho_1) + (1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \left( \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{2r}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \beta^{(k)} \gamma_{2r}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) \right) \chi_1^{(i)}(\rho), \\ \gamma_{00}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\psi^{(i)}(\rho)} \left( (-\delta_{1i} p_1 + (1 - \delta_{1i}) \gamma_{0r}^{(i-1)}(\rho_i)) \chi_2^{(i)}(\rho) - F^{(i)}(\rho) + F^{(i)}(\rho_i) + \right. \\ &\quad \left. + \left( (1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \left( \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{0r}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \beta^{(k)} \gamma_{0r}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) - F^{(i)}(\rho_i) \right) \chi_1^{(i)}(\rho) \right), \\ \gamma_{1r}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\rho^2} \left( (1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \gamma_{1r}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \gamma_{10}^{(i)}(\eta) d\eta \right), \\ \gamma_{2r}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\rho^2} \left( (1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \gamma_{2r}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \gamma_{20}^{(i)}(\eta) d\eta \right), \\ \gamma_{0r}^{(i)}(\rho) &= \frac{1}{\rho^2} \left( -\rho_1^2 p_1 \delta_{1i} + (1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \gamma_{0r}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \gamma_{00}^{(i)}(\eta) d\eta \right), \\ \chi_1^{(i)}(\rho) &= 1 + ((\rho - \rho_i)/2)^2 (\varphi^{(i)}(\rho))' \rho_i E^{(i)}(\rho_i) / \left( \rho^2 \left( 1 - (v^{(i)}(\rho_i))^2 \right) \right), \\ \chi_2^{(i)}(\rho) &= ((\rho - \rho_i)/2) \left( (\varphi^{(i)}(\rho))' \rho_i^2 / \rho^2 + (\varphi^{(i)}(\rho_i))' \right), \\ \psi^{(i)}(\rho) &= \left( 1 - (v^{(i)}(\rho_i))^2 \right) / E^{(i)}(\rho_i) - ((\rho - \rho_i)/2)^2 (\varphi^{(i)}(\rho))' / \rho, \\ \varphi^{(i)}(\rho) &= \frac{1 - v^{(i)}(\rho)}{E^{(i)}(\rho)}, \quad (\varphi^{(i)}(\rho))' = \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1 - v^{(i)}(\rho)}{E^{(i)}(\rho)} \right), \quad \beta^{(i)} = \varphi^{(i+1)}(\rho_{(i+1)}) - \varphi^{(i)}(\rho_{(i+1)}), \\ F^{(i)}(\rho) &= (1 + v^{(i)}(\rho)) \Phi^{(i)}(T_i(\rho)) - (1 + v^{(1)}(\rho_1)) \Phi^{(1)}(T_1(\rho_1)), \\ \Phi^{(i)}(T_i) &= t_0 \int_{T_p}^{T_i} \alpha_t^{(i)}(T_i) dT_i, \quad \sigma^{(1)}(\rho_1) = \frac{c_1 d_{22} - c_2 d_{12}}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}}, \quad e_z = \frac{c_2 d_{11} - c_1 d_{21}}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}}, \\ d_{11} &= \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{10}^{(k)}(\eta) d\eta, \quad d_{12} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{20}^{(k)}(\eta) d\eta, \quad d_{21} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta v_k(\eta) \gamma_{10}^{(k)}(\eta) d\eta, \\ d_{12} &= \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{20}^{(k)}(\eta) d\eta, \quad d_{21} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta v^{(k)}(\eta) \gamma_{10}^{(k)}(\eta) d\eta, \end{aligned}$$

$$d_{22} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \left( v^{(k)}(\eta) \gamma_{20}^{(k)}(\eta) + E_k(\eta) \right) d\eta,$$

$$c_1 = \rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 + \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{00}^{(k)}(\eta) d\eta,$$

$$c_2 = \frac{p}{2\pi} + \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \left( E^{(k)}(\eta) \Phi^{(k)}(T_k(\eta)) - v^{(k)}(\eta) \gamma_{00}^{(k)}(\eta) \right) d\eta,$$

де  $\Phi_i(T_i)$  – суто теплова деформація;  $p_1, p_2$  – задані сталі тиски (напруження) на внутрішній ( $\rho = \rho_1$ ) та зовнішній ( $\rho = \rho_4$ ) поверхнях циліндра;  $p$  – задане на торцях циліндра зусилля.

