

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ТРИШАРОВОЇ ПОРОЖНИСТОЇ КУЛІ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Сформульовано математичну модель теплового і термопружного станів тришарової термочутливої порожнистої кулі за складного теплообміну з довкіллям та сталими силовими навантаженнями на її обмежувальних поверхнях. Куля нагріта джерелом тепла, розміщеним у середньому шарі, а між сусідніми шарами виконуються умови ідеального термомеханічного контакту. Знайдено точний аналітичний розв'язок задачі теплопровідності та аналітичні вирази для компонент напружено-деформованого стану шляхом зведення незв'язаної задачі термопружності до розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри та певних інтегральних умов. Проаналізовано вплив температурної залежності характеристик матеріалів шарів на розподіл температури залежно від параметрів теплового навантаження.

Сучасний розвиток космічної техніки, машино- і приладобудування, теплової та атомної енергетики ставить перед інженерами підвищені вимоги до найточнішого визначення теплового та термопружного станів шаруватих елементів конструкцій, зокрема, кульової форми. За експлуатації їх у широких діапазонах температур важливо врахувати залежності фізико-механічних характеристик матеріалів шарів та параметрів теплообміну з довкіллям від температури (термочутливість матеріалу) [2,4], а отже, розв'язати нелінійну задачу теплопровідності із нелінійними умовами теплообміну з довкіллям, а також відповідні рівняння термопружності зі змінними коефіцієнтами.

Формулювання задачі теплопровідності. Розглянемо тришарову порожнисту кулю із внутрішнім та зовнішнім радіусами $r = r_1$ та $r = r_4$ відповідно. На поверхні $r = r_1$ підтримується стала температура t_i , а через зовнішню $r = r_4$ відбувається конвективний теплообмін зі середовищем сталої температури t_o . На поверхнях контакту сусідніх шарів, які виготовлені з різних матеріалів, виконуються умови ідеального теплового контакту.

Куля також нагрівається розташованими у середньому шарі джерелами тепла, які розподілені за законом $W^{(2)}(r) = W_0^{(2)} \frac{4(r - r_2)(r - r_3)}{(r_2 - r_3)^2}$, де

$W_0^{(2)}$ – найбільша потужність джерел тепла на серединній поверхні другого шару $r = (r_2 + r_3) / 2$. До математичної моделі для визначення усталеного розподілу температури кулі входять

- рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \lambda_t^{(j)}(t^{(j)}) \frac{dt^{(j)}}{dr} \right) = -W^{(j)}(r) \delta_{2j}, \quad j = \overline{1,3}; \quad (1)$$

- умови контакту сусідніх шарів

$$t^{(j)} \Big|_{r=r_{j+1}} = t^{(j+1)} \Big|_{r=r_{j+1}},$$

$$\lambda_t^{(j)}(t^{(j)}) \frac{dt^{(j)}}{dr} \Big|_{r=r_{j+1}} = \lambda_t^{(j+1)}(t^{(j+1)}) \frac{dt^{(j+1)}}{dr} \Big|_{r=r_{j+1}}, \quad j = 1, 2; \quad (2)$$

- умови на межових поверхнях кулі

$$t^{(1)} \Big|_{r=r_1} = t_i, \quad (3)$$

$$\left[\lambda_t^{(3)}(t^{(3)}) \frac{dt^{(3)}}{dr} + \alpha_3(t^{(3)})(t^{(3)} - t_o) \right] \Big|_{r=r_4} = 0. \quad (4)$$

Тут $t^{(j)}$, $\lambda_t(t^{(j)})$ – абсолютна температура та залежний від неї коефіцієнт теплопровідності j -го шару відповідно; $\alpha_3(t^{(3)})$ – залежний від температури коефіцієнт теплообміну через поверхню $r = r_4$; $W^{(j)}(r)$ – густина розподілу джерел тепла в j -му шарі; $\delta_{2j} = \begin{cases} 1, j = 2, \\ 0, j \neq 2 \end{cases}$ – символ Кронекера.

Введемо температурну $T^{(j)} = t^{(j)}/t_0$ та координатну $\rho = r/l_0$ змінні, де t_0 – відлікова температура, а l_0 – характерний розмір. Подамо коефіцієнти теплопровідності у вигляді $\lambda_t^{(j)}(t^{(j)}) = \lambda_{t_0}^{(j)} \lambda_*^{(j)}(T^{(j)})$, де множники з індексом «0» – сталі величини з розмірністю коефіцієнта теплопровідності, а з “зірочкою” – безрозмірні функції, які описують залежності коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шарів від введених температурних змінних $T^{(j)}$. Коефіцієнт теплообміну через поверхню $r = r_4$ подано у вигляді $\alpha_3(t^{(3)}) = \alpha_{30} \alpha_3^*(T^{(3)})$.

Нехай коефіцієнти теплопровідності шарів задані у діапазоні температур $[t_p, t_k]$. Тоді їх лінійну апроксимацію запишемо так:

$$\lambda_t^{(j)}(t^{(j)}) = \lambda_{t_0}^{(j)} \left[1 + k^{(j)}(T^{(j)} - T_p) \right], \quad (5)$$

де $\lambda_{t_0}^{(j)}$ – значення коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шарів за температури $T_p = t_p/t_0$ з діапазону їх задання $[T_p, T_k]$, $T_k = t_k/t_0$.

