УДК 512.64

А. М. Романів

ПРО ФОРМУ СМІТА НАЙБІЛЬШОГО СПІЛЬНОГО ДІЛЬНИКА ОДНОГО КЛАСУ МАТРИЦЬ

Для двох неособливих матриць третього порядку над комутативною областю Безу стабільного рангу 1,5 вказано форму Сміта їх найбільшого спільного лівого дільника.

Нехай R − комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 [4] з $1 \neq 0$. За структурою R є областю елементарних дільників [7], тобто для кожної матриці D існують такі оборотні матриці P, Q відповідних розмірів, що

$$PDQ = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)\,, \text{ де } d_i \,|\, d_{i+1}\,,\ i = 1, \ldots, n-1\,.$$

Матрицю $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ називають формою Сміта, а матриці P та Q − лівими та правими перетворювальними матрицями для матриці A.

Нехай A, B − неособливі $n \times n$ матриці над R. Якщо $A = BC$, то кажуть, що матриця B є лівим дільником матриці A. Якщо $A = DA_1$ та $B = DB_1$, то матрицю D називають спільним лівим дільником матриць A та B. Окрім того, якщо матриця D ділиться зліва на кожний інший спільний лівий дільник матриць A та B, то її називають **найбільшим спільним лівим дільником** (н.с.л.д.) матриць A та B (у позначеннях $(A,B)_l$).

Метод знаходження найбільшого спільного дільника (н.с.д.) запропонував Ц. Макдаффі [8] у 1933 р. Він базується на результатах Е. Кахена [5] та А. Шателе [6]. І. Капланський [7] показав, що н.с.л.д. визначений однозначно з точністю до правої асоційовності. У 80-их роках минулого століття М. Ньюмен, вивчаючи властивості н.с.д., сформулював задачу, яка полягала у встановленні взаємозв'язків між формами Сміта двох матриць та формами Сміта їх найбільшого спільного дільника над комутативною областю головних ідеалів. Р. Томпсон [10], досліджуючи цю задачу, вказав деякі умови подільності інваріантних множників двох матриць та інваріантних множників їх найбільшого спільного дільника. У працях [2] та [3] задачу М. Ньюмена повністю розв'язано для матриць другого порядку та для досить широких класів матриць довільного порядку.

У цій статті продовжуються дослідження, розпочаті в праці [3], зокрема, описана форма Сміта н.с.л.д. двох матриць третього порядку над комутативною областю Безу стабільного рангу 1,5.

Нехай A та B − неособливі 3×3 матриці над R. Для них існують такі оборотні матриці P_A, Q_A та P_B, Q_B, що

$$P_A A Q_A = \mathrm{E}\,, \text{ де } \mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\,,\ \varepsilon_i \,|\, \varepsilon_{i+1}\,,\ i = 1,2\,,$$

$$P_B B Q_B = \Delta\,, \text{ де } \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)\,,\ \delta_i \,|\, \delta_{i+1}\,,\ i = 1,2\,.$$

Позначимо через $\mathbf{P}_A$ та $\mathbf{P}_B$ множини лівих перетворювальних матриць для матриць A та B, відповідно. Згідно з відомими результатами [1, 9] $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}} P_A$, $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_{\Delta} P_B$, де

$$\mathbf{G}_{\mathrm{E}} = \left\{ H \in GL_3(R) \quad | \quad H\mathrm{E} = \mathrm{E}H_1 \quad \textit{для деякої матриці } H_1 \in GL_3(R) \right\},$$

і є за структурою мультиплікативною групою. Аналогічно вводиться $\mathbf{G}_{\Delta}$.

Лема 1. Н.с.д. елементів кільця R має такі властивості:

1) $\left(\dfrac{a}{(a,b)}, \dfrac{ac-b}{(a,b)} \right) = 1\,,\ a, b \neq 0\,.$

2) *Нехай* $(a,c)=1$, $b|d$, *тоді* $(ab,cd)=(ab,d)$.

Д о в е д е н н я не викликає жодних труднощів ◊.