Формули (21)–(27) для обчислення напружено-деформованого стану справедливі тільки для тонких шарів, тобто таких, для яких під час обчислення з заданою точністю інтегралів, які містять невідомі величини, справедлива формула трапецій

$$\int_{\rho_i}^{\rho} Y(\eta) d\eta = \frac{\rho - \rho_i}{2} (Y(\rho) + Y(\rho_i)). \quad (28)$$

Якщо ж циліндр містить тонкі і товсті шари, то кожному із товстих шарів ставимо у відповідність певну кількість тонких з одного і того ж матеріалу. Перевірку достатності розбиття товстих шарів на тонкі забезпечує виконання інтегральної умови [1]

$$\rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \sigma^{(k)}(\eta) d\eta. \quad (29)$$

**Часткові випадки.** 1. Розглянемо ситуацію, коли термомеханічні характеристики складових нетермочутливого циліндра (їх позначимо з індексом  $n$ ) дорівнюють опорним значенням відповідних складових термочутливого. Тоді розподіл температури матиме вигляд (24), де  $\lambda_{tn}^{(i)} = \lambda_{t0}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1,5}$ . Коефіцієнти Пуассона, теплового розширення та модулі пружності складових циліндра тут такі:  $\nu_n^{(i)} = \nu_0^{(i)}$ ,  $\alpha_{tn}^{(i)} = \alpha_{t0}^{(i)}$ ,  $E_n^{(i)} = E_0^{(i)}$ ,  $i = \overline{1,5}$ , а формули для обчислення компонент термопружного стану набудуть вигляду

$$\sigma_n^{(i)}(\rho) = \gamma_{10n}^{(i)}(\rho) \sigma_n^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{20n}^{(i)}(\rho) e_{zn} + \gamma_{00n}^{(i)}(\rho), \quad (30)$$

$$\sigma_{rn}^{(i)}(\rho) = \gamma_{1rn}^{(i)}(\rho) \sigma_n^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{2rn}^{(i)}(\rho) e_{zn} + \gamma_{0rn}^{(i)}(\rho), \quad (31)$$

$$\sigma_{\varphi n}^{(i)}(\rho) = \sigma_n^{(i)}(\rho) - \sigma_{rn}^{(i)}(\rho), \quad (32)$$

$$\sigma_{zn}^{(i)}(\rho) = E_0^{(i)} e_{zn} + \nu_0^{(i)} \sigma_n^{(i)}(\rho) - E_0^{(i)} \Phi_n^{(i)}(T_{in}), \quad (33)$$

$$e_{rn}^{(i)}(\rho) = \left( \sigma_{rn}^{(i)}(\rho) - \nu_0^{(i)} \left( \sigma_{\varphi n}^{(i)}(\rho) + \sigma_{zn}^{(i)}(\rho) \right) + E_0^{(i)} \Phi_n^{(i)}(T_{in}) \right) / E_0^{(i)}, \quad (34)$$

$$e_{\varphi n}^{(i)}(\rho) = \left( \sigma_{\varphi n}^{(i)}(\rho) - \nu_0^{(i)} \left( \sigma_{rn}^{(i)}(\rho) + \sigma_{zn}^{(i)}(\rho) \right) + E_0^{(i)} \Phi_n^{(i)}(T_{in}) \right) / E_0^{(i)}, \quad (35)$$

