

ВПЛИВ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ У МІЖПОВЕРХНЕВИХ ЗАЗОРАХ НА КОНТАКТ ДВОХ ПРУЖНИХ ТІЛ ІЗ ХВИЛЯСТИМ РЕЛЬЄФОМ ПОВЕРХНІ

Досліджено контакт двох півбезмежних пружних тіл, одне з яких має хвилясту поверхню, за наявності в міжповерхневих зазорах ідеального газу, стан якого описує рівняння Клапейрона–Менделєєва. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта відносно висоти зазорів, яке розв'язано аналітично. З умови обмеженості розв'язку цього СІР і з рівняння стану газу отримано систему рівнянь для визначення довжини зазорів та тиску газу. Проаналізовано залежності довжини зазорів, тиску газу, висоти зазорів, контактної зближеності та контактної податливості тіл від навантаження.

Вступ. Текстурування поверхонь використовують для поліпшення функціональних характеристик контактних пар. Воно полягає у формуванні на них регулярного рельєфу. Під час контакту між тілами з такими поверхнями виникають періодично розташовані зазори, які у реальних умовах можуть заповнюватися рідиною чи газом, що додатково тиснуть на спряжені поверхні. Контактні задачі для тіл з періодичним рельєфом за відсутності заповнювача зазорів між ними розглянуто у працях [4–6, 8]. Вивчено [7, 10–13] контактну поведінку тіл з урахуванням тиску і теплопровідності заповнювача міжповерхневого зазору. Взаємодію тіл з регулярною системою поверхневих виїмок за наявності в міжконтактних зазорах рідини і/або газу вивчали у працях [1–3, 15]. Досліджено [9] контакт плоскої і хвилястої поверхонь, зазори між якими заповнені стисливою рідиною. Вивчено [14] контактну міцність тіл з поверхневими виїмками.

Нижче вивчено взаємодію двох пружних тіл, одне з яких має хвилясту поверхню, за наявності в міжповерхневих зазорах ідеального газу.

Формулювання контактної задачі. Розглянемо безфрикційну контактну взаємодію двох пружних півнескінчених тіл D_1 і D_2 за умов плоскої деформації. Межа одного з тіл прямолінійна, а іншого – хвиляста, що описує періодична функція

$$r(x) = A \cos^2(\pi x/d), \quad x \in [-\infty, \infty], \quad (1)$$

зображена штриховою лінією на рис. 1. Максимальна висота хвилястої межі A значно менша від періоду d ($A \ll d$).

Тіла контактують під дією рівномірно розподілених на нескінченності стискальних навантажень P^∞ . Внаслідок нерівності межі одного з тіл їх контакт неповний і між ними виникають міжповерхневі зазори.

Вважаємо, що вони заповнені ідеальним газом (рис. 1), стан якого описує рівняння Клапейрона–Менделєєва:

$$PV = mRT/\mu, \quad (2)$$

де P – тиск ідеального газу; R – універсальна газова стала; T – температура; μ – молярна маса газу; V і m – об'єм і маса газу, що припадають

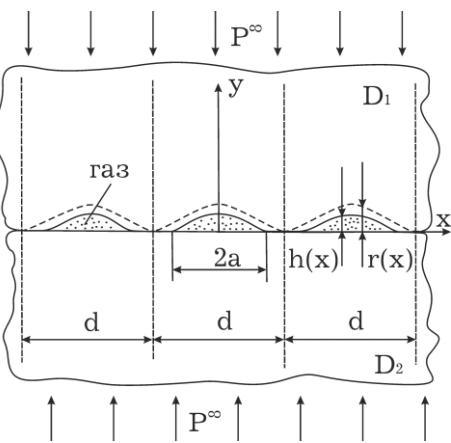


Рис. 1.

на одиницю довжини зазору в поздовжньому його напрямі (перпендикулярному до площини рис. 1).

Під навантаженням змінюватимуться висота зазорів $h(x)$, їх півдовжина a і тиск газу P .

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд:

уздовж зазорів $x \in (-a + kd, a + kd)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad \sigma_{yy}^+ = -P; \quad (3)$$

на ділянках контакту $x \in [-d/2 + kd, -a + kd] \cup [a + kd, d/2 + kd]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad (4)$$

$$v'^- - v'^+ = r'(x); \quad (5)$$

на нескінченності

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (6)$$

Тут σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} - компоненти тензора напружень; v - складова вектора переміщень уздовж осі Oy ; значками "+", "-" позначено граничні значення функції за прямування точки до осі Ox у верхній і нижній півплощинах ($y \rightarrow \pm 0$).

