

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ В ОКОЛІ ЗАКРІПЛЕНОГО ТОРЦЯ ЦИЛІНДРА ЗА ОСЬОВОГО РОЗТЯГУ З ВИКОРИСТАННЯМ ВАРІАЦІЙНОГО МЕТОДУ ОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

З допомогою варіаційного методу однорідних розв'язків досліджено концентрацію напружень в околі жорстко закріпленого торця циліндра, твірна якого більша за діаметр. Протилежний торець навантажено розподіленими нормальними силами. Проаналізовано розподіли компонент тензора напружень і вектора переміщень на торцях циліндра та у поперечних перерізах на деяких відстанях від них.

Вступ. У багатьох прикладних наукових дослідженнях, зокрема, у теорії міцності твердих тіл, виникають задачі визначення напружено-деформованого стану циліндричних тіл. Розвиткові методів розв'язування таких задач та їх вивченню присвячені праці [1–3, 7].

Відомим є метод однорідних розв'язків для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для циліндра [3]. В його основі лежить подання шуканого розв'язку розвиненням за повними системами власних функцій (однорідними розв'язками), знайденими для циліндра, на бічній поверхні якого задано однорідні умови в напруженнях. Вибираючи належно коефіцієнти у розвиненні розв'язку, за певних обмежень можна задовольнити ненульові крайові умови на торцях циліндра.

У працях [1, 2] розроблено метод перехресної суперпозиції для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності. Він базується на поданні розв'язку у вигляді суми двох складових, одна з яких забезпечує задоволення крайових умов на торці, а інша – на бічній поверхні. Кожну зі складових записують у вигляді розвинення за повними системами гіперболічних (тригонометричних) та циліндричних функцій. Коефіцієнти розвинень визначають, підпорядковуючи розв'язок заданим крайовим умовам на торцях і бічній поверхні циліндра. При цьому приходять до безмежної системи алгебричних рівнянь.

У статті [5] розвинено варіаційний метод однорідних розв'язків для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для півбезмежного циліндра з вільною бічною поверхнею за заданих на торці напружень, переміщень і мішаних умов. Підпорядковують розв'язок крайовим умовам, заданим на торці, за квадратичною нормою. Реалізація такого методу призводить до безмежної системи лінійних алгебричних рівнянь, яку розв'язують методом редукції, задаючись у сумах скінченною кількістю членів.

Метою цієї статті – дослідити концентрацію напружень в околі жорстко закріпленого торця довгого циліндра за осьового розтягу нормальними силами, прикладеними до його іншого торця, а також проаналізувати розподіли компонент напружень і переміщень на різних відстанях від відповідних торців циліндра.

Формулювання задачі. Розглянемо скінченний циліндр $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq L$ (r, θ, z – безрозмірні циліндричні координати, $L > 2$), бічна поверхня якого $r = 1$ вільна від навантажень:

$$\sigma_{rr}|_{r=1} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=1} = 0. \quad (1)$$

Торець циліндра $z = 0$ жорстко защемлений, а до торця $z = L$ прикладено нормальні сили $\sigma(r)$:

$$u_z|_{z=0} = 0, \quad u_r|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}|_{z=L} = \sigma(r), \quad \sigma_{rz}|_{z=L} = 0. \quad (3)$$

Розв'язок лінійної задачі (1)–(3) подамо у вигляді суми складових:

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{ij}.$$

Тут $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}$ – основний напружено-деформований стан, $\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\varepsilon}_{ij}$ – збурення ($i, j = r, \theta, z$). Аналогічний підхід до розв'язування подібної задачі наведено в статті [6] для прямокутної області.

Виберемо компоненту напружень основного стану у вигляді $\bar{\sigma}_{zz} = \bar{\sigma}$, де $\bar{\sigma} = 2 \int_0^1 \sigma(\xi) \xi d\xi$, а решту компонент вважатимемо нульовими. Тоді компоненти тензора деформації основного стану матимуть вигляд:

$$\bar{\varepsilon}_{rr} = -\frac{\nu \bar{\sigma}}{E}, \quad \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\frac{\nu \bar{\sigma}}{E}, \quad \bar{\varepsilon}_{zz} = \frac{\bar{\sigma}}{E}, \quad \bar{\varepsilon}_{rz} = 0, \quad \bar{\varepsilon}_{r\theta} = 0, \quad \bar{\varepsilon}_{\theta z} = 0, \quad (4)$$

де E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу.