Лема 2. *Нехай* $P_BP_A^{-1}=\|s_{ij}\|_1^3=S$. *Тоді елемент*

$$((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](s_{21},s_{31}))=p$$

є інваріантом стосовно вибору перетворювальних матриць P_B *та* P_A.

Д о в е д е н н я. Нехай F_A та F_B – інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тобто $F_A\in\mathbf{P}_A$, $F_B\in\mathbf{P}_B$. Тоді існують такі $H_A\in\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ та $H_B\in\mathbf{G}_\Delta$, що $F_A=H_AP_A$, $F_B=H_BP_B$. Позначимо $F_BF_A^{-1}=\|s'_{ij}\|_1^3$. Розглянемо добуток матриць

$$F_BF_A^{-1}=H_BP_B(H_AP_A)^{-1}=H_BP_BP_A^{-1}H_A^{-1}=H_BSH_A^{-1},$$

де $S=P_BP_A^{-1}$. Позначимо $H_BS=\|k_{ij}\|_1^3$. На підставі наслідку 6 із праці [9] матриця H_B має вигляд

$$H_B=\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1}h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ \frac{\delta_3}{\delta_1}h_{31} & \frac{\delta_3}{\delta_2}h_{32} & h_{33} \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Отже,

$$k_{21}=\frac{\delta_2}{\delta_1}h_{21}s_{11}+h_{22}s_{21}+h_{23}s_{31},\ k_{31}=\frac{\delta_3}{\delta_1}h_{31}s_{11}+\frac{\delta_3}{\delta_2}h_{32}s_{21}+h_{33}s_{31}.$$

Розглянемо

$$((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](k_{21},k_{31}))=$$

$$=\left((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](\frac{\delta_2}{\delta_1}h_{21}s_{11}+h_{22}s_{21}+h_{23}s_{31},\frac{\delta_3}{\delta_1}h_{31}s_{11}+\frac{\delta_3}{\delta_2}h_{32}s_{21}+h_{33}s_{31})\right)=d.$$

Оскільки $(\varepsilon_2,\delta_2)\left|\frac{\delta_2}{\delta_1}[\varepsilon_1,\delta_1]\right.$ та $(\varepsilon_2,\delta_2)\left|\frac{\delta_3}{\delta_1}[\varepsilon_1,\delta_1]\right.$, то

$$d=\left((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](h_{22}s_{21}+h_{23}s_{31},\frac{\delta_3}{\delta_2}h_{32}s_{21}+h_{33}s_{31})\right).$$

Оскільки p є дільником всіх доданків, приходимо до висновку, що $p|d$, тобто

$$((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](s_{21},s_{31}))\,|\,((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](k_{21},k_{31})).$$

З іншого боку, $S=H_B^{-1}\|k_{ij}\|_1^3$. Зауважимо, що $H_B^{-1}\in\mathbf{G}_\Delta$. Тоді на підставі аналогічних до щойно наведених міркувань, отримаємо, що $d|p$, тобто

$$((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](k_{21},k_{31}))\,|\,((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](s_{21},s_{31})).$$

А це означає, що

$$((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](k_{21},k_{31}))=((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](s_{21},s_{31})).$$

Позначимо $SH_A^{-1}=\|t_{ij}\|_1^3$. Оскільки $H_A^{-1}\in\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, то згідно з наслідком 6 із [9] матриця H_A^{-1} має вигляд

$$H_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} v_{31} & \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} v_{32} & v_{33} \end{matrix} \right\| . \tag{2}$$

Отже,

$$t_{21} = v_{11}s_{21} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21}s_{22} + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} v_{31}s_{23}\ ,\ t_{31} = v_{11}s_{31} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21}s_{32} + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} v_{31}s_{33}\ .$$

Розглянемо

$$\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](t_{21}, t_{31})\big) =$$

$$= \left((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](v_{11}s_{21} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21}s_{22} + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} v_{31}s_{23}, v_{11}s_{31} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21}s_{32} + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} v_{31}s_{33}) \right) = r.$$

Оскільки $(\varepsilon_2, \delta_2) \Big| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}[\varepsilon_1, \delta_1]$ та $(\varepsilon_2, \delta_2) \Big| \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}[\varepsilon_1, \delta_1]$, то

$$r = \big((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](v_{11}s_{21}, v_{11}s_{31})\big).$$