Густина розподілу джерел тепла:

$$W^{(2)}(r) = W_0^{(2)} w_*^{(2)}(\rho) = W_0^{(2)} \frac{4(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)}{(\rho_2 - \rho_3)^2}, \quad (6)$$

де $w_*^{(2)}(\rho)$ – безрозмірна функція, яка описує просторовий розподіл.

У введених нових змінних математична модель (1)–(4) набуде вигляду

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \lambda_*^{(j)}(T^{(j)}) \frac{dT^{(j)}}{d\rho} \right) = -\text{Po}^{(j)} w_*^{(j)}(\rho) \delta_{2j}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (7)$$

$$T^{(j)} \Big|_{\rho=\rho_{j+1}} = T^{(j+1)} \Big|_{\rho=\rho_{j+1}},$$

$$\frac{\lambda_{t_0}^{(j)}}{\lambda_{t_0}^{(j+1)}} \lambda_*^{(j)}(T^{(j)}) \frac{dT^{(j)}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{j+1}} = \lambda_*^{(j+1)}(T^{(j+1)}) \frac{dT^{(j+1)}}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

$$T^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_1} = T_i, \quad (9)$$

$$\left[\lambda_*^{(3)}(T^{(3)}) \frac{dT^{(3)}}{d\rho} + \text{Bi}^{(3)} \alpha_3^*(T^{(3)})(T^{(3)} - T_o) \right] \Big|_{\rho=\rho_4} = 0, \quad (10)$$

де $\rho_j = r_j/l_0$; $T_i = t_i/t_0$; $T_o = t_o/t_0$, $\alpha_3^*(T^{(3)}) = 1 + k_\alpha(T^{(3)} - T_p)$;

$Po^{(2)} = \frac{w_0^{(2)} l_0^2}{t_0 \lambda_{t_0}^{(2)}}$, $Bi^{(3)} = \frac{\alpha_{30} l_0}{\lambda_{t_0}^{(3)}}$ – опорні критерії Померанцева і Біо.

Через залежності коефіцієнтів теплопровідності від шуканих температур рівняння (7), друга умова (8) та умова (10) є нелінійними. Якщо скористатися змінними Кірхгофа [3]

$$\theta^{(j)} = \int_{T_p}^{T^{(j)}} \lambda_*^{(j)}(T^{(j)}) dT^{(j)}, \quad j = \overline{1,3}, \quad (11)$$

то нелінійні рівняння (7) та друга умова (8) стануть відносно них лінійними

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d\theta^{(j)}}{d\rho} \right) = -Po^{(j)} w_*^{(j)}(\rho) \delta_{2j}, \quad j = \overline{1,3}, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\lambda_{t_0}^{(j)}}{\lambda_{t_0}^{(j+1)}} \frac{d\theta^{(j)}}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_{j+1}} = \left. \frac{d\theta^{(j+1)}}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \quad (13)$$

а нелінійна умова конвективного теплообміну (10) перетвориться в умову

$$\left[\frac{d\theta^{(3)}}{d\rho} + g_4 \left(T^{(3)}(\theta^{(3)}) \right) \right]_{\rho=\rho_4} = 0, \quad (14)$$

де $g_4 \left(T^{(3)}(\theta^{(3)}) \right) = Bi^{(3)} \alpha_3^* \left(T^{(3)}(\theta^{(3)}) \right) \left(T^{(3)}(\theta^{(3)}) - T_o \right)$.

З першої умови (8) отримали нелінійні умови на змінні Кірхгофа

$$T^{(j)}(\theta^{(j)}) \Big|_{\rho=\rho_{j+1}} = T^{(j+1)}(\theta^{(j+1)}) \Big|_{\rho=\rho_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \quad (15)$$

а з умови (9) –

$$\theta^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_1} = \theta_i, \quad (16)$$

де $T^{(j)}(\theta^{(j)}) = \frac{\sqrt{1 + 2k^{(j)}\theta^{(j)}} - 1}{k^{(j)}} + T_p$ – подання температури через змінні Кірхгофа [2].

Розв'язок крайової задачі на змінні Кірхгофа (12)–(16) побудували за методикою, описаною раніше [2, 3, 5].