$$u_{rn}^{(i)}(\rho) = \rho \cdot e_{\varphi n}^{(i)}(\rho), \quad (36)$$

$$\gamma_{10n}^{(i)}(\rho) = \left( \left( 1 - \left( \nu_0^{(1)} \right)^2 \right) / E_0^{(1)} + (1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \beta_n^{(k)} \gamma_{1rn}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) / \psi_n^{(i)}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{20n}^{(i)}(\rho) &= \left( v_0^{(i)} - v_0^{(1)} + (1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \beta_n^{(k)} \gamma_{2rn}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) / \psi_n^{(i)}, \\ \gamma_{00n}^{(i)}(\rho) &= \left( (1 - \delta_{1i}) \sum_{k=1}^{i-1} \beta_n^{(k)} \gamma_{0rn}^{(k)}(\rho_{k+1}) - F^{(i)}(\rho) \right) / \psi_n^{(i)}, \\ \gamma_{1rn}^{(i)}(\rho) &= \left( (1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \gamma_{1rn}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \gamma_{10n}^{(i)}(\eta) d\eta \right) / \rho^2, \\ \gamma_{2rn}^{(i)}(\rho) &= \left( (1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \gamma_{2rn}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \gamma_{20n}^{(i)}(\eta) d\eta \right) / \rho^2, \\ \gamma_{0rn}^{(i)}(\rho) &= \left( -\rho_1^2 p_1 \delta_{1i} + (1 - \delta_{1i}) \rho_i^2 \gamma_{0rn}^{(i-1)}(\rho_i) + \int_{\rho_i}^{\rho} \eta \gamma_{00n}^{(i)}(\eta) d\eta \right) / \rho^2, \end{aligned}$$

$$\psi_n^{(i)} = \left( 1 - (v_0^{(i)})^2 \right) / E_0^{(i)}, \quad \varphi_n^{(i)} = \left( 1 - v_0^{(i)} \right) / E_0^{(i)},$$

$$\beta_n^{(i)} = \varphi_n^{(i+1)} - \varphi_n^{(i)}, \quad \Phi_n^{(i)}(T_{in}) = t_0 \alpha_{t0}^{(i)}(T_{in} - T_p),$$

$$F_n^{(i)}(\rho) = \left( 1 + v_0^{(i)} \right) \Phi_n^{(i)}(T_{in}(\rho)) - \left( 1 + v_0^{(i)}(\rho_1) \right) \Phi_n^{(i)}(T_{1n}(\rho_1)),$$

$$\sigma_n^{(1)}(\rho_1) = \frac{c_{1n} d_{22n} - c_{2n} d_{12n}}{d_{11n} d_{22n} - d_{21n} d_{12n}}, \quad e_z = \frac{c_{2n} d_{11n} - c_{1n} d_{21n}}{d_{11n} d_{22n} - d_{21n} d_{12n}},$$

$$d_{11n} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{10n}^{(k)}(\eta) d\eta, \quad d_{12n} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{20n}^{(k)}(\eta) d\eta,$$

$$d_{21n} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta v_0^{(k)} \gamma_{10n}^{(k)}(\eta) d\eta, \quad d_{22n} = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \left( v_0^{(k)} \gamma_{20n}^{(k)}(\eta) + E_{kn} \right) d\eta,$$

$$c_{1n} = \rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 + \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{00n}^{(k)}(\eta) d\eta,$$

$$c_{2n} = \frac{p}{2\pi} + \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \left( E_0^{(k)} \Phi_n^{(k)}(T_{kn}(\eta)) - v_0^{(k)} \gamma_{00n}^{(k)}(\eta) \right) d\eta.$$

2. Для середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик

$$\lambda_{tn}^{(i)} = \lambda_{tc}^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_k}^{T_p} \left( \lambda_{t0}^{(i)} \left( 1 + k_i (T_i - T_p) \right) \right) dT_i = \lambda_{t0}^{(i)} \left( 1 + \frac{k_i}{2} (T_k - T_p) \right), \quad i = \overline{1, 5},$$

$$\left\{ v_n^{(i)}, \alpha_{tn}^{(i)}, E_n^{(i)} \right\} = \left\{ v_c^{(i)}, \alpha_{tc}^{(i)}, E_c^{(i)} \right\} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_k}^{T_p} \left\{ v^{(i)}(T_i), \alpha_t^{(i)}(T_i), E^{(i)}(T_i) \right\} dT_i, \quad i = \overline{1, 5}.$$

