УДК 512.552.12

А. М. Білоус, А. І. Гаталевич

ОДНОЧАСНА РЕДУКЦІЯ ПАРИ МАТРИЦЬ НАД ВСЮДИ АДЕКВАТНИМ ДУО-КІЛЬЦЕМ

Доведено, що пара матриць над всюди адекватним дуо-кільцем зводиться до спеціального трикутного вигляду з застосуванням ідентичних однобічних перетворень.

Адекватні кільця ввів Хелмер як клас кілець, над якими довільна матриця має властивість канонічної діагональної редукції [7].

Оскільки дистрибутивні кільця елементарних дільників є дуо-кільцями, то дослідження останніх у некомутативному випадку є важливою задачею [5].

Адекватні дуо-кільця вперше розглянуті в праці [2]. Останім часом вивчають різноманітні зв'язки кілець з умовами адекватності з іншими класами кілець.

Під кільцем R розумітимемо дуо-кільце з одиницею, причому $1 \neq 0$.

Означення 1. Кільце R називають дуо-кільцем, якщо довільний однобічний ідеал кільця R є двобічним.

Означення 2. Елемент a дуо-кільця R називають правим адекватним, якщо для довільного елемента $b \in R$ існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = r \cdot s$, $rR + bR = R$, і для довільного елемента $s' \in R$, такого, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$.

Дуо-кільце R називають адекватним, якщо воно є кільцем Безу і кожен ненульовий його елемент є правим адекватним [2].

Якщо у кільці кожний елемент (у тому числі і нуль) є правим адекватним, то кільце називають всюди адекватним. Абелево-регуляре кільце є прикладом всюди адекватного дуо-кільця.

Означення 3. Кільце R називають кільцем елементарних дільників, якщо довільну матрицю A над кільцем R, домноживши на відповідні оборотні матриці P і Q, можна звести до канонічного вигляду $D = PAQ = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$, причому $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i$ при $i = 1, 2, .., r-1$. Якщо довільна $1 \times 2 (2 \times 1)$ матриця над кільцем R володіє діагональною редукцією, то кільце R називають правим (лівим) кільцем Ерміта. Праве і ліве кільця Ерміта називають кільцями Ерміта [8].

Кільце, над яким довільну матрицю зведено до канонічного діагонального вигляду елементарними перетворенями, називають кільцем з елементарною редукцією матриць.

Нижче досліджено питання одночасного приведення пари матриць до спеціального трикутного вигляду над всюди адекватним дуо-кільцем шляхом ідентичних перетворень.

Означення 4. Кільце R має стабільний ранг 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ з умови $aR + bR = R$ випливає, що існує такий елемент $t \in R$, що $a + bt \in U(R)$.

Варто відмітити, що означення стабільного рангу є право-ліво симетричним.

Теорема 1. *Стабільний ранг всюди адекватного дуо-кільця Безу рівний 1.*

Теорема 2. *Всюди адекватне дуо-кільце Безу є кільцем елементарних дільників .*

Теорема 3. *Всюди адекватне дуо-кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Теорема 4. *Нехай R − всюди адекватне дуо-кільце і нехай $a,b,c \in R$ є такими, що $aR+bR+cR=R$.* Тоді існує такий елемент $r \in R$, що $(a+rb)R+rcR=R$.

Доведення. Оскільки R всюди адекватне дуо-кільце, то існують такі елементи $r,s \in R$, що $c=r \cdot s$, де $rR+aR=R$, і $s'R+bR \neq R$ для довільного незворотного дільника елемента $s' \in R$ елемента s.