Переміщення, які відповідають деформаціям (4) на торці $z = 0$ циліндра, будуть:

$$\bar{u}_r|_{z=0} = \frac{-\nu \bar{\sigma}}{E} r, \quad \bar{u}_z|_{z=0} = 0.$$

Збурення, які виникають в околах торців циліндра, визначають напруження $\tilde{\sigma}_{ij}$. Оскільки довжина циліндра L перевищує його діаметр ($L > 2$), то збурення протилежних його кінців практично не взаємодіють між собою. Тому задачу для збурень можна звести до двох незалежних задач для півбезмежного циліндра [5], на торці якого задано умови (5) та (6) (задачі I та II відповідно):

$$\tilde{u}_r|_{z=0} = \frac{\nu \bar{\sigma}}{E} r, \quad \tilde{u}_z|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}|_{z=0} = \sigma(r) - \bar{\sigma}, \quad \tilde{\sigma}_{rz}|_{z=0} = 0. \quad (6)$$

Задача I відповідає торцю $z = 0$, а задача II – торцю $z = L$ вихідного скінченного циліндра. Розв'язки кожної з них слід підпорядкувати умові згасання компонент напружень та деформацій за необмеженого зростання координати z .

Тоді розв'язок вихідної задачі

$$\sigma_{ij}(r, z) = \bar{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(r, z) + \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}(r, L - z),$$

$$\varepsilon_{ij}(r, z) = \bar{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}(r, z) + \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(2)}(r, L - z),$$

де верхні індекси у дужках вказують на розв'язки задач I та II для збурень відповідно.

Числове дослідження задачі. Для розв'язування задач I та II, які відповідають збуреному напружено-деформованому стану, застосовуємо метод [5], який базується на розвиненні компонент тензора напружень і вектора переміщень за повними системами комплексних осесиметричних однорідних розв'язків рівнянь Ляме [3].

На рис. 1–10 наведено числові результати розв'язування цих задач для півбезмежного циліндра, бічна поверхня якого вільна від навантажень. Під час розрахунків приймали:

$$\sigma(\xi) = \sigma_0 \exp(-100(\xi - 0.5)^2), \quad \sigma_0 = 0.005E.$$

Графіки на рис. 1 і 2 ілюструють концентрацію напружень $\tilde{\sigma}_{zz}/\bar{\sigma}$, $\tilde{\sigma}_{rz}/\bar{\sigma}$ в околі жорстко закріпленого торця циліндра, а на рис. 3, 4 – збурення поля безрозмірних переміщень \tilde{u}_z/u_0 , \tilde{u}_r/u_0 ($u_0 = \bar{\sigma}R/E$) в околі торця, навантаженого нормальними силами. На рис. 5 та 6 побудовані залежності напружень $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}/\bar{\sigma}$ від координати r , обчислені для задач I та II відповідно. Криві 1–4 на рис. 1–6 відповідають відстаням 0, 0,6, 1,2 та 2,3 від відповідних торців.

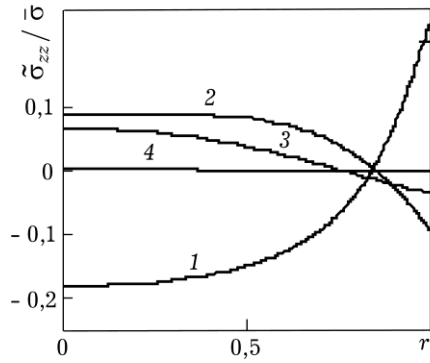


Рис. 1.

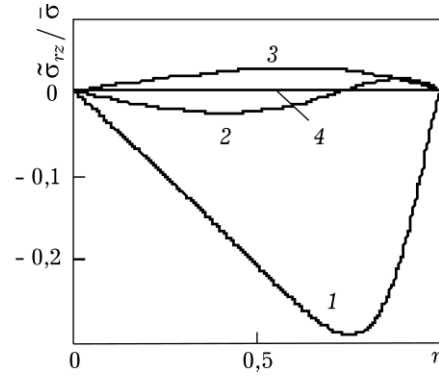


Рис. 2.