При цьому у розподілі температури (20)

$$B_i = B_i \cdot \lambda_{t0}^{(5)} / \lambda_{tc}^{(5)}, \quad P_{O_n}^{(2,4)} = P_{O_n}^{(2,4)} \cdot \lambda_{t0}^{(2,4)} / \lambda_{tc}^{(2,4)}, \quad K_{\lambda_n}^{(i+1)} = \lambda_{tc}^{(i+1)} / \lambda_{tc}^{(i)}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Формули для визначення компонент напружено-деформованого стану циліндра матимуть вигляд (30)–(36), в яких опорні значення механічних характеристик слід замінити на середньоінтегральні.

**Числові дослідження.** Для прикладу вивчали вплив залежності теплових та механічних характеристик матеріалів складових циліндра від температури на розподіл температур та компонент напружено-деформованого стану залежно від вхідних параметрів. Зазначимо, що матеріалом пер-



шого, третього і п'ятого шарів є кераміка  $ZrO_2$ , а другого і четвертого – титановий сплав  $Ti-6Al-4V$  [8].

Експериментально задані коефіцієнти теплопровідності та термомеханічні характеристики проапроксимували, використовуючи метод найменших квадратів, многочленами у діапазоні температур  $300 \div 1100$  К. При цьому для кераміки отримали

$$\lambda_t^{(1,3,5)} = 1.915(1 + 0.24664(T_{1,3,5} - T_p)) \left[ \frac{Вт}{м \cdot К} \right], \quad \nu^{(1,3,5)} = 0.333,$$

$$\alpha_t^{(1,3,5)} = 8.783 \cdot 10^{-6} \left( 1 - 1.4128(T_{1,3,5} - T_p) + 1.7496(T_{1,3,5} - T_p)^2 \right) \left[ \frac{1}{К} \right],$$

$$E^{(1,3,5)} = 116.381 \left( 1 - 0.521357(T_{1,3,5} - T_p) - 0.084215(T_{1,3,5} - T_p)^2 \right) \left[ ГПа \right],$$

а для титанового сплаву

$$\lambda_t^{(2,4)} = 6.2(1 + 3.016(T_{2,4} - T_p)) \left[ \frac{Вт}{м \cdot К} \right], \quad \nu^{(2,4)} = 0.2984(1 + 0.118(T_{2,4} - T_p)),$$

$$\alpha_t^{(2,4)} = 8.8559 \cdot 10^{-6} \left( 1 + 0.49014(T_{2,4} - T_p) - 0.36754(T_{2,4} - T_p)^2 \right) \left[ \frac{1}{К} \right],$$

$$E^{(2,4)} = 105.05(1 - 0.5916(T_{2,4} - T_p)) \left[ ГПа \right].$$

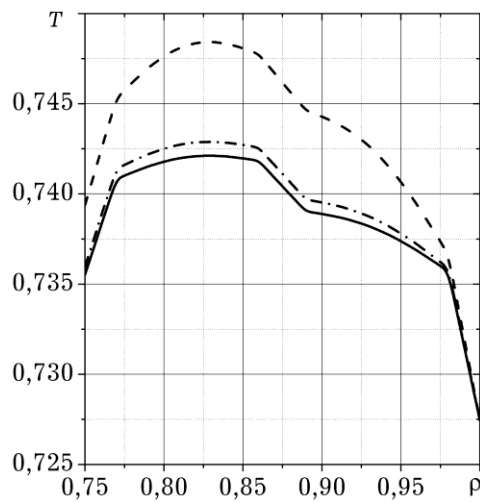


Рис. 1. Розподіл температур.