З рівняння (12) послідовним інтегруванням отримали:

$$\frac{d\theta^{(j)}}{d\rho} = \frac{1}{\rho^2} \left[\rho_j C_1^{(j)} - Po^{(j)} w^{(j)}(\rho) \delta_{2j} \right], \quad (17)$$

$$\theta^{(j)} = C_1^{(j)} \left(1 - \frac{\rho_j}{\rho} \right) + C_2^{(j)} - Po^{(j)} \bar{w}^{(j)}(\rho) \delta_{2j}, \quad j = \overline{1,3}, \quad (18)$$

де $C_i^{(j)}$, $j = \overline{1,3}$, $i = 1, 2$ – сталі інтегрування;

$$w^{(2)}(\rho_3) = \frac{4}{(\rho_3 - \rho_2)^2} \left(-\frac{\rho_3^5}{20} + \frac{\rho_2^5}{20} - \frac{\rho_3 \rho_2^4}{12} + \frac{\rho_2 \rho_3^4}{12} \right);$$

$$\bar{w}^{(2)}(\rho_3) = \frac{4}{(\rho_3 - \rho_2)^2} \left(-\frac{\rho_2^5}{20\rho_3} - \frac{\rho_3^4}{30} + \frac{\rho_2^4}{6} + \frac{\rho_2 \rho_3^3}{12} - \frac{\rho_3 \rho_2^3}{6} \right).$$

Сталі інтегрування визначили з умов контакту (13), (15) та умов взаємодії кулі на обмежувальних поверхнях (14) і (16) з довідками за методикою [2]:

$$C_1^{(2)} = \frac{1}{\lambda_{t_0}^{(2)} \rho_2} \lambda_{t_0}^{(1)} \rho_1 C_1^{(1)}, \quad C_1^{(3)} = \frac{1}{\lambda_{t_0}^{(3)} \rho_3} \left[\lambda_{t_0}^{(1)} \rho_1 C_1^{(1)} - \lambda_{t_0}^{(2)} Po^{(2)} w^{(2)}(\rho_3) \right],$$

$$C_2^{(2)} = \frac{k^{(2)}}{k^{(1)}} \theta^{(1)}(\rho_2) + \left(1 - \frac{k^{(2)}}{k^{(1)}}\right) \frac{\sqrt{1 + 2k^{(1)}\theta^{(1)}(\rho_2)} - 1}{k^{(1)}},$$

$$C_2^{(3)} = \frac{k^{(3)}}{k^{(2)}} \theta^{(2)}(\rho_3) + \left(1 - \frac{k^{(3)}}{k^{(2)}}\right) \frac{\sqrt{1 + 2k^{(2)}\theta^{(2)}(\rho_3)} - 1}{k^{(2)}},$$

де $\theta^{(1)}(\rho_2) = C_1^{(1)} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + C_2^{(1)}$; $\theta^{(2)}(\rho_3) = C_1^{(2)} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) + C_2^{(2)} - \text{Po}^{(2)} \bar{w}^{(2)}(\rho_3)$.

У результаті у виразах змінних Кірхгофа (18) невідомими залишилися базові сталі $C_1^{(1)}$ і $C_2^{(1)}$, для обчислення яких використали умови на обмежувальних поверхнях (14) і (16).

З умови (16) випливає, що друга базова стала

$$C_2^{(1)} = \theta_i = \int_{T_p}^{T^{(j)}} \lambda_*^{(1)}(T^{(1)}) dT = T_i - T_p + \frac{k^{(1)}}{2} (T_i - T_p)^2.$$

Після задоволення умови (14) приходимо до алгебричного рівняння для визначення базової невідомої сталої інтегрування $C_1^{(1)}$:

$$\lambda_{t_0}^{(1)} \rho_1 C_1^{(1)} - \lambda_{t_0}^{(2)} \text{Po}^{(2)} \bar{w}^{(2)}(\rho_3) + \lambda_{t_0}^{(3)} \rho_4^2 g_4 \left(T^{(3)} \left(\theta^{(3)}(\rho_4) \right) \right) = 0,$$

де $\theta^{(3)}(\rho_4) = C_1^{(3)} \left(1 - \frac{\rho_3}{\rho_4}\right) + C_2^{(3)} \left(C_1^{(1)}, C_2^{(1)} \right) \Big|_{C_2^{(1)} = \theta_i}$.

Усталений розподіл температури в аналогічній нетермочутливій кулі у змінних ρ , $T^{(j)}$ знайшли так само, як для шаруватого циліндра [5]:

$$T_n^{(j)} = \bar{C}_1^{(j)} \left(1 - \frac{\rho_j}{\rho}\right) + \bar{C}_2^{(j)} - \text{Po}_n^{(j)} \bar{w}^{(j)}(\rho) \delta_{2j}, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (19)$$

Тут сталі інтегрування виразили через базові сталі:

$$\bar{C}_1^{(2)} = \frac{1}{\lambda_{t_n}^{(2)} \rho_2} \lambda_{t_n}^{(1)} \rho_1 \bar{C}_1^{(1)}, \quad \bar{C}_1^{(3)} = \frac{1}{\lambda_{t_n}^{(3)} \rho_3} \left[\lambda_{t_n}^{(1)} \rho_1 \bar{C}_1^{(1)} - \lambda_{t_n}^{(2)} \text{Po}_n^{(2)} \bar{w}^{(2)}(\rho_3) \right],$$

$$\bar{C}_2^{(2)} = \bar{C}_1^{(1)} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + \bar{C}_2^{(1)}, \quad \bar{C}_2^{(3)} = \bar{C}_1^{(2)} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) + \bar{C}_2^{(2)} - \text{Po}_n^{(2)} \bar{w}^{(2)}(\rho_3).$$

