

СТАЦІОНАРНІ ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ В ТОНКИХ НЕСКІНЧЕННИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНКАХ ЗА ДІЇ ПОВЕРХНЕВИХ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА

Розв'язано стаціонарну задачу теплопровідності для тонких пологих ізотропних оболонок за дії джерела тепла, рівномірно розподіленого по поверхні, яка перпендикулярна до серединної поверхні та перетинається із нею по заданій кривій. При цьому використано апроксимацію функції температури та її першої похідної за товщиною координатою частинними сумами рядів за поліномами Лежандра. Числові дослідження виконано для циліндричних і сферичних оболонок за різних коефіцієнтів тепловіддачі і кривин.

Вступ. Одним із методів розв'язання задач теплопровідності в тонкостінних елементах конструкцій є метод $\{m, n\}$ -апроксимації [5], який полягає в розкладанні шуканих функцій у ряди за поліномами Лежандра. З його використанням визначено [1, 2] тепловий та термопружний стани анізотропних пластин, які нагріваються зосередженими джерелами тепла. У цьому дослідженні метод $\{m, n\}$ -апроксимації використано для вивчення температурних полів у нескінченній тонкій пологій ізотропній оболонці, яка нагрівається поверхневим джерелом тепла і взаємодіє з довкіллям шляхом конвективного теплообміну.

Формулювання задачі та її розв'язання. Розглянемо нескінченну тонку пологу ізотропну оболонку, віднесену до декартової системи координат x, y, z , початок якої знаходиться на серединній поверхні. Оболонка нагрівається джерелом тепла одиничної інтенсивності, розподіленим по поверхні, яка перпендикулярна до серединної поверхні і перетинається з нею по деякій кривій L , яка перетинає початок координат.

Через поверхні $z = \pm h$ відбувається конвективний теплообмін зі середовищем, температура якого відповідно θ^\pm . Визначимо стаціонарне поле в такій оболонці.

Для цього спочатку знайдемо розв'язок задачі теплопровідності для такої ж оболонки, але за дії джерела тепла одиничної інтенсивності, рівномірно розподіленого на відрізку $-h \leq z \leq h$, який перетинає початок координат (задача теплопровідності за дії лінійного джерела тепла).

За вихідні беремо рівняння теплопровідності [4]

$$\Delta T + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (k_1 + k_2) \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda} \delta(x) \delta(y) \quad (1)$$

та граничні умови

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=\pm h} \pm \frac{\alpha^\pm}{\lambda} (T|_{z=\pm h} - \theta^\pm) = 0, \quad (2)$$

$$T|_{x \rightarrow \pm\infty} = T|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; k_1, k_2 – головні кривини серединної поверхні оболонки;

$T(x, y, z)$ – функція температури; λ – коефіцієнт теплопровідності; $\delta(x)$ та $\delta(y)$ – дельта-функція Дірака; α^\pm – коефіцієнт теплообміну поверхні $z = \pm h$ із навколишнім середовищем.

Перейшовши до безрозмірної системи координат x_1, x_2, x_3 і ввівши нову функцію $Q(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial T(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}$, рівняння (1) та граничні умови

(2) перепишемо у вигляді

$$\Delta T + \frac{\partial Q}{\partial x_3} + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)Q = -\frac{1}{\lambda} \delta(x)\delta(y), \quad (3)$$

$$Q^\pm \pm \text{Bi}^\pm (T^\pm - \theta^\pm) = 0,$$

$$T|_{x_1 \rightarrow \pm\infty} = T|_{x_2 \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad (4)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$; $T^\pm = T(x_1, x_2, \pm 1)$; $Q^\pm = Q(x_1, x_2, \pm 1)$; $x_1 = x/h$;

$x_2 = y/h$; $x_3 = z/h$; $\bar{k}_1 = k_1 h$; $\bar{k}_2 = k_2 h$; $\text{Bi}^\pm = \frac{\alpha^\pm h}{\lambda}$.

Для відшукування наближеного розв'язку задачі (3), (4) апроксимуємо функції $T(x_1, x_2, x_3)$ та $Q(x_1, x_2, x_3)$ згідно з працею [4] частинними сумами:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k=0}^3 T_k(x_1, x_2) P_k(x_3), \\ Q(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k=0}^4 Q_k(x_1, x_2) P_k(x_3), \end{aligned} \quad (5)$$

де $P_k(x_3)$ – поліноми Лежандра:

$$P_k(x_3) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx_3^k} (x_3^2 - 1)^k, \quad (-1 \leq x_3 \leq 1).$$

Після низки перетворень приходимо до такої розв'язувальної системи диференціальних рівнянь відносно $T_k(x_1, x_2)$:

$$\Delta T_k + \sum_{m=0}^3 n_{km} T_m = -\delta_{k+1,1} \delta(x_1) \delta(x_2), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (6)$$