Оскільки p є дільником всіх доданків, то $p|r$, тобто

$$\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31})\big) \Big| \big((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](t_{21}, t_{31})\big).$$

З іншого боку, $S = \|t_{ij}\|_1^n H_A$. На підставі аналогічних до щойно наведених міркувань, отримаємо, що $r|p$, тобто

$$\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](t_{21}, t_{31})\big) \Big| \big((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31})\big).$$

А це означає, що

$$\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31})\big) = \big((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](t_{21}, t_{31})\big).$$

Зваживши на асоціативність кільця $M_3(R)$, завершуємо доведення. ◊

Лема 3. *Нехай* $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^3 = S$. *Тоді елемент*

$$\left((\varepsilon_3, \delta_3), [\varepsilon_1, \delta_1] \frac{(\triangle\varepsilon_2, s_{31}\delta_2)}{\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31})\big)}, \frac{\varepsilon_2\delta_2}{\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31})\big)}(s_{31}, s_{32}) \right) = q,$$

де $\triangle = \begin{vmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}$ *є інваріантом стосовно вибору перетворювальних матриць* P_B *та* P_A.

Д о в е д е н н я. Використовуючи лему 2, елемент q можна записати у вигляді $q = \left((\varepsilon_3, \delta_3), [\varepsilon_1, \delta_1] \frac{(\triangle\varepsilon_2, s_{31}\delta_2)}{p}, \frac{\varepsilon_2\delta_2}{p}(s_{31}, s_{32}) \right)$, де елемент p є інваріантом стосовно вибору перетворювальних матриць P_B *та* P_A.

Аналогічно, як під час доведення леми 2, розглядаємо F_A та F_B − інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B та їх добуток:

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Позначимо $H_B S = \|k_{ij}\|_1^3$, де матриця H_B має вигляд (1). Отже,

$$k_{21} = \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21}s_{11} + h_{22}s_{21} + h_{23}s_{31},$$

$$k_{31}=\frac{\delta_3}{\delta_1}h_{31}s_{11}+\frac{\delta_3}{\delta_2}h_{32}s_{21}+h_{33}s_{31},\ k_{32}=\frac{\delta_3}{\delta_1}h_{31}s_{12}+\frac{\delta_3}{\delta_2}h_{32}s_{22}+h_{33}s_{32},$$

$$\begin{vmatrix} k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \end{vmatrix}=\mu_1\vartriangle_1+\mu_2\vartriangle_2+\mu_3\vartriangle=\vartriangle_k,$$

де

$$\mu_1=\begin{vmatrix} \frac{\delta_2}{\delta_1}h_{21} & h_{22} \\ \frac{\delta_3}{\delta_1}h_{31} & \frac{\delta_3}{\delta_2}h_{32} \end{vmatrix},\ \mu_2=\begin{vmatrix} \frac{\delta_2}{\delta_1}h_{21} & h_{23} \\ \frac{\delta_3}{\delta_1}h_{31} & h_{33} \end{vmatrix},\ \mu_3=\begin{vmatrix} h_{22} & h_{23} \\ \frac{\delta_3}{\delta_2}h_{32} & h_{33} \end{vmatrix},$$

$$\vartriangle_1=\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix},\ \vartriangle_2=\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix},\ \vartriangle=\begin{vmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо

$$\left((\varepsilon_3,\delta_3),[\varepsilon_1,\delta_1]\frac{(\vartriangle_k\varepsilon_2,k_{31}\delta_2)}{p},\frac{\varepsilon_2\delta_2}{p}(k_{31},k_{32})\right)=q_k,$$

де

$$(\vartriangle_k\varepsilon_2,k_{31}\delta_2)=$$
$$=\left(\left(\mu_1\vartriangle_1+\mu_2\vartriangle_2+\mu_3\vartriangle\right)\varepsilon_2,\left(\frac{\delta_3}{\delta_1}h_{31}s_{11}+\frac{\delta_3}{\delta_2}h_{32}s_{21}+h_{33}s_{31}\right)\delta_2\right),$$

$$(k_{31},k_{32})=\left(\frac{\delta_3}{\delta_1}h_{31}s_{11}+\frac{\delta_3}{\delta_2}h_{32}s_{21}+h_{33}s_{31},\frac{\delta_3}{\delta_1}h_{31}s_{12}+\frac{\delta_3}{\delta_2}h_{32}s_{22}+h_{33}s_{32}\right).$$