Нехай $(a+rb)R+rcR=hR$ для деякого елемента $h \in R$. Звідси випливає, що $rcR \subset hR$. Припустимо, що $rR+hR=\delta R$. Тоді $r=\delta r_0$ та $h=\delta h_0$ для деяких елементів $r_0 \in R$ і $h_0 \in R$. Це забезпечує включення $(a+rb)R \subset hR \subset \delta R$, а тому $aR \subset \delta R$. Останнє включення можливе лише тоді, коли елемент δ є зворотним, оскільки $aR+rR=R$. Отже, маємо $rcR \subset hR$ і $rR+hR=R$. Звідси випливає, що $r^2 s=hx$ для деякого елемента $x \in R$ і $r^2u+hv=1$ для деяких елементів $u,v \in R$. Тому $r^2su+hvs=s$ і $h(xu+vs)=s$, тобто $sR \subset hR$. Згідно з вибором елемента $s \in R$ маємо $hR+aR=\delta R \neq R$. Звідси випливає, що існує такий елемент $a_0 \in R$, що $a=\delta a_0$. Тоді $(a+rb)R \subset hR \subset \delta R$, тобто $a+rb=\delta y$ для деякого елемента $y \in R$. Тому $\delta a_0+rb=\delta y$, $rbR \subset \delta R$, $rb=\delta t$ для деякого елемента $t \in R$. Оскільки $rR+aR=R$, то $rR+\delta R=R$, тобто $rn+\delta m=1$ для деяких елементів $m,n \in R$. Звідси випливає, що $rbn+\delta mb=b$, $\delta(tn+mb)=b$ і тому $bR \subset \delta R$.

Отже, встановлено включення $aR \subset \delta R, cR \subset \delta R, bR \subset \delta R$.

Оскільки $aR+bR+cR=R$, то це можливо лише, коли δ зворотний, а звідси і h − зворотний.

Отже, $(a+rb)R+rcR=hR$, що і потрібно було довести. Теорему доведено.

Теорема 5. *Нехай A_1 та A_2* − матриці розміру $2 \times k_1$ та $2 \times k_2$ над всюди адекватним дуо-кільцем Безу R. Тоді існують такі оборотні матриці $P \in GL_2(R)$, $Q_1 \in GL_{k_1}(R)$, $Q_2 \in GL_{k_2}(R)$, що

$PA_iQ_i = \begin{pmatrix} e_1^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & e_2^i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, де e_1^i, e_2^i − інваріантні множники матриці $A_i, i \in \{1,2\}$

Доведення. Згідно з **теоремою 2**, R є кільцем елементарних дільників. Тоді для матриць A_1 та A_2 існують такі оборотні матриці $S \in GL_2(R)$, $N_1 \in GL_{k_1}(R)$, $N_2 \in GL_{k_2}(R)$, що

$$SA_1N_1 = \begin{pmatrix} e_1^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & e_2^i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad SA_2N_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $e_2^1R \subset e_1^1R$.

Припустимо, що $aR+bR+cR=R$. За **теоремою 4** для елементів $a,b,c \in R$ існує такий елемент $r \in R$, що $(a+rb)R+rcR=R$. Розглянемо матрицю $T=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, що $T \in GL_2(R)$. Тоді

$$TSA_1N_1 = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & re_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$TSA_2N_2 = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+rb & rc & 0 & \dots & 0 \\ b & c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $(a+rb)R + rcR = R$, то $(a+rb)u + rcv = 1$ для деяких елементів $u, v \in R$. Оскільки кільце R ермітове і $uR + vR = R$, то існує оборотна матриця $U \in CL_2(R)$ вигляду $U = \begin{pmatrix} u & * \\ v & * \end{pmatrix}$. Зрозуміло, що

$$\begin{pmatrix} a+rb & rc & 0 & \dots & 0 \\ b & c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $\begin{pmatrix} U & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{k_2}(R)$.

Оскільки $e_2^1 R \subset e_1^1 R$, то $e_2^1 = xe_1^1$ і $re_2^1 = ye_1^1$ для деяких $x, y \in R$. Звідси маємо рівність

$$\begin{pmatrix} e_1^1 & re_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

яка завершує доведення теореми, коли $aR + bR + cR = R$.