де $\delta_{k+1,1}$ – символ Кронекера. Величини n_{km} мають вигляд

$$\begin{aligned} n_{00} &= \frac{-10}{\Delta^*} \left[2\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 15(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) \right], \\ n_{01} &= \frac{-28}{\Delta^*} \left[5(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) - \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^- + 20) \right], \\ n_{02} &= \frac{-7}{\Delta^*} \left[2\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 15(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) \right], \\ n_{03} &= \frac{-18}{\Delta^*} \left[5(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) - \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^- + 20) \right], \\ n_{10} &= \frac{-6}{\Delta^*} \left[70(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) + \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(2\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 15(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-)) \right], \\ n_{11} &= \frac{-42}{\Delta^*} \left[2\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 11(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + 20 + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{12} &= \frac{-42}{\Delta^*} \left[7(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) - \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^- + 30) \right], \\
n_{13} &= \frac{-27}{\Delta^*} \left[2\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 11(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + 20 + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) \right], \\
n_{20} &= \frac{-5}{\Delta^*} \left[14\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 105(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + 10(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) \right], \\
n_{21} &= \frac{-10}{\Delta^*} \left[49(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) + \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(2\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 11(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + 20) \right], \\
n_{22} &= \frac{-70}{\Delta^*} \left[\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 9(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + 45 + \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) \right], \\
n_{23} &= \frac{-45}{\Delta^*} \left[7(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) - (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^- + 20) \right], \\
n_{30} &= \frac{-14}{\Delta^*} \left[45(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) + \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(2\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 15(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-)) \right], \\
n_{31} &= \frac{-7}{\Delta^*} \left[18\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 99(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + 180 + 14(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) \right], \\
n_{32} &= \frac{-7}{\Delta^*} \left[63(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(2\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 18(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + 90) \right], \\
n_{33} &= \frac{-126}{\Delta^*} \left[\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 8(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + 60 + \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(\text{Bi}^+ - \text{Bi}^-) \right], \\
\Delta^* &= 2\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + 25(\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-) + 300.
\end{aligned}$$

Розв'язок системи (6), знайдений з використанням перетворення Фур'є за нульової температури середовища, має вигляд

$$T_k(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^3 S_{k,m} G_{0,0}(r\sqrt{c_{m+1}}), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (7)$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; $G_{0,0}(r\sqrt{c_{m+1}})$ – спеціальна функція [6], а $S_{k,m}$ та c_{m+1} – величини, які залежать від Bi^\pm , \bar{k}_1 і \bar{k}_2 та n_{km} .

Отже, температуру, зумовлену лінійним джерелом тепла, визначатиме формула (5), а $T_k(x_1, x_2)$ – формула (7).

Маючи температуру $T(x_1, x_2, x_3)$, розв'язок задачі теплопровідності за дії поверхневого джерела тепла, коли крива L задана рівнянням $x_2 = \varphi(x_1)$, $a_0 \leq x_1 \leq b_0$, знаходимо у вигляді

$$T_L(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^3 T_{kL}(x_1, x_2) P_k(x_3), \quad (8)$$

де коефіцієнти $T_{kL}(x_1, x_2)$ обчислювали за допомогою формули згортки [3], і після зведення до визначеного інтеграла мають вигляд

$$T_{kL}(x_1, x_2) = \int_{a_0}^{b_0} T_k(x_1 - t, x_2 - \varphi(t)) \sqrt{1 + [\varphi'(t)]^2} dt. \quad (9)$$

Числові дослідження. Розглянемо нагрів оболонки по прямокутній області $\{-1 \leq x_3 \leq 1, -a \leq x_1 \leq a\}$, яка лежить у площині $x_2 = 0$ (перший спосіб), та по поверхні, перетином якої зі серединною поверхнею є парабола $x_2 = x_1^2, -a \leq x_1 \leq a, -1 \leq x_3 \leq 1$ (другий спосіб). Для цих способів згідно з виразом (9) відповідно матимемо:

$$T_{kL}(x_1, x_2) = \int_{-a}^a T_k(x_1 - t, x_2) dt,$$

$$T_{kL}(x_1, x_2) = \int_{-a}^a T_k(x_1 - t, x_2 - t^2) \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

Тут інтеграли обчислювали методом Гауса з використанням 20 вузлів.

Досліджували температуру T_L (8) на поверхні $x_3 = 1$ при $\lambda = 230$ (Вт/(м·°C)), $a = 3$.