За координати меж складових циліндра взяли  $\rho_1 = 0.75$ ,  $\rho_2 = 0.77$ ,  $\rho_3 = 0.86$ ,  $\rho_4 = 0.89$ ,  $\rho_5 = 0.98$ ,  $\rho_6 = 1$ , за характерний розмір –  $l_0 = r_6$ . Значення безрозмірних температур прийняли такими:  $T_p = 3/11$ ,  $T_k = 1$ ,  $T_{зов} = 1/2$ , безрозмірних критеріїв –  $Ro^{(2,4)} = -2$ ,  $Bi = 2$ ,  $Ki = -0.3$ , а сталі тиски на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра і зусилля на торцях –  $p_1 = p_2 = p = 0$ .

Графіки розподілів температур подано на рис.1. На рис. 1–7 суцільні лінії – термоінертний циліндр, штрихові – нетермоінертний

циліндр за опорних значень, штрих-пунктирні – нетермоінертний за середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності.

Як бачимо, розподіли температур у термоінертному порожньому циліндрі краще наближаються таким розподілом за середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності. Максимальні розбіжності між температурами в термоінертному і нетермоінертному (за опорних і середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності) циліндрах не перевищують 1.5%.

Оскільки формули (21)–(27) справедливі тільки для тонких шарів, то для обчислення компонент напружено-деформованого стану використовуємо такий алгоритм:

1. Обчислюємо за формулами (21)–(27), коли кожен з шарів циліндра не поділений на тонкі.
2. Перевіряємо виконання інтегральної умови (29).
3. Якщо умова (29) не виконується, то збільшуємо розбиття шарів на складові і повертаємося до п. 2. У протилежному випадку обчислення закінчуємо.

За запропонованим алгоритмом, коли задані вхідні дані, досягнуто точність  $\varepsilon = 10^{-4}$  на першому кроці, а тому шари циліндра на складові не розбивали.

У результаті отримали розподіли напружень, деформацій та переміщення, зображені на рис. 2–4. Зазначимо, що стала осьова деформація становить 0.0047657. Як бачимо, розподіли компонент напружено-деформованого стану у термочутливому порожнистому циліндрі краще наближаються такими розподілами в аналогічному нетермочутливому за середньо-інтегральних значень механічних характеристик його складових.

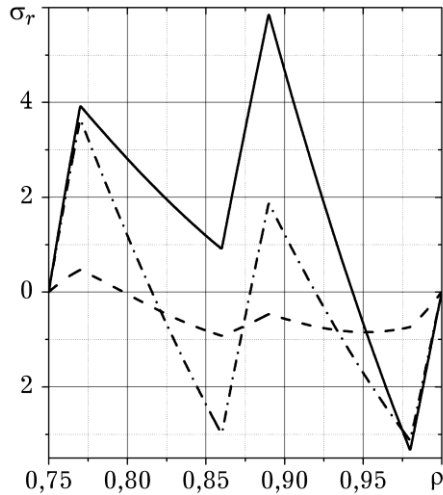


Рис. 2.

Рис. 2. Розподіл радіальних напружень  $\sigma_r(\rho) \cdot 10^3$ .

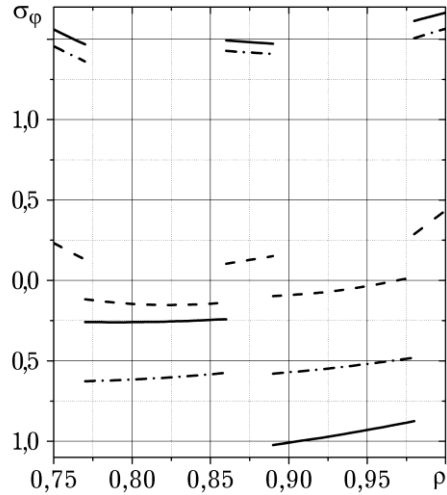


Рис. 3.

Рис. 3. Розподіл колових напружень  $\sigma_\phi(\rho) \cdot 10$ .