Друга базова стала $\bar{C}_2^{(1)} = T_i = t_i / t_0$, а для розрахунку базової сталої інтегрування $\bar{C}_1^{(1)}$ отримали алгебричне рівняння

$$\lambda_{t_n}^{(1)} \rho_1 \bar{C}_1^{(1)} - \lambda_{t_n}^{(2)} \text{Po}_n^{(2)} \bar{w}^{(2)}(\rho_3) + \lambda_{t_n}^{(3)} \rho_4^2 \text{Bi}_3 \left(T^{(3)}(\rho_4) - T_o \right) = 0,$$

де $T^{(3)}(\rho_4) = \bar{C}_1^{(3)} \left(1 - \frac{\rho_3}{\rho_4}\right) + \bar{C}_2^{(3)} \left(\bar{C}_1^{(1)}, \bar{C}_2^{(1)} \right) \Big|_{\bar{C}_2^{(1)} = T_i}$.

Як часткові виділимо такі випадки:

- теплові характеристики складників нетермочутливої кулі дорівнюють опорним значенням відповідних складників термочутливої

$$\lambda_{t_n}^{(j)} = \lambda_{t_0}^{(j)}, \quad j = \overline{1, 3}.$$

- вибирають середньінтегральні значення теплових характеристик як

$$\lambda_{t_c}^{(j)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} \left\{ \lambda_{t_0}^{(j)} \left[1 + k_j (T_j - T_p) \right] \right\} dT = \lambda_{t_0}^{(j)} \left[1 + \frac{k_j}{2} (T_j - T_p) \right], \quad j = \overline{1, 3}.$$

Визначення термонапруженого стану. Напруження в тришаровій порожнистій термочутливій кулі, спричинені знайденим вище температурним

полем, розраховуватимемо за моделлю незв'язаної статичної термопружності у напруженнях. Вважаємо, що механічні характеристики матеріалу у кожному шарі (модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, коефіцієнт лінійного температурного розширення) довільно залежать від температури, а на поверхнях сусідніх шарів виконуються умови ідеального термомеханічного контакту.

Відповідну задачу визначення термонапруженого стану зведемо до

- ✓ рівняння рівноваги

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^3 \sigma_{rr}^{(j)}) = 2\rho^2 \sigma^{(j)}(\rho) - \rho^3 f^{(j)}(\rho), \quad \sigma^{(j)} = \frac{1}{2} \sigma_r^{(j)} + \sigma_\phi^{(j)} \quad j = \overline{1,3}; \quad (20)$$

- ✓ зв'язків між компонентами тензорів деформацій і напружень

$$e_r^{(j)}(\rho) = \frac{1 + \nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \sigma_r^{(j)}(\rho) - 2 \frac{\nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \sigma^{(j)}(\rho) + \Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho)),$$

$$e_\phi^{(j)}(\rho) = \frac{1 - \nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \sigma^{(j)}(\rho) - \frac{1}{2} \frac{1 + \nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \sigma_r^{(j)}(\rho) + \Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho)), \quad j = \overline{1,3}; \quad (21)$$

- ✓ рівняння суцільності $\rho \frac{de_\phi^{(j)}}{d\rho} = e_r^{(j)} - e_\phi^{(j)}$, які у напруженнях мають

вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1 - \nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \sigma^{(j)}(\rho) + \Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho)) \right] = \\ = \frac{\sigma_r^{(j)}(\rho)}{2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1 + \nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \right) - \frac{1 + \nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \frac{f^{(j)}(\rho)}{2}, \quad j = \overline{1,3}; \end{aligned} \quad (22)$$

- ✓ умов на обмежувальних поверхнях

$$\sigma_r^{(1)}(\rho_1) = -p_1, \quad \sigma_r^{(n)}(\rho_{n+1}) = -p_2; \quad (23)$$

- ✓ умов ідеального механічного контакту сусідніх шарів

$$u_r^{(j+1)}(\rho_{j+1}) = u_r^{(j)}(\rho_{j+1}), \quad \sigma_r^{(j+1)}(\rho_{j+1}) = \sigma_r^{(j)}(\rho_{j+1}) \quad j = \overline{1,2}. \quad (24)$$

У рівняннях та співвідношеннях (20)–(24) $E^{(j)}(T^{(j)})$, $\nu^{(j)}(T^{(j)})$, $\alpha^{(j)}(T^{(j)})$ – залежні від температури модуль пружності, коефіцієнт Пуассона та температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалу j -го шару відповідно;

$f^{(j)}(\rho)$ – розподіл масових сил у j -му шарі; $\Phi^{(j)}(T^{(j)}) = t_0 \int_{T_p}^{T^{(j)}} \alpha^{(j)}(T) dT$ – суто

теплова деформація; $\sigma_r^{(j)}$, $\sigma_\phi^{(j)} = \sigma_\theta^{(j)}$ – радіальні та колові компоненти тензора напружень, а $e_r^{(j)}$, $e_\phi^{(j)} = e_\theta^{(j)}$ – радіальні та колові компоненти тензора деформацій у j -му шарі відповідно; $u_r^{(j)}$ – радіальна компонента вектора переміщень j -го шару, віднесена до характерного розміру l_0 ; p_1 , p_2 – задані сталі тиски (напруження) на внутрішній ($\rho = \rho_1$) та зовнішній ($\rho = \rho_4$) поверхнях кулі.