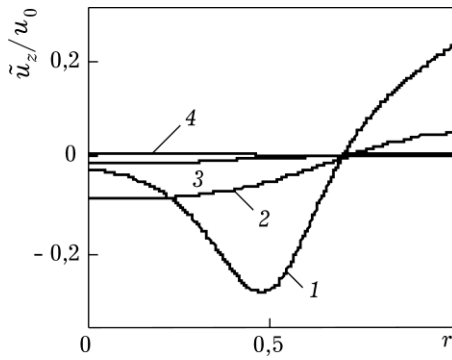


Рис. 3.

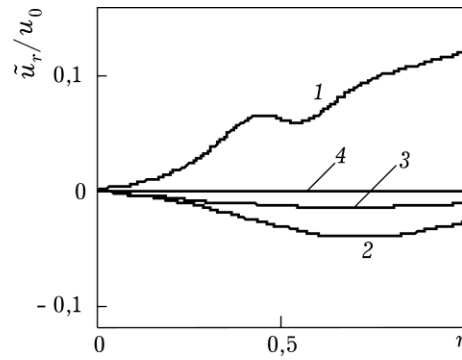


Рис. 4.

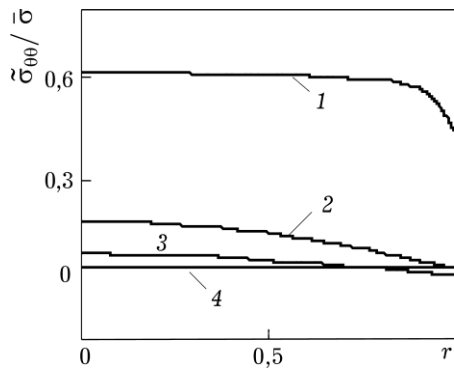


Рис. 5.

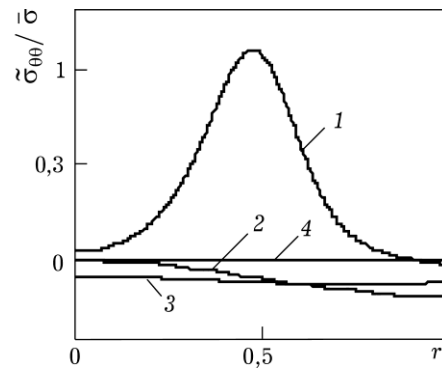


Рис. 6.

На рис. 7–10 для порівняння подано залежності напружень $\tilde{\sigma}_{zz}(0,z)/\bar{\sigma}$, $\tilde{\sigma}_{rr}(0,z)/\bar{\sigma}$ та $\tilde{\sigma}_{zz}(1,z)/\bar{\sigma}$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(1,z)/\bar{\sigma}$ від координати z , обчислені для задач I (штрихова лінія) і II (суцільна).

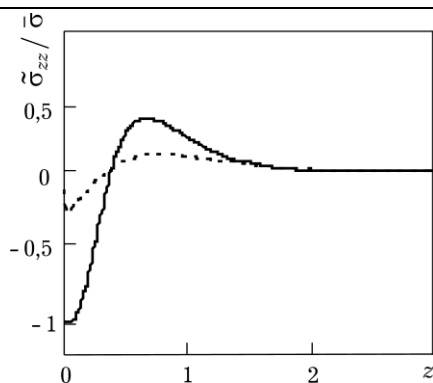


Рис. 7.

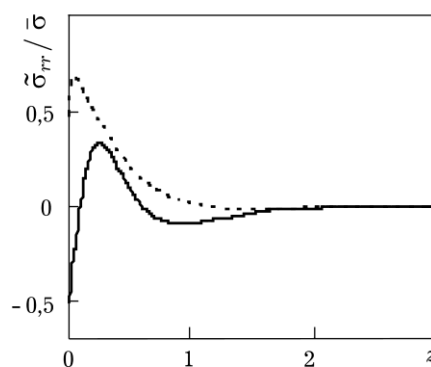


Рис. 8.