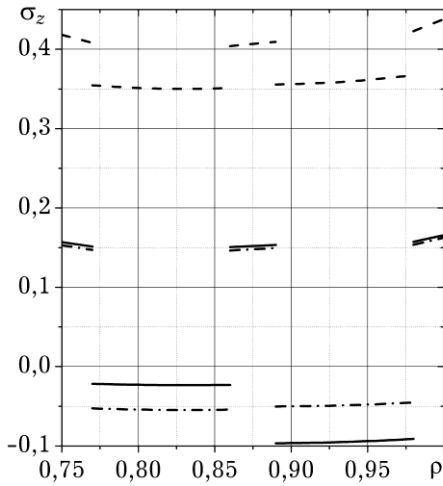


Рис. 4.

Рис. 4. Розподіл осьових напружень  $\sigma_z(\rho)$ .

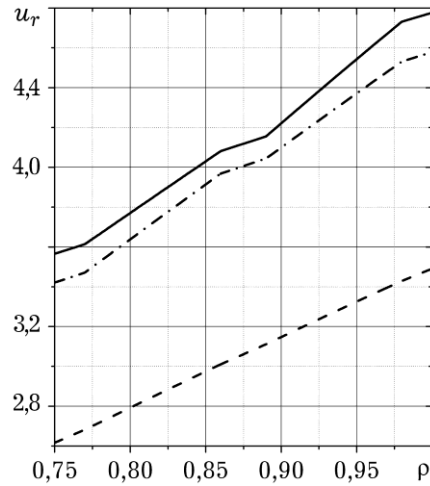


Рис. 5.

Рис. 5. Розподіл радіальних переміщень  $u_r(\rho) \cdot 10^3$ .

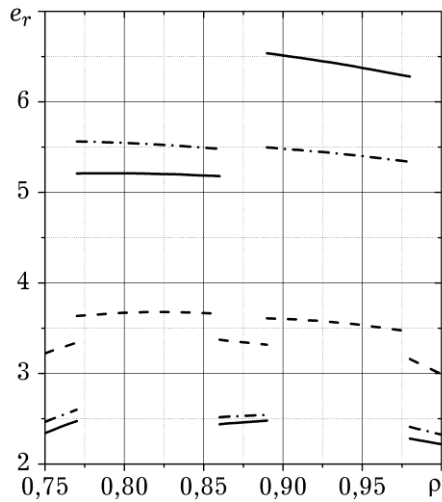


Рис. 6.

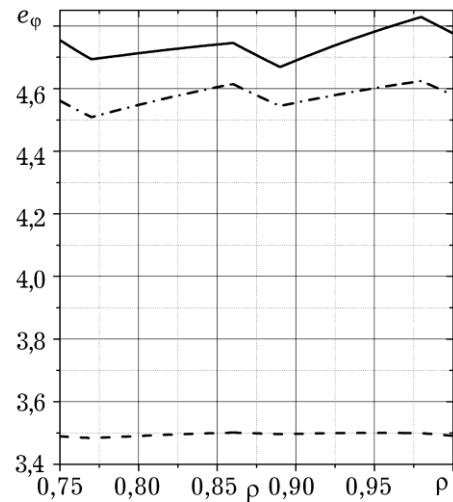
Рис. 6. Розподіл радіальних деформацій  $e_r(\rho) \cdot 10^3$ .

Рис. 7.

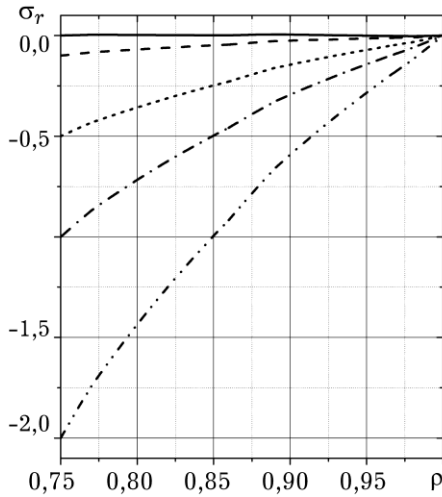
Рис. 7. Розподіл осевих деформацій  $e_\phi(\rho) \cdot 10^3$ .