Залежності від температури термомеханічних характеристик матеріалів шарів у діапазоні температур $[T_p, T_k]$ подамо у такому ж вигляді, як і теплових $\chi^{(j)}(T^{(j)}) = \chi_0^{(j)} \chi_j^*(T^{(j)})$, де $\chi_0^{(j)}$ – сталі величини розмірності відповідної характеристики, а $\chi_j^*(T^{(j)})$ – безрозмірні функції, які описують її температурну залежність, і вважатимемо їх поліномами вигляду $\chi_j^*(T^{(j)}) = 1 + k_{1\chi}(T^{(j)} - T_p) + k_{2\chi}(T^{(j)} - T_p)^2 + \dots$. У співвідношеннях (21) та рів-

няннях (22) і надалі для скорочення запису використовуватимемо позначення $\chi^{(j)}(\rho) = \chi^{(j)}(T^{(j)}(\rho))$.

Після інтегрування кожного з рівнянь рівноваги (20) для j -го шару за радіальною координатою у межах від ρ_j до ρ отримали рівняння

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^3} \left[\rho_j^3 \sigma_r^{(j)}(\rho_j) + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta^2 (2\sigma^{(j)}(\eta) - \eta f^{(j)}(\eta)) d\eta \right], \quad j = \overline{1, 3}, \quad (25)$$

які з використанням умови на внутрішній межі мають вигляд

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^3} \left[-\rho_1^3 p_1 + (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta^2 (2\sigma^{(k)}(\eta) - \eta f^{(k)}(\eta)) d\eta + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta^2 (2\sigma^{(j)}(\eta) - \eta f^{(j)}(\eta)) d\eta \right], \quad (26)$$

що справедливо для $j = \overline{1, 3}$. Якщо у рівнянні (26) покласти $j = 3$ та $\rho = \rho_4$ і врахувати другу крайову умову (23), то отримаємо таку інтегральну умову для сумарних напружень:

$$\rho_1^3 p_1 - \rho_{n+1}^3 p_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta^2 (2\sigma^{(k)}(\eta) - \eta f^{(k)}(\eta)) d\eta. \quad (27)$$

Після інтегрування рівняння сумісності деформацій (22) у межах від ρ_j до ρ_{j+1} , заміни в отриманих рівняннях $\sigma_r^{(j)}(\rho)$ виразом (26) та необхідних перетворень, включаючи інтегрування частинами, приходимо до системи інтегральних рівнянь для сумарних напружень $\sigma^{(j)}(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \sigma^{(j)}(\rho) &= \frac{1 - \nu^{(j)}(\rho_j)}{E^{(j)}(\rho_j)} \sigma^{(j)}(\rho_j) + \Phi^{(j)}(\rho_j) - \Phi^{(j)}(\rho) + \\ &+ \frac{1}{2} \rho_j^3 \sigma_r^{(j)}(\rho_j) \varphi^{(j)}(\rho) + \int_{\rho_j}^{\rho} [\varphi^{(j)}(\rho) - \varphi^{(j)}(\eta)] \eta^2 \sigma^{(j)}(\eta) d\eta - F^{(j)}(\rho), \\ j &= \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (28)$$

де $\varphi^{(j)}(\rho) = \int_{\rho_j}^{\rho} \frac{1}{\eta^3} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1 + \nu^{(j)}(\eta)}{E^{(j)}(\eta)} \right) d\eta$; $\Phi^{(j)}(\rho) = \Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho))$;

$$F^{(j)}(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\rho_j}^{\rho} \left[\eta^2 (\varphi^{(j)}(\rho) - \varphi^{(j)}(\eta)) + \frac{1 + \nu^{(j)}(\eta)}{E^{(j)}(\eta)} \right] f^{(j)}(\eta) d\eta.$$

Рівняння системи (28) містять невідомі значення сумарних та радіальних напружень на внутрішній обмежувальній поверхні $\rho = \rho_1$ та поверхнях контакту сусідніх шарів $\rho = \rho_j$, $j = \overline{2, 3}$. Розглядаючи рівняння системи (28), починаючи з першого ($j = 1$), виразимо невідомі значення згаданих напружень через їх значення на внутрішній обмежувальній поверхні, тобто через $\sigma^{(1)}(\rho_1)$ та $\sigma_r^{(1)}(\rho_1) = -p_1$. Для цього скористаємося умовами контакту сусідніх шарів (24), подаючи перші із них через напруження. Зокрема, беручи до уваги, що $e_{\varphi}^{(j)} = u_r^{(j)} / \rho$, з рівності радіальних переміщень впливають рів-

ності колових деформацій $e_{\phi}^{(j+1)}(\rho_{j+1}) = e_{\phi}^{(j)}(\rho_{j+1})$, які, враховуючи співвідношення (21), зведемо до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1 - v^{(j+1)}(\rho_{j+1})}{E^{(j+1)}(\rho_{j+1})} \sigma^{(j+1)}(\rho_{j+1}) &= \\ &= \frac{1 - v^{(j)}(\rho_{j+1})}{E^{(j)}(\rho_{j+1})} \sigma^{(j)}(\rho_{j+1}) + \frac{1}{2} \beta^{(j)} \sigma_r^{(j)}(\rho_{j+1}) - \Phi^{(j+1)}(\rho_{j+1}) + \Phi^{(j)}(\rho_{j+1}), \end{aligned}$$

де $\beta^{(j)} = \frac{1 + v^{(j+1)}(\rho_{j+1})}{E^{(j+1)}(\rho_{j+1})} - \frac{1 + v^{(j)}(\rho_{j+1})}{E^{(j)}(\rho_{j+1})}$.