Оскільки $(\varepsilon_3,\delta_3)\left|\frac{\delta_3}{\delta_1}[\varepsilon_1,\delta_1]\right.$, $(\varepsilon_3,\delta_3)|\delta_3$ та $(\varepsilon_3,\delta_3)|\varepsilon_2\delta_3$, то

$$q_k=\left((\varepsilon_3,\delta_3),[\varepsilon_1,\delta_1]\frac{\left(\left(\mu_2\vartriangle_2+\mu_3\vartriangle\right)\varepsilon_2,h_{33}s_{31}\delta_2\right)}{p},\frac{\varepsilon_2\delta_2}{p}(h_{33}s_{31},h_{33}s_{32})\right).$$

Оскільки q є дільником всіх доданків, приходимо до висновку, що $q|q_k$.

З іншого боку, $S=H_B^{-1}\|k_{ij}\|_1^3$. Зауважимо, що $H_B^{-1}\in\mathbf{G}_\Delta$. Тоді на підставі аналогічних до щойно наведених міркувань, отримаємо, що $q_k|q$. А це означає, що

$$q=\left((\varepsilon_3,\delta_3),[\varepsilon_1,\delta_1]\frac{(\vartriangle\varepsilon_2,s_{31}\delta_2)}{p},\frac{\varepsilon_2\delta_2}{p}(s_{31},s_{32})\right)=$$
$$=\left((\varepsilon_3,\delta_3),[\varepsilon_1,\delta_1]\frac{(\vartriangle_k\varepsilon_2,k_{31}\delta_2)}{p},\frac{\varepsilon_2\delta_2}{p}(k_{31},k_{32})\right)=q_k.$$

Позначимо $SH_A^{-1}=\|t_{ij}\|_1^3$. Оскільки $H_A^{-1}\in\mathbf{G}_\mathrm{E}$, то з наслідку 6 із праці [9] матриця H_A^{-1} має вигляд (2). Отже,

$$t_{21}=v_{11}s_{21}+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}v_{21}s_{22}+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}v_{31}s_{23},$$

$$t_{31}=v_{11}s_{31}+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}v_{21}s_{32}+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}v_{31}s_{33},\ t_{32}=v_{12}s_{31}+v_{22}s_{32}+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}v_{32}s_{33},$$

$$\begin{vmatrix} t_{21} & t_{22} \\ t_{31} & t_{32} \end{vmatrix}=\vartriangle\gamma_1+\vartriangle_3\gamma_2+\vartriangle_4\gamma_3=\vartriangle_t,$$

де

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}, \ \gamma_2 = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} v_{31} & \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} v_{32} \end{vmatrix}, \ \gamma_3 = \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21} & v_{22} \\ \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} v_{31} & \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} v_{32} \end{vmatrix},$$

$$\vartriangle = \begin{vmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}, \ \vartriangle_3 = \begin{vmatrix} s_{21} & s_{23} \\ s_{31} & s_{33} \end{vmatrix}, \ \vartriangle_4 = \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо

$$\left((\varepsilon_3, \delta_3), [\varepsilon_1, \delta_1] \frac{(\vartriangle_t \varepsilon_2, t_{31}\delta_2)}{p}, \frac{\varepsilon_2\delta_2}{p}(t_{31}, t_{32}) \right) = q_t,$$

де

$$(\vartriangle_t \varepsilon_2, t_{31}\delta_2) =$$

$$= \left((\vartriangle\gamma_1 + \vartriangle_3\gamma_2 + \vartriangle_4\gamma_3)\varepsilon_2, (v_{11}s_{31} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21}s_{32} + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} v_{31}s_{33})\delta_2 \right),$$

$$(t_{31}, t_{32}) = (v_{11}s_{31} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21}s_{32} + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} v_{31}s_{33}, v_{12}s_{31} + v_{22}s_{32} + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} v_{32}s_{33}).$$