Якщо ж $aR + bR + cR = dR$, де d – незворотний елемент, тоді $a = a_0 d,\ b = b_0 d,\ c = c_0 d$ для деяких таких елементів $a_0, b_0, c_0 \in R$, що $a_0 R + b_0 R + c_0 R = R$. Звідси матрицю SA_2N_2 можна записати у вигляді $SA_2N_2 = DB_1$, де

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},\quad B_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Виберемо такий елемент r кільця R, що $(a_0 + rb_0)R + rc_0 R = R$. Така рівність можлива з огляду на **теорему 2**. Розглянемо відповідну матрицю $T = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Неважко перевірити, що матрицю TB_1, а отже, і матрицю TSA_iN_i домноженням справа на відповідні унімодулярні матриці можна звести до потрібного вигляду. Теорему доведено.

Теорема 6. *Нехай* $A_i, (i \in \{1,2\})$ *– прямокутні матриці розмірів* $m \times k_i$ *над всюди адекватним дуо-кільцем. Тоді існують такі оборотні матриці* $P \in GL_m(R)$ та $Q_i \in GL_{k_i}(R)$, що

$$PA_iQ_i = \begin{pmatrix} e_1^i & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & e_2^1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & \dots & e_t^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $e_j^i (j \in \{1, \dots, t \le m\})$ − інваріантні множники матриці $A_i, i \in \{1,2\}$.

Доведення. Доводитимемо індукцією за кількістю рядків матриць. Якщо $m = 2$, теорема правильна з огляду на **теорему 5**. Припустимо, що твердження теореми справедливе для матриць з кількістю рядків $m-1$. З обмежень, накладених на кільце R, випливає існування таких оборотних матриць P, Q_1, Q_2 відповідних розмірів, що

$$PA_1Q_1 = \begin{pmatrix} e_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2^1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e_m^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = B_1,$$

$$PA_2Q_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = B_2,$$

де e_i^1 − інваріантні множники матриці $A_i, i \in \{1, 2, \dots m\}$. Зауважимо, що випадок коли, елемент $e_m^1 = 0$, не виключається (тобто останні діагональні елементи канонічної діагональної матриці можуть бути і нулями).

Розглянемо підматриці $B_i', i \in \{1,2\}$, матриць B_i, які отримаємо, викреслюючи останні рядки матриць B_i. Для них за припущенням індукції існують такі унімодулярні матриці P', Q_1', Q_2' відповідних розмірів, що

$$P'B_1'Q_1' = \begin{pmatrix} e_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & e_2^1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & \dots & e_{m-1}^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$P'B_2'Q_2' = \begin{pmatrix} e_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & e_2^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & \dots & e_{m-1}^2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де e_i^2 – інваріантні множники матриці B_2'. Тоді

$$C_1 = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & P' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} B_1 \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & Q_1' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & e_2^1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_m^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & P' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} B_2 \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & Q_2' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & e_2^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mm} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Подібно, як і в доведенні **теореми 5** , можемо вважати , що найбільший спільний дільник елементів матриці C_2 дорівнює 1. За **теоремою 4** існує такий елемент $r \in R$, що

$$(e_1^2 + ra'_{m1})R + ra'_{mm}R = e_1^2 R + a'_{m1}R + a'_{mm}R\,. \tag{1}$$

Розглянемо матрицю вигляду $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & r \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in GL_m(R)$.

Домноживши матриці C_1 та C_2 зліва на матрицю T, отримаємо:

$$TC_1 = \begin{pmatrix} e_1^1 & 0 & \dots & re_m^1 & 0 & \dots & 0 \\ * & e_2^1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & \dots & e_m^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$TC_2 = \begin{pmatrix} e_1^2 + ra'_{m1} & ra'_{m2} & \dots & ra'_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ * & e_2^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & \dots & a'_{mm} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

З (1) легко бачити , що найбільший спільний лівий дільник елементів першого рядка матриці TC_2 є найбільшим спільним лівим дільником всіх елементів матриці C_2 .Зауважимо, що елемент e_1^2 є лівим дільником всіх елементів підматриці B_2'. Зважаючи на те, що e_1^2 ділить зліва e_1^m, маємо таку ж ситуацію для елементів першого рядка матриці TC_1. Отже, матриці TC_i домноженням справа на унімодулярні матриці $L_i \in GL_{k_i}(R), i \in \{1,2\}$, зведемо до вигляду

$$TC_iL_i = \begin{pmatrix} e_1^i & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & b_{22}^i & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & \dots & b_{mm}^i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де e_1^i – перший інваріантний множник матриці A_i. Застосування індукції завершує доведення теореми.