У результаті таких перетворень система інтегральних рівнянь (28) буде:

$$\begin{aligned} \frac{1 - v^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \sigma^{(j)}(\rho) &= \int_{\rho_j}^{\rho} [\varphi^{(j)}(\rho) - \varphi^{(j)}(\eta)] \eta^2 \sigma^{(j)}(\eta) d\eta + \frac{1 - v^{(1)}(\rho_1)}{E^{(1)}(\rho_1)} \sigma^{(1)}(\rho_1) + \\ &+ \frac{1}{2} (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \rho_k^3 \sigma_r^{(k)}(\rho_k) \varphi^{(k)}(\rho_{k+1}) + \\ &+ (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} [\varphi^{(k)}(\rho_{k+1}) - \varphi^{(k)}(\eta)] \eta^2 \sigma^{(k)}(\eta) d\eta + \\ &+ \frac{1}{2} (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \beta^{(k)} \sigma_r^{(k)}(\rho_{k+1}) - (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} F^{(k)}(\rho_{k+1}) - \\ &- \Phi^{(j)}(\rho) + \Phi^{(1)}(\rho_1) + \frac{1}{2} \rho_j^3 \sigma_r^{(j)}(\rho_j) \varphi^{(j)}(\rho) - F^{(j)}(\rho). \end{aligned} \quad (29)$$

Побудувавши розв'язок рівнянь (29) і (26), невідому величину $\sigma^{(1)}(\rho_1)$ визначимо з інтегральної умови (27). За відомими радіальними та сумарними напруженнями колові $\sigma_{\phi}^{(j)}$ розрахуємо як $\sigma_{\phi}^{(j)} = \sigma^{(j)} - \frac{1}{2} \sigma_r^{(j)}$. Радіальні $e_r^{(j)}$ і колові $e_{\phi}^{(j)}$ деформації знаходимо зі зв'язків між компонентами деформацій і напружень (21), а переміщення – з формул Коші $u_r^{(j)} = \rho e_{\phi}^{(j)}$.

Методика побудови розв'язків інтегральних рівнянь. Отже, визначення компонент термонапруженого стану розглядуваної кулі зведено до розв'язання системи інтегральних рівнянь (26) і (29) відносно радіальних $\sigma_r^{(j)}(\rho)$ та сумарних $\sigma^{(j)}(\rho)$ напружень та задоволення інтегральної умови (27). Тут застосуємо підхід, використаний у працях [1,3,6]. Розглянемо такі практично цікаві випадки.

• **Порожниста куля складається з трьох тонких шарів, виготовлених з різних термочутливих матеріалів.** Під *тонкими* вважатимемо шари такої товщини, для яких під час обчислення в рівняннях (26) і (29) інтегралів, що містять в підінтегральних виразах $Y(\eta)$ невідомі напруження, із задовільною для нас точністю можна використати формулу трапецій:

$$\int_{\rho_j}^{\rho} Y(\eta) d\eta \approx \frac{\rho - \rho_j}{2} [Y(\rho) + Y(\rho_j)]. \quad (30)$$

Тоді з рівнянь (29) отримаємо такі вирази для сумарних та радіальних напружень у довільному шарі кулі:

$$\sigma^{(j)}(\rho) = \sigma^{(1)}(\rho_1) \gamma_{10}^{(j)}(\rho) + \gamma_{00}^{(j)}(\rho), \quad \sigma_r^{(j)}(\rho) = \sigma^{(1)}(\rho_1) \gamma_{1r}^{(j)}(\rho) + \gamma_{0r}^{(j)}(\rho), \quad (31)$$

де

$$\gamma_{10}^{(j)}(\rho) = \left[\frac{1 - v^{(1)}(\rho_1)}{E^{(1)}(\rho_1)} + B_1^{(j)} \right] \chi_1^{(j)}(\rho) + \frac{1}{2} \rho_j^3 \gamma_{1r}^{(j)}(\rho_j) \varphi^{(j)}(\rho); \quad \gamma_{00}^{(j)}(\rho) = B_2^{(j)} \chi_1^{(j)}(\rho) + \chi_2^{(j)}(\rho);$$

$$\gamma_{1r}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^3} \left[(1 - \delta_{1j}) \rho_j^3 \gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j) + 2 \int_{\rho_j}^{\rho} \eta^2 \gamma_{10}^{(j)}(\eta) d\eta \right];$$