Побудували (рис. 1 і 2) графіки залежності температури для першого і другого способів нагріву в циліндричній ($\bar{k}_2 = 0$) і сферичній ($\bar{k}_1 = \bar{k}_2$) оболонках від безрозмірного радіуса їх кривин \bar{R}_1 , якщо $x_1 = 3.5, x_2 = 0, Bi^+ = Bi^- = 0.01$. Суцільна крива – для циліндричної оболонки, а штрихова – для сферичної.

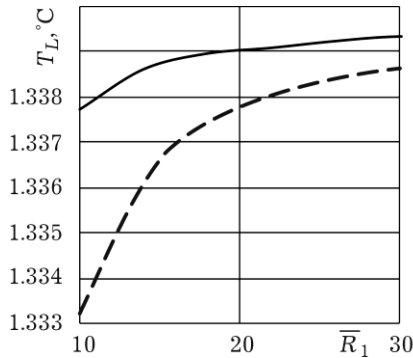


Рис. 1.

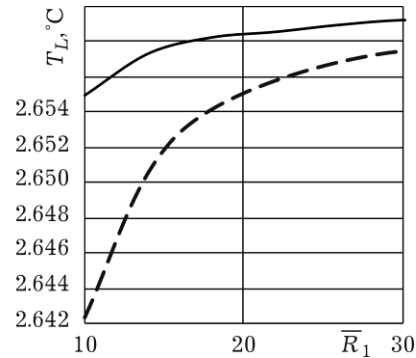


Рис. 2.

З аналізу цих графіків випливає, що зі збільшенням радіуса кривини оболонки температура асимптотично наближається до відповідних у пластині. Характер залежності однаковий як для циліндричної, так і для сферичної оболонки для обох способів нагріву.

Зображено (рис. 3) залежність температури в циліндричній оболонці ($\bar{k}_1 = 0.05, \bar{k}_2 = 0$) для першого способу нагріву від координати x_2 ($x_1 = 0$). Суцільна лінія – симетричний теплообмін ($Bi^+ = Bi^- = 0.01$), а штрихова – несиметричний ($Bi^+ = 0.01, Bi^- = 0$).

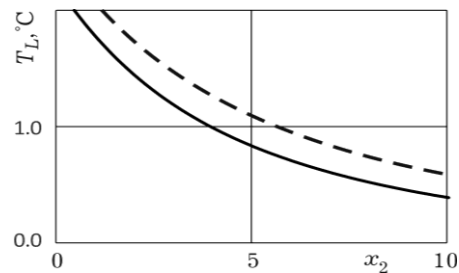


Рис. 3.

Отже, температура, як і очікували, наближається до нуля з віддаленням від області нагріву. З наближенням до точки $x_1 = 0, x_2 = 0$ вона зростає, прямуючи до нескінченності.

Висновок. Визначено стаціонарні температурні поля у нескінченних тонких пологих ізотропних циліндричних і сферичних оболонках, зумовлені лінійним та поверхневим джерелами тепла одиначної інтенсивності. Досліджено вплив тепловіддачі і кривини на температуру за дії поверхневих джерел, розподілених по прямокутній області або по поверхні, перетином якої із серединною поверхнею є парабола.

1. Бондаренко Н. С., Гольцев А. С., Шевченко В. П. Влияние теплообмена на термоупругое состояние трансверсально-изотропной пластины, содержащей сосредоточенный “изгибный” источник тепла // Методи розв’язування прикл. задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 27–33.
2. Бондаренко Н. С., Гольцев А. С. Решение задачи теплопроводности для анизотропных пластин при сосредоточенных температурных воздействиях с использованием полиномов Лежандра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 4. – С. 216–226.
3. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – Москва: Наука, 1979. – 320 с.
4. Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.
5. Пелех Б. Л., Лазько В. А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
6. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Уч. пос. – Донецк: Изд-во Донецк. ун-та, 1980. – 126 с.

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ТОНКИХ БЕСКОНЕЧНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧКАХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Решена стационарная задача теплопроводности для тонких пологих изотропных оболочек под воздействием источника тепла, равномерно распределенного по поверхности, которая перпендикулярна к срединной поверхности и пересекается с ней по заданной кривой. При этом использована аппроксимация функции температуры и ее первой производной по толщинной координате частичными суммами рядов по полиномам Лежандра. Численно исследованы цилиндрические и сферические оболочки при разных коэффициентах теплоотдачи и значениях кривизны.

STATIONARY TEMPERATURE FIELDS IN INFINITE THIN SHALLOW SHELLS UNDER THE INFLUENCE OF SURFACE HEAT SOURCES

Stationary heat conduction problem was solved for thin shallow isotropic shells under the influence of heat source uniformly distributed over the surface which is perpendicular to the median surface and intersects it along a given curve. Approximation of temperature function and of its first derivative with respect to thickness coordinate by partial sums of the series of Legendre polynomials was used. Numerical investigations were conducted for cylindrical and spherical shells with different heat transfer coefficients and curvature.