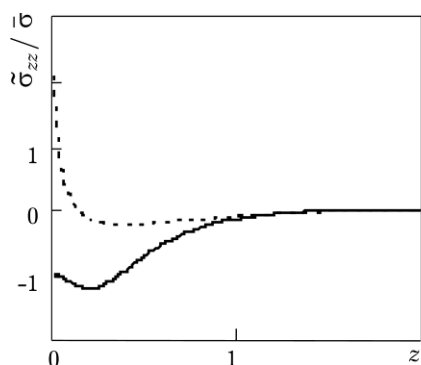


Рис. 9.

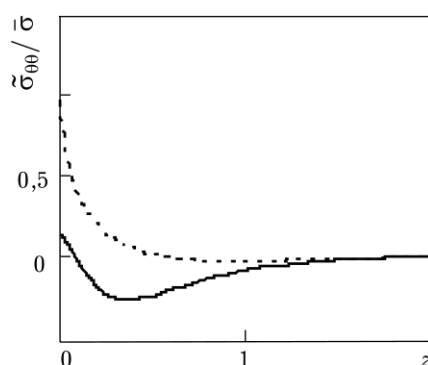


Рис. 10.

Обчислювали, використовуючи метод редукції [5]. Як бачимо, на рис. 1 (крива 1) в околі кутової точки напруження різко зростають, що якісно й кількісно відповідає відомим теоретичним уявленням і результатам експериментальних досліджень про поведінку напружень у цих точках. У статті [7] досліджено параметри сингулярності напружень у кутових точках на межі контакту різнорідних тіл прямокутного перерізу за однорідного нагріву та одновісного розтягу. Подібний підхід до вивчення сингулярності напружень у кутовій точці можна застосувати для циліндричних тіл.

Висновки. З числових результатів, отриманих для задач I та II, випливає, що напруження швидко згасають з віддаленням від торцевої поверхні циліндра. Така їх поведінка узгоджується із принципом Сен-Венана [4] про локальний вплив на загальний напружений стан самозрівноважених зовнішніх сил. Одержані розв'язки з достатньою точністю можна використовувати для скінченних циліндричних тіл, довжина перевершує діаметр.

1. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О точном решении осесимметричной задачи теории упругости для круглой жесткозакрепленной плиты // Изв. АН Арм. ССР. – 1963. – XVI, № 5. – С. 125–132.
3. Лурье А. И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
4. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости – М.: Наука, 1975. – 576 с.
5. Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І. Варіаційний метод однорідних розв'язків у осесимметричних задачах теорії пружності для півбезмежного циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 1. – С. 145–155.

6. Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І. Теоретико-експериментальне визначення залишкових напружень у плоских з'єднаннях // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – 45, № 2. – С. 153–162.
7. Chekurin V. F., Postolaki L. I. Application of variational method of homogeneous solutions for determination of stress concentration on the boundary of dissimilar isotropic elastic materials. Plane problem // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2013. – №17. – С. 209–218.
8. Sburlati R. Three-dimensional analytical solution for an axisymmetric biharmonic problem // J. Elast. – 2009. – 95. – P. 79–97.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ЗАКРЕПЛЕННОГО ТОРЦА ЦИЛИНДРА ПРИ ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ

С использованием вариационного метода однородных решений исследована концентрация напряжений в окрестности жестко закрепленного торца цилиндра, образующая которого больше диаметра. Противоположный торец цилиндра нагружен распределенными нормальными силами. Проанализированы распределения компонент тензора напряжений и вектора перемещений на торцах цилиндра и в поперечных сечениях на некоторых расстояниях от них.

STUDY OF STRESS CONCENTRATION IN THE NEIGHBORHOOD OF THE FIXED END OF THE CYLINDER UNDER AXIAL STRETCHING USING THE VARIATIONAL METHOD OF HOMOGENEOUS SOLUTIONS

Stress concentration in the neighborhood of the rigidly fixed end of the cylinder whose length is greater than its diameter has been studied using the variational method of homogeneous solutions. The opposite end of the cylinder is loaded by normally distributed forces. Analysis of the distribution of stresses and displacements components at the ends of the cylinder and in the cross-sections at some distance from them has been conducted.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.06.15