Оскільки $(\varepsilon_3, \delta_3) \left| \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}[\varepsilon_1, \delta_1] \right.$ та $(\varepsilon_3, \delta_3) | \delta_2\varepsilon_3$, то

$$q_t = \left((\varepsilon_3, \delta_3), [\varepsilon_1, \delta_1] \frac{\left(\vartriangle\gamma_1\varepsilon_2, (v_{11}s_{31} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21}s_{32})\delta_2 \right)}{p}, \frac{\varepsilon_2\delta_2}{p}(v_{11}s_{31} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21}s_{32}, v_{12}s_{31} + v_{22}s_{32}) \right),$$

Оскільки q є дільником всіх доданків, приходимо до висновку, що $q | q_t$.

З іншого боку, $S = \|t_{ij}\|_1^3 H_A$. На підставі аналогічних до щойно наведених міркувань, отримаємо, що $q_t | q$. А це означає, що

$$q = \left((\varepsilon_3, \delta_3), [\varepsilon_1, \delta_1] \frac{(\vartriangle\varepsilon_2, s_{31}\delta_2)}{p}, \frac{\varepsilon_2\delta_2}{p}(s_{31}, s_{32}) \right) =$$

$$= \left((\varepsilon_3, \delta_3), [\varepsilon_1, \delta_1] \frac{(\vartriangle_t \varepsilon_2, t_{31}\delta_2)}{p}, \frac{\varepsilon_2\delta_2}{p}(t_{31}, t_{32}) \right) = q_t.$$

Зваживши на асоціативність кільця $M_3(R)$, завершуємо доведення. ◊

Теорема. *Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 і A, B – неособливі 3×3 матриці над R, причому*

$$P_A A Q_A = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = E, \ \varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}, \ i = 1, 2,$$

$$P_B B Q_B = \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \Delta, \ \delta_i | \delta_{i+1} \ \ i = 1, 2.$$

Тоді форма Сміта найбільшого спільного лівого дільника матриць A та B має вигляд $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, де

$$\varphi_1 = (\varepsilon_1, \delta_1), \ \varphi_2 = ((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31})),$$

$$\varphi_3 = \left((\varepsilon_3, \delta_3), \frac{[\varepsilon_1, \delta_1](\vartriangle\varepsilon_2, s_{31}\delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31}))}, \frac{\varepsilon_2\delta_2}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31}))}(s_{31}, s_{32}) \right),$$

де $\vartriangle = \begin{vmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}.$

Д о в е д е н н я. Відразу ж зауважимо, що згідно з лемами 2 та 3 елементи φ_2 та φ_3, а отже, і матриця Φ не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A *та* P_B.

Із доведення теореми 1 із [4] випливає, що форма Сміта н.с.л.д. матриць A та B, збігається з формою Сміта матриці $\|SE \quad \Delta\|$, де $S = P_B P_A^{-1}$. На підставі теореми 2 із [4] матриці P_A та P_B можна вибрати таким чином, що

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_{21} & 1 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Розглянемо матрицю

$$\|SE \quad \Delta\| = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ s_{21}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ s_{31}\varepsilon_1 & s_{32}\varepsilon_2 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & \delta_3 \end{Vmatrix}.$$

Нехай d_i, $i = 1,2,3$ – н.с.д. мінорів першого, другого та третього порядку матриці $\|SE \quad \Delta\|$, відповідно. Очевидно, що $d_1 = (\varepsilon_1, \delta_1)$.

Розглянемо н.с.д. мінорів другого порядку матриці $\|SE \quad \Delta\|$. Відкинувши елементи, які ділять один одного, отримаємо:

$$d_2 = \left(\varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_1\delta_2, \varepsilon_2\delta_1, \delta_1\delta_2, s_{21}\varepsilon_1\delta_1, s_{31}\varepsilon_1\delta_1\right).$$

Виконавши певні групування матимемо:

$$d_2 = \left(\varepsilon_2(\varepsilon_1,\delta_1), \delta_2(\varepsilon_1,\delta_1), \varepsilon_1\delta_1(s_{21},s_{31})\right) =$$
$$= \left((\varepsilon_1,\delta_1)(\varepsilon_2,\delta_2), \varepsilon_1\delta_1(s_{21},s_{31})\right) = (\varepsilon_1,\delta_1)\left((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](s_{21},s_{31})\right).$$

Отже,

$$\varphi_2 = \left((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1](s_{21},s_{31})\right).$$

Розглянемо н.с.д. мінорів третього порядку матриці $\|SE \quad \Delta\|$. Відкинувши нульові мінори та мінори, які ділять один одного, отримаємо:

$$d_3 = (\alpha, \beta),$$

де

$$\alpha = \left(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \delta_3\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_3\delta_2\varepsilon_1, \delta_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \delta_1\delta_3\varepsilon_2, \delta_1\delta_2\varepsilon_3, \delta_1\delta_2\delta_3, \delta_2\varepsilon_1\varepsilon_3\right),$$

$$\beta = \left(\delta_1\begin{vmatrix} s_{21}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ s_{31}\varepsilon_1 & s_{32}\varepsilon_2 \end{vmatrix}, s_{32}\delta_2\varepsilon_1\varepsilon_2, s_{31}\delta_1\delta_2\varepsilon_1, s_{21}\delta_1\delta_3\varepsilon_1, s_{32}\delta_1\delta_2\varepsilon_2, s_{21}\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3\right).$$

Погрупувавши відповідні елементи та позначивши $\vartriangle' = \begin{vmatrix} s_{21} & 1 \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}$, одержимо

$$\alpha = \left(\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_3,\delta_3), \delta_1\delta_2(\varepsilon_3,\delta_3), \delta_1\varepsilon_2(\varepsilon_3,\delta_3), \varepsilon_1\delta_2(\varepsilon_3,\delta_3)\right) =$$
$$= \left(\varepsilon_2(\varepsilon_1,\delta_1)(\varepsilon_3,\delta_3), \delta_2(\varepsilon_1,\delta_1)(\varepsilon_3,\delta_3)\right) = (\varepsilon_1,\delta_1)(\varepsilon_2,\delta_2)(\varepsilon_3,\delta_3),$$
$$\beta = \left(\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_2\vartriangle', \varepsilon_1\delta_1(\varepsilon_3,\delta_3)s_{21}, \varepsilon_1\delta_1\delta_2 s_{31}, \varepsilon_2\delta_2(\varepsilon_1,\delta_1)s_{32}\right) =$$
$$= \left(\delta_1\varepsilon_1\left(\varepsilon_2\vartriangle', (\varepsilon_3,\delta_3)s_{21}, \delta_2 s_{31}\right), \varepsilon_2\delta_2(\varepsilon_1,\delta_1)s_{32}\right),$$

тобто

$$d_3 = \left((\varepsilon_1,\delta_1)(\varepsilon_2,\delta_2)(\varepsilon_3,\delta_3), \delta_1\varepsilon_1\left((\varepsilon_3,\delta_3)s_{21}, \varepsilon_2\vartriangle', \delta_2 s_{31}\right), \varepsilon_2\delta_2(\varepsilon_1,\delta_1)s_{32}\right).$$

Розглянемо

$$\left((\varepsilon_3,\delta_3)s_{21}, \varepsilon_2\vartriangle', \delta_2 s_{31}\right) = \left(\varepsilon_3 s_{21}, \delta_3 s_{21}, \varepsilon_2\vartriangle', \delta_2 s_{31}\right) =$$

$$= (s_{21}, s_{31})\left(\varepsilon_3 \frac{s_{21}}{(s_{21}, s_{31})}, \varepsilon_2 \frac{\vartriangle'}{(s_{21}, s_{31})}, \delta_3 \frac{s_{21}}{(s_{21}, s_{31})}, \delta_2 \frac{s_{31}}{(s_{21}, s_{31})}\right) =$$

$$= (s_{21}, s_{31})\left(\varepsilon_2\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \frac{s_{21}}{(s_{21}, s_{31})}, \frac{\vartriangle'}{(s_{21}, s_{31})}\right), \delta_2\left(\frac{\delta_3}{\delta_2} \frac{s_{21}}{(s_{21}, s_{31})}, \frac{s_{31}}{(s_{21}, s_{31})}\right)\right).$$

Використовуючи лему 1, отримаємо:

$$(s_{21}, s_{31})\left(\varepsilon_2\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}, \frac{\vartriangle'}{(s_{21}, s_{31})}\right), \delta_2\left(\frac{\delta_3}{\delta_2}, \frac{s_{31}}{(s_{21}, s_{31})}\right)\right) =$$

$$= (s_{21}, s_{31})\left(\varepsilon_3, \frac{\vartriangle'\varepsilon_2}{(s_{21}, s_{31})}, \delta_3, \frac{s_{31}\delta_2}{(s_{21}, s_{31})}\right).$$

Тоді d_3 матиме вигляд

$$d_3 = \left((\varepsilon_1, \delta_1)(\varepsilon_2, \delta_2)(\varepsilon_3, \delta_3), \delta_1\varepsilon_1(s_{21}, s_{31})\left((\varepsilon_3, \delta_3), \frac{\vartriangle'\varepsilon_2}{(s_{21}, s_{31})}, \frac{s_{31}\delta_2}{(s_{21}, s_{31})}\right), \varepsilon_2\delta_2(\varepsilon_1, \delta_1)s_{32}\right).$$

Винесемо $d_1 = (\varepsilon_1, \delta_1)$ за дужки:

$$d_3 = d_1\left((\varepsilon_2, \delta_2)(\varepsilon_3, \delta_3), [\delta_1, \varepsilon_1](s_{21}, s_{31})\left((\varepsilon_3, \delta_3), \left(\frac{\vartriangle'\varepsilon_2}{(s_{21}, s_{31})}, \frac{s_{31}\delta_2}{(s_{21}, s_{31})}\right)\right), \varepsilon_2\delta_2 s_{32}\right) =$$

$$= d_1\left((\varepsilon_3, \delta_3)\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\delta_1, \varepsilon_1](s_{21}, s_{31})\big), [\delta_1, \varepsilon_1](s_{21}, s_{31})\left(\frac{\vartriangle'\varepsilon_2}{(s_{21}, s_{31})}, \frac{s_{31}\delta_2}{(s_{21}, s_{31})}\right), \varepsilon_2\delta_2 s_{32}\right) =$$

$$= (\varepsilon_1, \delta_1)\Big((\varepsilon_3, \delta_3)\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\delta_1, \varepsilon_1](s_{21}, s_{31})\big), [\delta_1, \varepsilon_1]\big(\vartriangle'\varepsilon_2, s_{31}\delta_2\big), \varepsilon_2\delta_2 s_{32}\Big).$$

Розглянемо

$$\big([\varepsilon_1, \delta_1]\big(\varepsilon_2\vartriangle', \delta_2 s_{31}\big), \varepsilon_2\delta_2 s_{32}\big) =$$

$$= \big([\varepsilon_1, \delta_1]\varepsilon_2\vartriangle', [\varepsilon_1, \delta_1]\delta_2 s_{31}, \varepsilon_2[\varepsilon_2, \delta_2]s_{32}, \delta_2[\varepsilon_2, \delta_2]s_{32}\big) =$$

$$= \left((s_{31}, s_{32})[\varepsilon_1, \delta_1]\left(\varepsilon_2\left(\frac{\vartriangle'}{(s_{31}, s_{32})}, \frac{[\varepsilon_2, \delta_2]}{[\varepsilon_1, \delta_1]} \frac{s_{32}}{(s_{31}, s_{32})}\right), \delta_2\left(\frac{s_{31}}{(s_{31}, s_{32})}, \frac{[\varepsilon_2, \delta_2]}{[\varepsilon_1, \delta_1]} \frac{s_{32}}{(s_{31}, s_{32})}\right)\right)\right).$$

Згідно з лемою 1 маємо:

$$= \left((s_{31}, s_{32})[\varepsilon_1, \delta_1]\varepsilon_2\left(\frac{\vartriangle'}{(s_{31}, s_{32})}, \frac{[\varepsilon_2, \delta_2]}{[\varepsilon_1, \delta_1]}\right), (s_{31}, s_{32})[\varepsilon_1, \delta_1]\delta_2\left(\frac{s_{31}}{(s_{31}, s_{32})}, \frac{[\varepsilon_2, \delta_2]}{[\varepsilon_1, \delta_1]}\right)\right) =$$

$$= \big([\varepsilon_1, \delta_1]\varepsilon_2\vartriangle', [\varepsilon_1, \delta_1]\delta_2 s_{31}, (\varepsilon_2, \delta_2)[\varepsilon_2, \delta_2](s_{31}, s_{32})\big).$$

Тоді

$$d_3 = (\varepsilon_1, \delta_1)\Big((\varepsilon_3, \delta_3)\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\delta_1, \varepsilon_1](s_{21}, s_{31})\big), [\delta_1, \varepsilon_1]\big(\vartriangle'\varepsilon_2, s_{31}\delta_2\big), \varepsilon_2\delta_2(s_{31}, s_{32})\Big) =$$

$$= (\varepsilon_1, \delta_1)\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\delta_1, \varepsilon_1](s_{21}, s_{31})\big)\left((\varepsilon_3, \delta_3), \frac{\big([\delta_1, \varepsilon_1]\big(\vartriangle'\varepsilon_2, s_{31}\delta_2\big), \varepsilon_2\delta_2(s_{31}, s_{32})\big)}{\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\delta_1, \varepsilon_1](s_{21}, s_{31})\big)}\right).$$

Оскільки $(\varepsilon_1, \delta_1) = \varphi_1$, а $\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\delta_1, \varepsilon_1](s_{21}, s_{31})\big) = \varphi_2$, то

$$d_3 = \varphi_1\varphi_2\left((\varepsilon_3, \delta_3), \frac{[\delta_1, \varepsilon_1]\big(\vartriangle'\varepsilon_2, s_{31}\delta_2\big)}{\varphi_2}, \frac{\varepsilon_2\delta_2}{\varphi_2}(s_{31}, s_{32})\right).$$

Отже,

$$\varphi_3 = \left((\varepsilon_3, \delta_3), \frac{[\delta_1, \varepsilon_1]\big(\vartriangle'\varepsilon_2, s_{31}\delta_2\big)}{\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\delta_1, \varepsilon_1](s_{21}, s_{31})\big)}, \frac{\varepsilon_2\delta_2}{\big((\varepsilon_2, \delta_2), [\delta_1, \varepsilon_1](s_{21}, s_{31})\big)}(s_{31}, s_{32})\right).$$

Теорему доведено. ◊

1. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14–21.
2. *Романів А. М, Щедрик В. П.* Найбільший спільний дільник матриць, одна з яких має один відмінний від одиниці інваріантний множник // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 425–430.
3. *Романів А. М., Щедрик В. П.* Найбільший спільний лівий дільник та найменше спільне праве кратне матриць другого порядку // Мат. вісник НТШ. – 2012. – **9**. – С. 269–284.
4. *Щедрик В. П.* Кільця стабільного рангу 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 6. – С. 849–860.
5. *Cahen E.* Theorie des Nombres. – 1914. – I.
6. *Chatelet A.* Groupes Abeliens Finis. – 1924.
7. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66.** – P. 464–491.
8. *MacDuffee C. C.* Matrices with elements in a principal ring // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39.** – P. 570–573.
9. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – № 2. – P. 79–99.
10. *Thompson R. C.* Left multiples and right divisors of integral matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 1986. – **19**. – P. 287–295.

О ФОРМЕ СМИТА НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ

Для двух неособенных матриц третьего порядка над коммутативной областью Безу стабильного ранга 1,5 указана форма Смита их наибольшего общего левого делителя.

ON THE SMITH NORMAL FORM OF THE GREATEST COMMON DIVISOR OF ONE CLASS OF MATRICES

For two nonsingular matrices of the third order over a commutative Bezout domain of stable range 1,5 the Smith normal form of their left greatest common divisor is established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.11.15