$$\gamma_{0r}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^3} \left[(1 - \delta_{1j}) \rho_j^3 \gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j) - \delta_{1j} \rho_1^3 p_1 + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta^2 (2\gamma_{00}^{(j)}(\eta) - \eta f^{(j)}(\eta)) d\eta \right];$$

$$B_1^{(j)} = \frac{1}{2} (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \rho_k^3 \gamma_{0r}^{(k)}(\rho_k) \varphi^{(k)}(\rho_{k+1}) + \\ + (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} [\varphi^{(k)}(\rho_{k+1}) - \varphi^{(k)}(\eta)] \eta^2 \gamma_{00}^{(k)}(\eta) d\eta + \\ + \frac{1}{2} (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \beta^{(k)} \gamma_{0r}^{(k)}(\rho_{k+1}),$$

$$B_2^{(j)} = B_1^{(j)} - (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} F^{(k)}(\rho_{k+1}) - \Phi^{(j)}(\rho_j) + \Phi^{(1)}(\rho_1);$$

$$\chi_1^{(j)}(\rho) = \frac{E^{(j)}(\rho)}{1 - v^{(j)}(\rho)} \left[1 + \frac{\rho - \rho_j}{2} \varphi^{(j)}(\rho) \rho^2 \frac{E^{(j)}(\rho_j)}{1 - v^{(j)}(\rho_j)} \right];$$

$$\chi_2^{(j)}(\rho) = \frac{E^{(j)}(\rho)}{1 - v^{(j)}(\rho)} \left[\frac{1}{2} \rho_j^3 \sigma_r^{(j)}(\rho_j) \varphi^{(j)}(\rho) - (\Phi^{(j)}(\rho) - \Phi^{(j)}(\rho_j)) - F^{(j)}(\rho) \right].$$

Якщо вираз для сумарних напружень (31) підставити в інтегральну умову (27), то її розв'язок відносно невідомої величини $\sigma^{(1)}(\rho_1)$ є такий:

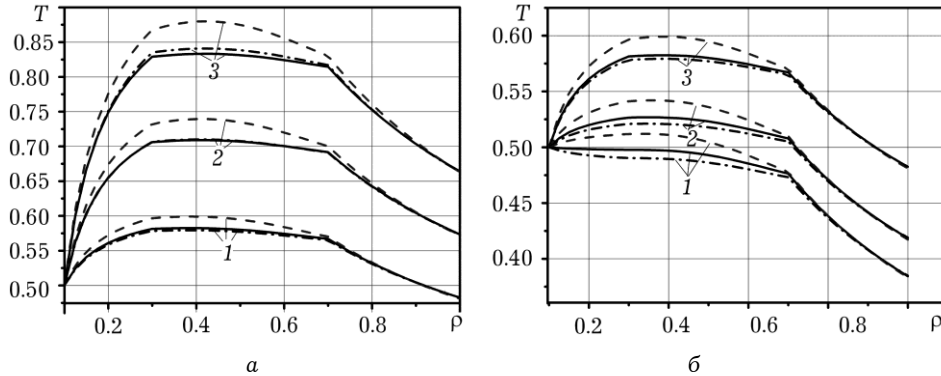
$$\sigma^{(1)}(\rho_1) = \frac{\rho_1^3 p_1 - \rho_{n+1}^3 p_2 + \sum_{k=1}^3 \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta f^{(j)}(\eta) d\eta - 2 \sum_{k=1}^3 \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta^2 \gamma_{00}^{(k)}(\eta) d\eta}{2 \sum_{k=1}^3 \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta^2 \gamma_{10}^{(k)}(\eta) d\eta}. \quad (32)$$

• **Порожниста куля виготовлена з товстих і тонких шарів з різних термочутливих матеріалів.** Неоднорідність матеріалу по товщині такої кулі створює нерівномірний розподіл температури і вона тим істотніша, що суттєвіша зміна температури. Таку кулю можна розглядати як складену з n шарів малої товщини (тонких шарів) із одного і того ж матеріалу в межах кожного товстого шару для багат шарової кулі. Сумарні і радіальні напруження у кожному з таких тонких шарів обчислимо за формулами (31), у яких вирази $\gamma_{\alpha 0}^{(j)}$, $\alpha = 0, 1$, спрощуються, бо $\beta^{(j)} = 0$, а у виразі (32) для $\sigma^{(1)}(\rho_1)$ межі сумування з «3» замінити на n .

Числовий аналіз. Дослідимо вплив температурної залежності теплових характеристик матеріалів шарів кулі (кераміка-титановий сплав-кераміка) на характер розподілу температури.

Експериментально задані коефіцієнти теплопровідності методом найменших квадратів апроксимуємо лінійними залежностями типу (5). При

цьому для кераміки (ZrO_2) і для титанового сплаву (Ti-6Al-4V) в діапазоні температур $300 \div 1100$ К отримали: $\lambda_t^{(1,3)} = 1.915 \left[1 + 0.24664 (T^{(1,3)} - T_p) \right]$, $\lambda_t^{(2)} = 6.2 \left[1 + 3.016 (T^{(2)} - T_p) \right]$. Нехай $\rho_1 = 0.1$; $\rho_2 = 0.3$; $\rho_3 = 0.7$; $\rho_4 = 1$, $l_0 = \rho_4$, $T_p = 3/11$, $T_k = 1$, $T_i = 1/2$, $T_o = 3/11$, $\alpha_3^* = 1$.