Теорема 7. *Нехай $A = BC$, де B, C – матриці над всюди адекватним дуо-кільцем Безу R. Тоді інваріантні множники матриці A діляться зліва на відповідні інваріантні множники матриць B і C.*

Доведення. Як вже відзначалось у доведенні **теореми 5**, кільце R є кільцем елементарних дільників. Тому існують такі оборотні матриці P, Q_1, Q_2 відповідних розмірів над R, що $PAQ_1 = PBQ_2Q_2^{-1}C$.

Тоді

$$\begin{pmatrix} e_1^A & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & e_2^A & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & \dots & e_m^A & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^B & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & e_2^B & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & \dots & e_m^B & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} Q_2^{-1}C.$$

Очевидно, що матриця $Q_2^{-1}CQ_1$ трикутна:

$$Q_2^{-1}CQ_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}.$$

Звідси $e_1^A = e_1^B c_{11}, \dots, e_m^A = e_m^B c_{mm}$, що й потрібно довести. Теорему доведено.

Враховуючи, що комутативне регулярне кільце є всюди адекватним дуо- кільцем, отримаємо таку теорему.

Теорема 8. *Нехай для матриці A над абелево регулярним кільцем R виконується співвідношення $A = BC$. Тоді інваріантні множники матриці A діляться зліва на відповідні інваріантні множники матриць B і C.*

Оскільки кільце нормування є всюди адекватним дуо-кільцем, то одержуємо також таку теорему.

Теорема 9. *Нехай матриця A над кільцем нормування R записана у вигляді $A = BC$. Тоді інваріантні множники матриці A діляться зліва на відповідні інваріантні множники матриць B і C.*

1. *Васюник І. С., Забавський Б. В.* Стабільний ранг адекватного дуо-кільця Безу та його застосування // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2011. – Вип 9. – С. 69–73.
2. *Гаталевич А. І.* Про адекватні і узагальнено адекватні дуо-кільця і дуо-кільця елементарних дільників // Матем. студії. – 1998. – **9**, № 2. – С. 69–73.
3. *Забавський Б. В., Казимирський П.С.* Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных преобразований // Укр. мат. журн. – 1984. – **6**, № 2. – С. 256–258.

4. *Забавський Б. В.* Редукція і одночасна редукція пари матриць над кільцями // Матем. студії. – 2005. – **24,** № 1. – С. 3–11.
5. *Туганбаев А. А.* Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, № 6. – С. 219–220.
6. *Gatalevich A.* Reduction of a pair of matrices over an adequate duo-ring to a specific triangular form by identical unilateral transformations // Visn. Lviv Univ. – 2003. – **61.** – P. 87–91.
7. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49.** – P. 225–236.
8. *Kaplansky I.* Elementary divisors rings and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.
9. *Petrychkovych V.* General equivalence of pairs of matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 2000. – **48.** – P. 179–188.

ОДНОВРЕМЕННАЯ РЕДУКЦИЯ ПАРЫ МАТРИЦ НАД ВЕЗДЕ АДЕКВАТНЫМ ДУО-КОЛЬЦОМ

Доказано, что пара матриц над всюду адекватным дуо-кольцом сводится к специальному треугольному виду путем идентичных односторонних преобразований.

SIMULTANEOUS REDUCTION OF PAIRS OF MATRICES OVER EVERYWHERE ADEQUATE DUO-RING

It is proved that a pair of matrices over everywhere adequate duo-ring can be reduced to a special triangular form by identical unilateral transformations.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
22.09.15