Рис. 8.

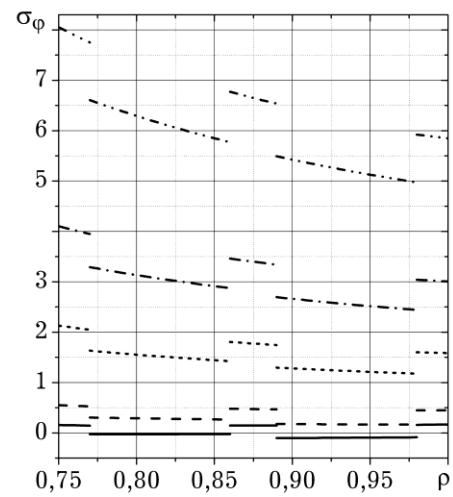
Рис. 8. Розподіл радіальних напружень  $\sigma_r(\rho)$ .

Рис. 9.

Рис. 9. Розподіл колових напружень  $\sigma_\phi(\rho)$ .

Однак використання моделі нетермочутливого тіла з опорними чи середньоінтегральними значеннями термомеханічних характеристик для визначення компонент напружено-деформованого стану іноді дає погане наближення до таких розподілів відповідних компонент термочутливого циліндра (максимальні різниці можуть перевищувати 50%), а для розподілів деяких з компонент можна отримати якісно іншу картину (стиск у термочутливому і розтяг у нетермочутливому циліндрах або навпаки).

Досліджено також вплив тиску на внутрішній поверхні циліндра на розподіли компонент напружено-деформованого стану. Вхідні дані задачі залишили такими, як в попередньому прикладі, а тиск  $p_1$  змінювали так:

$p_1 = \{0, 0.1, 0.5, 1, 2\}$ . У результаті отримали розподіли напружень та переміщень, які зображені на рис. 8–11. Зазначимо, що тут суцільні лінії відповідають значенню  $p_1 = 0$ , штрихові – 0.1, пунктирні – 0.5, штрих-пунктирні – 1, штрих-пунктирна з двома точками – 2.

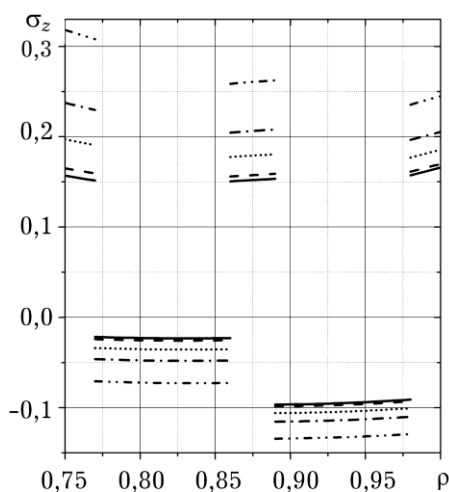


Рис. 10.

Рис. 10. Розподіл осьових напружень  $\sigma_z(\rho)$ .

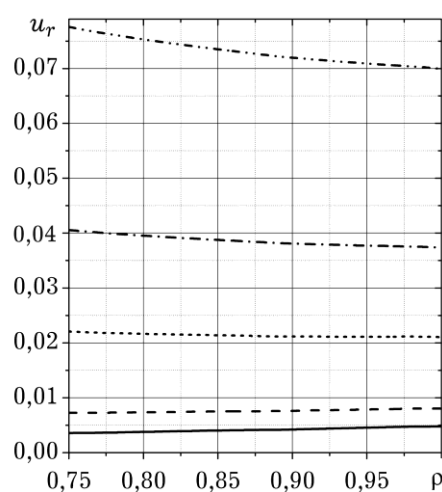


Рис. 11.

Рис. 11. Розподіл радіальних переміщень  $u_r(\rho)$ .

Встановлено, що збільшення тиску на внутрішній поверхні істотно впливає на розподіли компонент напружено-деформованого стану циліндра. Зокрема, на межі контакту сусідніх шарів зростають стрибки між розподілами колових та осьових напружень, а також радіальних деформацій.

**Висновки.** Сформульовано нелінійну математичну модель розподілу температури в безмежному п'ятишаровому порожнистому термочутливому циліндрі, в другому та четвертому шарах якого наявні джерела тепла, розподілені за параболічним законом, а на внутрішній та зовнішній обмежувальних поверхнях – сталий потік тепла та відбувається конвективний теплообмін із довкіллям. Визначено компоненти напружено-деформованого стану.

З'ясовано, що нехтування залежністю термомеханічних характеристик матеріалів складових від температури (заміна їх на опорні чи середньоінтегральні значення) може призвести як до досить великих кількісних розбіжностей між розподілами компонент термопружного стану термочутливого та аналогічного нетермочутливого циліндрів, так і до якісно інших їх розподілів. Встановлено, що розподіли температур та компонент напружено-деформованого стану у термочутливому порожнистому циліндрі краще наближаються такими розподілами в аналогічному нетермочутливому за середньоінтегральних значень теплових, що може бути корисним під час їх експрес-оцінки.

Виявлено, що внаслідок збільшення тиску на внутрішній поверхні циліндра зростають стрибки між розподілами колових та осьових напружень і радіальних деформацій на межах контакту сусідніх шарів.

1. Попович В. С., Калиняк Б. М. Математичне моделювання та методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – 57, № 2. – С. 169-186.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

3. Кушнір Р. М., Попович В. С. Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання // Вісник Київськ. нац. ун-ту. ім. Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 42–47.
4. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл. / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів: СПОЛЮМ, 2009. – 412 с.
5. Kushnir R. M., Popovych V. S. Heat Conduction Problems of Thermosensitive Solids under Complex Heat Exchange // Heat Conduction – Basic Research V.S. Vikhrenko, ed. – In Tech, 2011. – P. 131–154.
6. Kushnir R. M., Protsiuk Yu. B. Thermoelastic State of Layered Thermosensitive Bodies of Revolution for the Quadratic Dependence of the Heat-Conduction Coefficients // Mat. Sci. – 2010. – 46, №1. – P.1–15.
7. Noda N. Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties, in R. B. Hetnarski (ed.) / N. Noda // Thermal Stresses. – 1986. – I. – P. 391–483.
8. Tanigawa Y., Akai T. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. of thermal stresses. – 1996. – 19, № 1. – P. 77–102.

#### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПЯТИСЛОЙНОГО ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА**

*На основе модели термочувствительного тела сформулирована математическая модель и определено стационарное распределение температуры в пятислойном безграничном полом цилиндре, во втором и четвертом слоях которого есть источники тепла, распределенные по параболическому закону, на внутренней граничной поверхности задан постоянный поток тепла, а через внешнюю происходит конвективный теплообмен с окружающей средой. Найдены компоненты напряженно-деформированного состояния и исследовано влияние зависимости тепловых и механических характеристик материалов составляющих от температуры на распределение температуры и напряжений.*

#### **THE MATHEMATICAL MODELLING AND INVESTIGATION OF THE THERMOSTRESSED STATE OF THE FIVE-LAYERED THERMOSENSITIVE HOLLOW CYLINDER**

*Based on the model of the thermosensitive body the mathematical model has been formulated and the steady-state temperature distribution in the five-layered infinite hollow cylinder has been defined. The cylinder is under condition of heat flow and convective heat exchange on the inner and outer limiting surfaces respectively, and heat sources are distributed on the second and fourth layers according to a parabolic law. The components of the stress-strain state have been found. The influence of the thermosensitivity of the material of cylinder components on the temperature and stresses distributions have been investigated.*

<sup>1</sup>Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів  
<sup>2</sup>Нац. ун-т “Львівська політехніка”, Львів