Методика розв'язування задачі. Напруження і похідні від переміщень у півплощинах D_n ($n = 1, 2$) подамо [2, 15] в комплексному вигляді через форму хвилястої межі $r(x)$ і заздалегідь невідому висоту міжконтактних зазорів $h(x)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi_n(z) - \Phi_n(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_n'(z)} - P^\infty, \quad z \in D_n, \\ 2G_n(u' + iv') &= \kappa_n \Phi_n(z) + \Phi_n(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_n'(z)} + \frac{3 - \kappa_n}{4} P^\infty, \quad z \in D_n, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Phi_n(z) = \frac{(-1)^{3-n}}{dK} \left(\int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-z)}{d} \right) dt - \int_{-d/2}^{d/2} r'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-z)}{d} \right) dt \right), \quad (8)$$

де $K = 2(1 - \nu_1)/G_1 + 2(1 - \nu_2)/G_2$; $\kappa_n = 3 - 4\nu_n$; G_n , ν_n - відповідно модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу півплощини D_n , $n = 1, 2$.

Для визначення функції $h'(x)$ отримуємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта:

$$\frac{2}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = K(P^\infty - P) + \frac{2}{d} \int_{-d/2}^{d/2} r'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt. \quad (9)$$

Висота зазору в крайніх його точках

$$h(-a) = h(a) = 0. \quad (10)$$

Через гладкість виїмок береги зазорів плавно зникаються. Тому похідна від висоти зазору в точках змикання повинна задовольняти умову

$$h'(-a) = h'(a) = 0. \quad (11)$$

Замінивши змінні $\xi = \operatorname{tg}(\pi x/d)$, $\eta = \operatorname{tg}(\pi t/d)$, $\alpha = \operatorname{tg}(\pi a/d)$, СІР з ядром Гільберта (9) трансформуємо у СІР з ядром Коші:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2(1 + \xi^2)} K(P^\infty - P) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta, \quad x \in [-\alpha, \alpha]. \quad (12)$$

Умови (10), (11) у нових змінних такі:

$$h'(-\alpha) = h'(\alpha) = 0, \quad h(-\alpha) = h(\alpha) = 0. \quad (13)$$

Функція (1), що описує хвилясту межу, у нових змінних має вигляд $r(\xi) = A/(1 + \xi^2)$. Підставивши її в інтеграл у правій частині рівняння (12), запишемо його так:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = R(\xi), \quad \xi \in [-\alpha, \alpha], \quad R(\xi) = \frac{dK(P^\infty - P)}{\pi(1 + \xi^2)} + \frac{2A(\xi^2 - 1)}{(1 + \xi^2)^2}. \quad (14)$$

Згідно з теорією СІР, рівняння з ядром Коші може мати необмежений або обмежений на кінцях відрізка інтегрування розв'язок. Згідно з першою умовою (13) обмежений розв'язок рівняння (14) буде:

$$h'(\xi) = -\frac{2A}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \frac{\xi \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{(1 + \xi^2)^2} - \frac{1}{\pi \sqrt{\alpha^2 + 1}} \left(\frac{A\pi}{\alpha^2 + 1} - \frac{dK(P^\infty - P)}{2} \right) \frac{\xi \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{(1 + \xi^2)^2}. \quad (15)$$

Обмежений розв'язок рівняння (14) існує за виконання додаткової умови на його праву частину

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left[R(\xi) / \sqrt{\alpha^2 - \xi^2} \right] d\xi = 0,$$

з якої тиск газу P виражаємо через півдовжину зазорів α :

$$KP = KP^\infty - \frac{2A\pi}{d(\alpha^2 + 1)}. \quad (16)$$

Інтегруючи функцію (15) з урахуванням умов (13) та співвідношення (16), знаходимо висоту зазору:

$$h(\xi) = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} + \frac{A}{\alpha^2 + 1} \operatorname{arcth} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right). \quad (17)$$

Підставивши функцію $h(\xi)$ у формулу для визначення об'єму зазору

$$V = l \int_{-a}^a h(x) dx = \frac{dl}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h(\xi)}{1 + \xi^2} d\xi, \quad \text{де } l = 1 \text{ м, отримаємо:}$$

$$V = \frac{dA}{2(\alpha^2 + 1)} \left[\alpha^2 - \ln(\alpha^2 + 1) \right]. \quad (18)$$

Враховавши в рівнянні (2) вирази (16) та (18), отримаємо трансцендентне рівняння для знаходження невідомої півдовжини зазорів:

$$\left(KP^\infty - \frac{2A\pi}{d(\alpha^2 + 1)} \right) \frac{dA}{2(\alpha^2 + 1)} \left[\alpha^2 - \ln(\alpha^2 + 1) \right] = mKRT/\mu. \quad (19)$$

Використовуючи першу з рівностей (7) і співвідношення (8), визначаємо контактний тиск поверхонь $P(x) = -\sigma_{yy}(x, 0)$:

$$P(x) = KP + \frac{4A\pi}{d\sqrt{\alpha^2 + 1}} \begin{cases} 0, & |\xi| < \alpha, \\ \frac{|\xi| \sqrt{\xi^2 - \alpha^2}}{1 + \xi^2}, & |\xi| \geq \alpha. \end{cases} \quad (20)$$

Для інженерних розрахунків контактної взаємодії тіл з регулярним рельєфом важливу роль відіграють такі ефективні контактні параметри, як

контактне зближення [2] $\Delta v^\infty = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} (r(x) - h(x)) dx$ та контактна податли-

вість тіл [2] $k^* = d(\Delta v^\infty)/dP^\infty$. Контактне зближення у нашому випадку має вигляд

$$\Delta v^\infty = \frac{A}{2(\alpha^2 + 1)} \left[1 + \ln(\alpha^2 + 1) \right], \quad (21)$$

а контактну податливість визначаємо числово.

Аналіз числових результатів. Розраховували для безрозмірних величин: висоти міжконтактного зазору $\tilde{h} = h/d$; його півдовжини $\tilde{a} = a/d$; тиску на нескінченності $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$; тиску газу $\tilde{P} = KP$; максимальної висоти виїмки $\tilde{A} = A/d$; контактного зближення $\tilde{\Delta v}^\infty = \Delta v^\infty/d$; контактної податливості $\tilde{k}^* = d(\tilde{\Delta v}^\infty)/d\tilde{P}^\infty$; маси газу $\tilde{m} = mKRT/(\mu d^2)$. Числово аналізували для максимальної висоти виїмки $\tilde{A} = 0,001$.

На рис. 2 і 3 подано залежності півдовжини зазору \tilde{a} і тиску газу \tilde{P} від прикладеного навантаження \tilde{P}^∞ та маси заповнювача \tilde{m} одного зазору, що припадає на одиницю довжини в його поздовжньому напрямі. Як бачимо, зі збільшенням навантаження півдовжина зазору зменшується, а тиск газу підвищується. Зі збільшенням маси газу в зазорах півдовжина зазорів і тиск газу зростають одночасно.

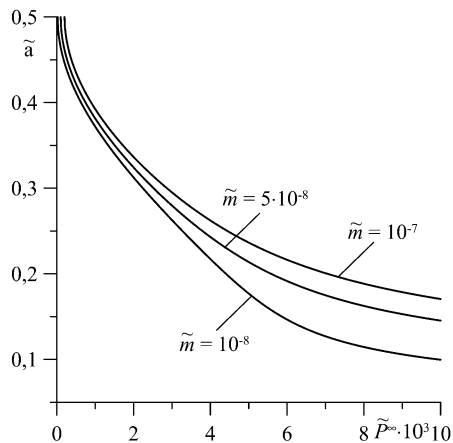


Рис. 2.

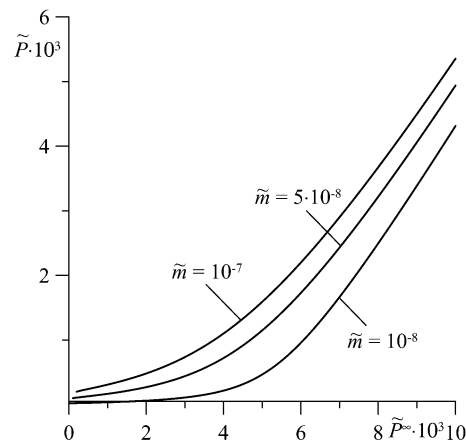


Рис. 3.

Залежність контактного зближення $\tilde{\Delta v}^\infty$ та контактної податливості тіл \tilde{k}^* від прикладеного навантаження \tilde{P}^∞ побудовано на рис. 4 та 5. З ростом навантаження контактне зближення збільшується, а контактна податливість зменшується. Що більша кількість газу в зазорах, то менша контактна податливість тіл та більше контактне зближення.

На рис. 6 зображено висоти зазорів $\tilde{h}(\tilde{x})$ за різних значень маси газу \tilde{m} та фіксованого зовнішнього навантаження $\tilde{P}^\infty = 0,003$. Зі збільшенням маси газу зростає висота міжконтактного зазору. Штрихова крива описує форму хвилястої межі вздовж одного періоду.

На рис. 7 подано графіки розподілу контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x})$ за різної маси заповнювача \tilde{m} під дією навантаження $\tilde{P}^\infty = 0,003$. Горизонтальні ділянки відповідають тиску газу в зазорі. З віддаленням від зазору контактний тиск монотонно зростає, досягаючи максимуму в точках $\pm 0,5$ з

максимальною висотою виступів хвилястої межі. За більшої маси газу тиск заповнювача в зазорі більший, а контактний тиск поза зазором менший.

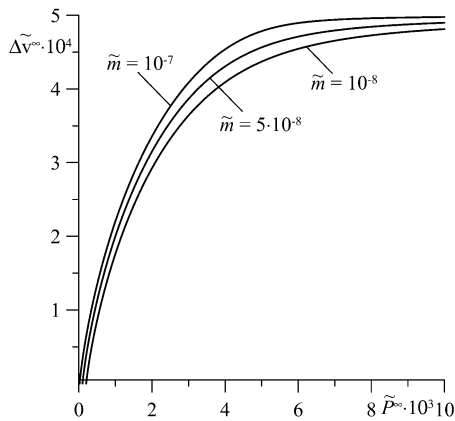


Рис. 4.

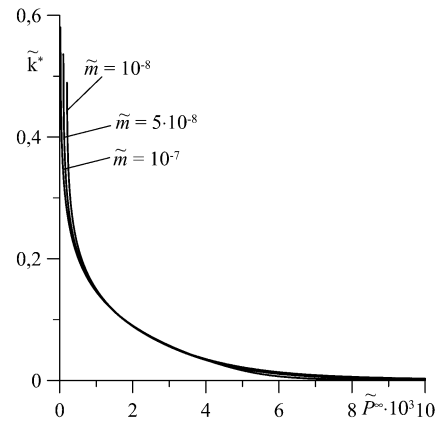


Рис. 5.

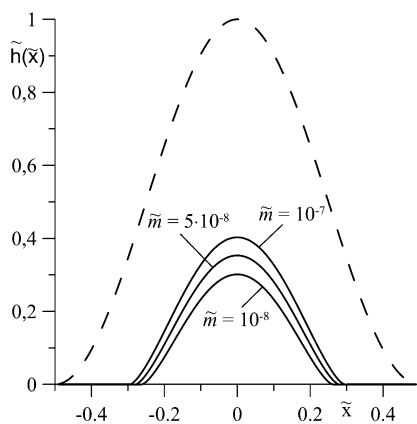


Рис. 6.

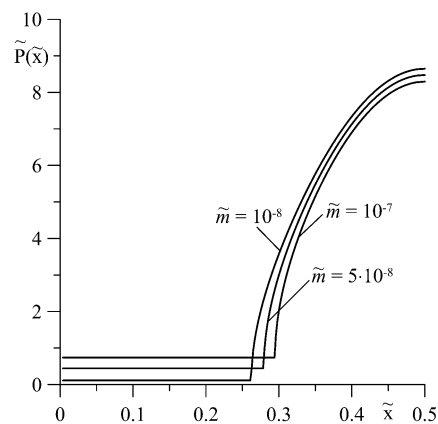


Рис. 7.

Висновки. Досліджено контакт за умов плоскої деформації двох пружних ізотропних півнескінченних тіл, межа одного з яких прямолінійна, а іншого – хвиляста. Внаслідок нерівності однієї межі контакт тіл неповний і між ними виникають зазори, що містять ідеальний газ, стан якого описує рівняння Клапейрона–Менделєєва. Довжина зазорів та тиск газу заздалегідь невідомі та змінюються разом з навантаженням. Сформульовану контактну задачу зведено до системи двох рівнянь – сингулярного інтегрального рівняння відносно висоти зазорів та трансцендентного відносно їх довжини. Досліджено залежності довжини та висоти зазорів, тиску газу, контактного тиску, контактної податливості тіл від прикладеного навантаження та маси газу. Виявлено, що зі збільшенням навантаження та маси газу в зазорах тиск газу та контактне зближення тіл зростають, а контактна податливість тіл зменшується.

1. Горячева И., Мартыняк Р. Периодические контактные задачи с трением и изнашиванием поверхностей // Развитие идей Л. А. Галина в механике. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. – С. 305–335.
2. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартыняк Р. М. Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах // Теорет. и прикл. механика. - 2013. - 7, № 53. - С. 45–52.
3. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартыняк Р. М. Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 1. – С. 103–111.

4. Максимук О. В. Періодична контактна задача про взаємодію зубчастої та плоскої поверхонь // *Машинознавство*. – 2001. – № 2. – С. 13–17.
5. Маланчук Н. Локальне фрикційне проковзування пружних тіл із хвилястим рельєфом поверхонь // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. – 2013. – Вип. 17. – С. 112–119.
6. Goryacheva I. G., Martynyak R. M. Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // *Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol.* – 2014. – **228**, № 7. – P. 707–716.
7. Kit G. S., Martynyak R. M., Machishin I. M. The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, № 3. – P. 292–299.
8. Kryshchak A., Martynyak R. Frictional contact of two elastic half-planes with wavy surfaces // *J. Friction and Wear*. – 2000. – **21**, № 5. – P. 1–8.
9. Kuznetsov Ye. A. Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression // *Wear*. – 1985. – **102**, № 3. – P. 177–194.
10. Martynyak R. M. The contact of a half-space and an uneven base in the presence of an intercontact gap filled by an ideal gas // *J. Math. Sci.* – 2001. – **107**, № 1. – P. 3680–3685.
11. Martynyak R. M. Mechanothermodiffusion interaction of bodies with regard for the filler of intercontact gaps // *Materials Science*. – 2000. – **36**, № 2. – P. 300–304.
12. Martynyak R., Chumak K. Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermoelastic contact of solids // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 2012. – **55**, № 4. – P. 1170–1178.
13. Martynyak R., Chumak K. Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap // *Materials Science*. – 2009. – **45**, № 4. – P. 513–522.
14. Martynyak R. M., Kryshchak A. A. Strength of a system of mated anisotropic half-planes with surface recesses // *Int. J. Eng. Sci.* – 2001. – **39**, № 4. – P. 403–413.
15. Sloboidian B., Chumak K., Martynyak R. Mechanical and thermal effect of a filler of intercontact gaps on contact between two semi-infinite solids with microtextured surfaces // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. – 2013. – Вип. 17. – С. 168–174.

ВЛИЯНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В МЕЖПОВЕРХНОСТНЫХ ЗАЗОРАХ НА КОНТАКТ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ С ВОЛНИСТЫМ РЕЛЬЕФОМ ПОВЕРХНОСТИ

Исследован контакт двух полубесконечных упругих тел, одно из которых имеет волнистую поверхность, при наличии в межповерхностных зазорах идеального газа, состояние которого описывает уравнение Клапейрона–Менделеева. Сформулированная контактная задача сведена к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) с ядром Гильберта относительно высоты зазоров, которое решено аналитически. Из условия ограниченности решения этого СИУ и из уравнения состояния газа получена система уравнений для определения длины зазоров и давления газа. Проанализированы зависимости длины зазоров, давления газа, высоты зазоров, контактного сближения и контактной податливости тел от нагрузки.

THE EFFECT OF AN IDEAL GAS IN INTERFACIAL GAPS ON THE CONTACT BETWEEN TWO ELASTIC BODIES WITH WAVY SURFACE RELIEF

The contact between two semi-infinite elastic bodies, one of which has a wavy surface, in the presence of an ideal gas in interface gaps is investigated. The state of the gas is described by the Clapeyron-Mendeleev equation. The formulated contact problem is reduced to a singular integral equation with Hilbert kernel for a height of the gaps, which is solved analytically. To determine a length of the gaps and a gas pressure, the system of equations is obtained from the consistency condition of a solution for this singular integral equation and the gas law. The dependences of the length of the gaps, the gas pressure, the height of the gaps, the average normal displacement and the contact compliance of the bodies on the load are analyzed.