Розподіл температур для різних значень критеріїв Померанцева Po (а) та Біо Bi (б).

Побудували графіки розподілів температур для допустимих значень критеріїв Померанцева і Біо (див рисунок). Оскільки температура $T^{(j)}(\rho)$ повинна бути в межах $[3/11; 1]$, використали значення критеріїв $Po = \{-1; -1.5; -2\}$ і $Bi = \{1; 1.5; 2\}$ (криві 1, 2, 3). Тут суцільна лінія відповідає термочутливій кулі, штрихова – нетермочутливій за опорних, штрих-пунктирна – нетермочутливій за середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності.

Отже, розподіли температур у порожнистій кулі за лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалу від температури краще збігаються з відповідними для нетермочутливої кулі за середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності.

Висновки. Розроблено методику визначення стаціонарного теплового та компонент статичного (квазістатичного) напружено-деформованого станів порожнистих тришарових куль із термочутливих матеріалів за складного теплообміну, яка полягає у:

- побудові розв'язку нелінійної задачі теплопровідності з урахуванням умов теплообміну та умов ідеального теплового контакту на поверхнях шарів. При цьому коефіцієнти теплопровідності шарів, а також коефіцієнти теплообміну на обмежувальних поверхнях залежать від шуканої температури. В результаті задачу зведено до розв'язання одного нелінійного алгебричного рівняння для визначення сталої інтегрування, через яку виражено всі інші невідомі сталі інтегрування. Досліджено вплив безрозмірних критеріїв Біо та Померанцева на розподіли температур у такій порожнистій тришаровій кулі;

- визначенні компонент напружено-деформованого стану, спричиненого знайденим розподілом температури, з урахуванням залежних від радіальної координати масових сил та сталих нормальних навантажень на обмежувальних поверхнях за умов ідеального термомеханічного контакту між поверхнями сусідніх шарів зведенням до розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтерри з інтегральними умовами для визначення невідомих сумарних напружень на внутрішній обмежувальній поверхні. Запропоновано наближений спосіб розв'язання отриманої системи інтегральних рівнянь, який дає можливість

знайти аналітичні вирази для обчислення всіх компонент напружено-деформованого стану (напружень, деформацій, переміщень) у шарах кулі довільної товщини.

Ці формули містять вирази для розподілів температури та масових сил у шарах кулі, їх товщини, силові навантаження та функціональні залежності термомеханічних характеристик матеріалів шарів від температури.

1. *Калиняк Б. М.* Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 2. – С. 132–86.
2. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання // *Вісник Київськ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2013. – № 3. – С. 42–47.
3. *Попович В.С., Калиняк Б.М.* Математичне моделювання та методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 2. – С. 169–186.
4. *Noda N.* Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties: Thermal Stresses I / R. B. Hetnarski (ed.). Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1986. – P. 391–483.
5. *Rakocha I., Popovych V.* The mathematical modeling and investigation of the stress-strain state of the three-layer thermosensitive hollow cylinder // *Acta mech. et automatica.* – 2016. – **10**, № 3. – P. 181–188.
6. *Shevchuk V.A., Kalynyak B.M.* Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings // *Mat. Sci.* – 2011. – **46**, № 6. – P. 747–756.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО ПОЛОГО ШАРА ПРИ СЛОЖНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

Сформулирована математическая модель теплового и термоупругого состояний трехслойного термочувствительного полого шара в условиях сложного теплообмена с окружающей средой и постоянной силовой нагрузкой на его ограничительных поверхностях. Шар нагревается источниками тепла в среднем слое, а соседние слои идеально термомеханически контактируют. Найдено точное аналитическое решение задачи теплопроводности и аналитические выражения для определения упругодеформированного состояния путем сведения несвязанной задачи термоупругости к решению уравнений Вольтерры и определенных интегральных условий. Проанализировано влияние температурной зависимости характеристик материалов слоев на распределение температуры в зависимости от параметров тепловой нагрузки.

MATHEMATICAL MODELING AND DETERMINATION OF THE THERMO-ELASTIC STATE OF THE THREE-LAYER HOLLOW SPHERE AT COMPLETED HEAT EXCHANGE

The mathematical model of the thermal and thermo-stressed state of the three-layer thermal sensitive hollow sphere at complicated heat exchange with an environment, constant force loading on its boundary surfaces has been formulated. The sphere is heated by heat source in the middle layer. The ideal thermo-mechanical contacts are present between the neighbour layers. The exact analytic solution of the heat transfer problem and analytic expressions for thermal-stressed state using reduction of the unbounded thermo-elasticity problem to the solving the set of Volterra integral equation and defined integral condition were obtained. The influence of the temperature dependence of material properties in the layers on temperature distribution taking into account the dependence on thermal loading was analyzed.

¹Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

²Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів