

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ ПОЗДОВЖНЬОЇ ПРУЖНОЇ ХВИЛІ ІЗ ПЛОСКИМ НЕОДНОРІДНО ДЕФОРМОВАНИМ ШАРОМ

*Побудовано математичну модель для опису взаємодії плоскої ультразвукової хвилі поздовжньої поляризації з неоднорідно деформованим шаром. Записано систему алгебричних рівнянь для визначення амплітуд відбитих/заломлених шаром хвиль як функцій середньоінтегральних уздовж напрямків їх поширення значень компонент тензора початкової деформації.*

Як відомо, деформація у твердому тілі змінює параметри пружних хвиль, що поширюються у ньому, відбиваються чи заломлюються від його поверхонь. Цю властивість покладено в основу створення систем неруйнівного ультразвукового контролю для визначення напружено-деформованого стану досліджуваних об'єктів [1, 4, 6].

Нижче розглянуто математичну модель взаємодії поздовжньої (L) ультразвукової хвилі з пружним шаром, який перебуває у стані неоднорідної плоскої деформації. Із використанням ітераційного підходу [4, 6] за нормального падіння L-хвилі досліджено вплив неоднорідної деформації на характеристики відбитої хвилі.

**Модель взаємодії L-хвилі із двовимірним полем деформації у плоскому шарі.** Розглянемо ізотропний неоднорідно деформований пружний шар  $S: 0 < x_2 < h$ , поверхня  $x_2 = 0$  якого ідеально механічно контактує з поверхнею ізотропного пружного півпростору  $S^{(1)}: -\infty < x_2 < 0$ , що характеризується густиною маси  $\rho^{(1)}$  та модулем зсуву  $\mu^{(1)}$ . Поверхня  $x_2 = h$  не навантажена, область  $h < x_2 < \infty$  розглядаємо у наближенні вакууму. Матеріал шару має густину маси  $\rho$ , коефіцієнти Ляме  $\lambda, \mu$  та Мурнагана  $a, b, c$ . Його початковий стан визначає тензор плоскої деформації з компонентами  $e_{ij}(x_1, x_2)$ , ( $i, j = 1, 2$ ), внаслідок чого він є акустично неоднорідним і анізотропним.

Нехай у півпросторі  $S^{(1)}$  уздовж напрямку, що утворює кут  $\alpha$  із віссю  $Ox_2$ , поширюється хвиля L-поляризації з фазовою швидкістю  $C_l^{(1)} = \sqrt{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})/\rho^{(1)}}$  та частотою  $\omega$ . Коливний процес у півпросторі описує плоска гармонічна у часі хвиля з комплексною амплітудою  $W_{l(i)}^{(1)}$ , хвильовим числом  $K_l^{(1)} = \omega/C_l^{(1)}$  та вектором поляризації  $n = (\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$

$$w_l^{(1)}(x_1, x_2, t) = W_{l(i)}^{(1)} (e_1 \sin \alpha + e_2 \cos \alpha) \exp(i K_l^{(1)} (x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha)) \exp(-i \omega t).$$

Падаючи на поверхню  $x_2 = 0$ , хвиля внаслідок акустичної анізотропії збуджує квазіпоздовжню та квазіпоперечну хвилі в об'ємі шару та поздовжню і поперечну відбиті хвилі – в півпросторі  $S^{(1)}$ . На поверхні  $x_2 = h$  обидві хвилі (квазіпоздовжня і квазіпоперечна) відбиваються, утворюючи кожна дві хвилі – квазіпоздовжню та квазіпоперечну. Хвилі, відбиті у півпростір  $S^{(1)}$  із комплексними амплітудами  $W_{R(i)}^{(1)}$ ,  $W_{R(s)}^{(1)}$ , також будуть плос-

кими. Позначимо  $K_s^{(1)} = \omega/C_s^{(1)}$ ,  $C_s^{(1)} = \sqrt{\mu^{(1)}/\rho^{(1)}}$  хвильове число та фазову швидкість поперечних хвиль у півпросторі  $S^{(1)}$ . Згідно зі законом Снеліуса кути, що визначають напрями поширення відбитих у середовище  $S^{(1)}$  по-здовжньої та поперечної хвиль, такі

$$\alpha_l = \alpha, \quad \alpha_s = \arcsin\left(\left(C_s^{(1)}/C_l^{(1)}\right)\sin\alpha\right).$$

Тут і надалі позначатимемо: нижнім індексом  $l$  – хвилі, що поширюються у додатному напрямі осі  $Ox_2$ , індексом  $R$  – у від'ємному. Нижній індекс у дужках вказує на тип породженої хвилею, що падає, (відбитої/заломленої)  $L$  - або  $Sv$  -хвилі ( $l, s$ ) відповідно. Верхнім індексом у дужках (1) позначатимемо характеристики півпростору  $S^{(1)}$ . Параметри для неоднорідно деформованого шару  $S$  записуємо без верхнього індексу.

Тоді, як показано у праці [5], хвильове поле у неоднорідно деформованому шарі  $S$  описує система двох диференціальних рівнянь для компонент вектора переміщення  $W = \{W_1, W_2\}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left( B_{11} \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + B_{12} \left[ \frac{\partial W_1}{\partial x_2} + \frac{\partial W_2}{\partial x_1} \right] + B_1 \frac{\partial W_2}{\partial x_2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( B_2 \left( \frac{\partial W_1}{\partial x_2} + \frac{\partial W_2}{\partial x_1} \right) + B_{12} \left[ \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + \frac{\partial W_2}{\partial x_2} \right] \right) + \rho \omega^2 W_1 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} \left( B_2 \left( \frac{\partial W_1}{\partial x_2} + \frac{\partial W_2}{\partial x_1} \right) + B_{12} \left[ \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + \frac{\partial W_2}{\partial x_2} \right] \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( B_1 \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + B_{12} \left( \frac{\partial W_1}{\partial x_2} + \frac{\partial W_2}{\partial x_1} \right) + B_{22} \frac{\partial W_2}{\partial x_2} \right) + \rho \omega^2 W_2 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad B_{11}(x_1, x_2) &= \lambda + 2\mu + (2b + c)e_{11} + (a + b)e_1, \quad B_1(x_1, x_2) = \lambda + (a + b)e_1, \\ B_2(x_1, x_2) &= \mu + (2b + c)e_1, \quad B_{12}(x_1, x_2) = 0.5(2b + c)e_{12}, \\ B_{22}(x_1, x_2) &= \lambda + 2\mu + (a + b)e_1 + (2b + c)e_{22}(x_1, x_2), \quad e_1 = e_{11} + e_{22}. \end{aligned} \quad (2)$$

На межі  $x_2 = 0$ , де виконуються умови ідеального механічного контакту для пружних збурень, із умов рівності двох компонент вектора переміщення у різних середовищах і двох компонент тензора напружень  $\sigma_{12}, \sigma_{22}$  отримаємо чотири співвідношення, які пов'язують амплітуди падаючої, відбитих та заломлених хвиль:

$$\begin{aligned} & \left( W_1^{(1)} E(x_1) + W_{R(l)}^{(1)} E_l(x_1) \right) \sin \alpha + W_{R(s)}^{(1)} E_s(x_1) \cos \alpha_s = W_1(x_1, 0), \\ & \left( W_1^{(1)} E(x_1) - W_{R(l)}^{(1)} E_l(x_1) \right) \cos \alpha + W_{R(s)}^{(1)} E_s(x_1) \sin \alpha_s = W_2(x_1, 0), \\ & \mu^{(1)} K_l^{(1)} \left( W_1^{(1)} E(x_1) - W_{R(l)}^{(1)} E_l(x_1) \right) \sin 2\alpha - \\ & - \mu^{(1)} K_s^{(1)} W_{R(s)}^{(1)} E_s(x_1) \cos 2\alpha_s = -i s_{12}(x_1, 0), \\ & \mu^{(1)} \left[ 2K_l^{(1)} \left( W_1^{(1)} E(x_1) + W_{R(l)}^{(1)} E_l(x_1) \right) \cos^2 \alpha - K_s^{(1)} W_{R(s)}^{(1)} E_s(x_1) \sin 2\alpha_s \right] + \end{aligned} \quad (3)$$

$$+\lambda^{(1)}K_l^{(1)}\left[W_l^{(1)}E(x_1)+W_{R(l)}^{(1)}E_l(x_1)\right]=-i s_{22}(x_1,0).$$

На вільній поверхні  $x_2 = h$  справедливі умови

$$s_{12}(x_1, h) = 0, \quad s_{22}(x_1, h) = 0. \tag{4}$$

Тут  $E(x_1) = \exp(i K^{(1)} x_1 \sin \alpha)$ ,  $E_\chi(x_1) = \exp(i K_\chi^{(1)} x_1 \sin \alpha_\chi)$ ,  $(\chi = l, s)$ ,

$$s_{12}(x_1, x_2) = B_2 \left( \frac{\partial W_1}{\partial x_2} + \frac{\partial W_2}{\partial x_1} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + \frac{\partial W_2}{\partial x_2} \right),$$

$$s_{22}(x_1, x_2) = B_1 \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + B_{12} \left( \frac{\partial W_1}{\partial x_2} + \frac{\partial W_2}{\partial x_1} \right) + B_{22} \frac{\partial W_2}{\partial x_2}.$$

Таким чином, хвильовий процес у пружно деформованому шарі, що контактує із пружним півпростором та має вільну поверхню, описує система диференціальних рівнянь (1) із крайовими умовами (3), (4).

**Визначення хвильового поля у пружно деформованому шарі у середньоінтегральному наближенні.** Хвильове поле у шарі  $S$  у розглядуваному випадку є суперпозицією заломлених поверхнею  $x_2 = 0$  і відбитих поверхнею  $x_2 = h$  квазіпоздовжніх та квазіпоперечних хвиль. Позначимо через  $\beta_{l(l)}, \beta_{l(s)}$  кути, які визначають напрями поширення заломлених, а через  $\beta_{R(l)}, \beta_{R(s)}$  – відбитих падаючою хвилею  $L$ - та  $SV$ -хвиль відповідно;  $\theta_{l(l)}, \theta_{l(s)}$  і  $\theta_{R(l)}, \theta_{R(s)}$  – кути для визначення напрямків поляризації відповідних хвиль, які під час взаємодії збурення з неоднорідно деформованим середовищем не збігаються із напрямками поширення. Ці кути поки що невідомі.

Для розв'язування системи рівнянь (1), що описує хвильове поле у неоднорідно деформованому шарі, використаємо ітераційний метод, описаний раніше [5]. Функції компонент тензора початкової деформації  $e_{ij}(x_1, x_2)$  запишемо у нових координатах, отриманих із вихідної системи поворотом у площині  $x_1 O x_2$  на кут  $\beta_{l(\kappa)}$  і трансляції початку відліку на вектор  $(\xi_{l(\kappa)}, 0)$  для заломлених поверхнею  $x_2 = 0$  хвиль, та поворотом на кут  $(\pi - \beta_{R(\kappa)})$  і трансляції початку відліку на вектор  $(\xi_{R(\kappa)} = \xi_{l(\kappa)} + h \operatorname{tg} \beta_{l(\kappa)}, h)$  для хвиль, відбитих межею  $x_2 = h$ . Подамо їх як суму  $\varepsilon_{ij}(x, y) = \bar{\varepsilon}_{ij}(\beta_{\vartheta(\kappa)}) + \mathcal{E}_{ij}(x, y)$  середньоінтегральних значень на напрямках  $n_{l(\kappa)} = \{\sin \beta_{l(\kappa)}, \cos \beta_{l(\kappa)}, 0\}$  та  $n_{R(\kappa)} = \{\sin \beta_{R(\kappa)}, -\cos \beta_{R(\kappa)}, 0\}$ ,  $(\kappa = l, s)$ , утворених введеними кутами,

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\beta_{\vartheta(\kappa)}) = \frac{\cos \beta_{\vartheta(\kappa)}}{h} \int_0^{h/\cos \beta_{\vartheta(\kappa)}} \varepsilon_{ij}(x, 0) dx, \quad (\vartheta = l, R), \tag{5}$$

і відхилень від цих значень.

Підставляючи подання компонент тензора початкової деформації у вигляді суми середньоінтегральних на напрямках поширення та відхилень від цих значень у співвідношення (2), перепишемо систему рівнянь (1) для хвилі, напрям поширення якої визначає один із кутів  $\varphi = \{\beta_{l(l)}, \beta_{l(s)}, \beta_{R(l)}, \beta_{R(s)}\}$ , у вигляді ітераційної процедури [5]:

$$\left( \bar{b}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \omega^2 \right) W_1^{[\rho+1]} + \bar{b}_{12} \frac{\partial^2 W_2^{[\rho+1]}}{\partial x^2} = - (T_{11} + N_{11}) W_1^{[\rho]} - (T_{12} + N_{12}) W_2^{[\rho]},$$

$$\bar{b}_{12} \frac{\partial^2 W_1^{[\rho+1]}}{\partial x^2} + \left( \bar{b}_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \omega^2 \right) W_2^{[\rho+1]} = - (T_{12} + N_{12}) W_1^{[\rho]} - (T_{22} + N_{22}) W_2^{[\rho]}. \quad (6)$$

Тут  $\bar{b}_{11} = \bar{b}_{11}(\varphi) = \bar{B}_{11} \sin^2 \varphi + \bar{B}_{12} \sin 2\varphi + \bar{B}_2 \cos^2 \varphi$ ,

$$\bar{b}_{12} = \bar{b}_{12}(\varphi) = \bar{B}_{12} + 0.5(\bar{B}_1 + \bar{B}_2) \sin 2\varphi,$$

$$\bar{b}_{22} = \bar{b}_{22}(\varphi) = \bar{B}_2 \sin^2 \varphi + \bar{B}_{12} \sin 2\varphi + \bar{B}_{22} \cos^2 \varphi,$$

$$T_{11}(x, y) = \partial \left[ (\bar{B}_{11} \sin^2 \varphi + \bar{B}_{12} \sin 2\varphi + \bar{B}_2 \cos^2 \varphi) \partial / \partial x \right] / \partial x,$$

$$T_{12}(x, y) = \partial \left[ (\bar{B}_{12} + 0.5(\bar{B}_1 + \bar{B}_2) \sin 2\varphi) \partial / \partial x \right] / \partial x,$$

$$T_{22}(x, y) = \partial \left[ (\bar{B}_2 \sin^2 \varphi + \bar{B}_{12} \sin 2\varphi + \bar{B}_{22} \cos^2 \varphi) \partial / \partial x \right] / \partial x,$$

$$N_{11}(x, y) = D_1 [(B_{12} \sin \varphi - B_{11} \cos \varphi) \partial / \partial y] + D_2 [(B_2 \sin \varphi - B_{12} \cos \varphi) \partial / \partial y],$$

$$N_{12}(x, y) = D_1 [(B_2 \sin \varphi - B_{12} \cos \varphi) \partial / \partial y] + D_2 [(B_{12} \sin \varphi - B_2 \cos \varphi) \partial / \partial y],$$

$$N_{22}(x, y) = D_1 [(B_{12} \sin \varphi - B_2 \cos \varphi) \partial / \partial y] + D_2 [(B_{22} \sin \varphi - B_{12} \cos \varphi) \partial / \partial y],$$

де  $D_1 = \sin \varphi \partial / \partial x - \cos \varphi \partial / \partial y$ ,  $D_2 = \cos \varphi \partial / \partial x + \sin \varphi \partial / \partial y$ .

За нульове наближення ітераційної процедури (6) беремо розв'язок системи рівнянь

$$(\bar{b}_{11}(\varphi) \partial^2 / \partial x^2 + \rho \omega^2) W_1 + \bar{b}_{12}(\varphi) \partial^2 W_2 / \partial x^2 = 0,$$

$$\bar{b}_{12}(\varphi) \partial^2 W_1 / \partial x^2 + (\bar{b}_{22}(\varphi) \partial^2 / \partial x^2 + \rho \omega^2) W_2 = 0. \quad (7)$$

Верхній індекс [0] для нульової ітерації тут і надалі опускаємо.

Як відомо, розв'язками цієї системи рівнянь будуть по дві взаємозв'язані квазіпоздовжня та квазіпоперечна плоскі хвилі, заломлені поверхнею  $x_2 = 0$  (для них  $x = x_1 \sin \beta_{l(\eta)} + x_2 \cos \beta_{l(\eta)}$ ) і відбиті межею  $x_2 = h$  (тут  $x = x_1 \sin \beta_{R(\eta)} - x_2 \cos \beta_{R(\eta)}$ ), ( $\eta = l, s$ ):

$$W_{\chi(l)}(x) = (W_1 \sin \theta_{\chi(l)} + W_2 \cos \theta_{\chi(l)}) \exp(i K_{\chi(l)} x),$$

$$W_{\chi(s)}(x) = (W_1 \cos \theta_{\chi(s)} - W_2 \sin \theta_{\chi(s)}) \exp(i K_{\chi(s)} x), \quad (\chi = l, R). \quad (8)$$

Їхні фазові швидкості визначають для кожного кута  $\varphi$  як [2]

$$2\rho \bar{C}_l(\varphi)^2 = \bar{b}_{11}(\varphi) + \bar{b}_{22}(\varphi) + \sqrt{(\bar{b}_{11}(\varphi) - \bar{b}_{22}(\varphi))^2 + 4\bar{b}_{12}(\varphi)^2},$$

$$2\rho \bar{C}_s(\varphi)^2 = \bar{b}_{11}(\varphi) + \bar{b}_{22}(\varphi) - \sqrt{(\bar{b}_{11}(\varphi) - \bar{b}_{22}(\varphi))^2 + 4\bar{b}_{12}(\varphi)^2}. \quad (9)$$

Отримані співвідношення (9) є функціями від невідомих кутів відбитих і заломлених у шарі хвиль  $\varphi = \{\beta_{l(l)}, \beta_{l(s)}, \beta_{R(l)}, \beta_{R(s)}\}$ . У середньоінтегральному наближенні моделі, згідно зі законом Снеліуса про рівність дотичних до

поверхні поділу середовищ компонент хвильових векторів, отримаємо такі трансцендентні рівняння для визначення кутів відбивання/заломлення на поверхнях поділу середовищ:

$$\bar{C}_{\chi(\eta)} \sin \alpha - C_l^{(1)} \sin \beta_{\chi(\eta)} = 0. \quad (10)$$

Пропонуємо ітераційну процедуру розв'язування трансцендентних рівнянь (10), для якої шукані кути  $\beta_{\chi(\eta)}$  подамо у вигляді [5]

$$\beta_{\chi(\eta)} = \arcsin \left( C_\eta / C^{(1)} \sin \alpha \right) + \Delta_{\chi(\eta)} = \beta_\eta + \Delta_{\chi(\eta)}. \quad (11)$$

Тут  $\beta_\eta$  – кут заломлення, а  $C_\eta$  – фазова швидкість хвилі  $\eta$  - поляризації у шарі без деформації.

Подання (11) підставимо у рівняння (10), розкладаючи усі функції, залежні від шуканих кутів, у ряд Тейлора в околі  $\beta_\eta$ . Оскільки акустична неоднорідність шару є слабкою, то і шукані уточнення для кутів  $\Delta_{\chi(\eta)}$  є малими проти  $\beta_\eta$ . Тому обмежимося лінійними доданками розкладу у ряд Тейлора. У результаті трансцендентні рівняння (10) перетворимо у лінійні співвідношення для уточнень  $\Delta_{\chi(\eta)}$ . Визначивши уточнення для кутів відбивання/заломлення, обчислимо середньоінтегральні вздовж цих напрямків фазові швидкості, виконуючи ітераційну процедуру доти, поки рівняння (10) не виконуватимуть із заданою точністю.

Вектори поляризації визначимо як власні вектори акустичного тензора. Кути, що визначають напрямки поляризації  $\theta_{\chi(\eta)}$ , пов'язані із кутами  $\beta_{\chi(\eta)}$  ( $\chi = I, R$ ) співвідношеннями

$$\operatorname{tg} 2\theta_{\chi(\eta)} = \frac{F(\beta_{\chi(\eta)}) \operatorname{tg} 2\beta_{\chi(\eta)} - 2(2b + c) \bar{\epsilon}_{12}(\beta_{\chi(\eta)})}{F(\beta_{\chi(\eta)}) + 2(2b + c) \bar{\epsilon}_{12}(\beta_{\chi(\eta)}) \operatorname{tg} 2\beta_{\chi(\eta)}}, \quad (12)$$

де  $F(\beta_{\chi(\eta)}) = \lambda + \mu + A \bar{\epsilon}_1(\beta_{\chi(\eta)}) + (2b + c) (\bar{\epsilon}_{11}(\beta_{\chi(\eta)}) - \bar{\epsilon}_{22}(\beta_{\chi(\eta)}))$ .

Із використанням подань (8) для хвильового поля у шарі зі систем рівнянь (3), (4), що задають крайові умови на поверхнях  $x_2 = 0$  та  $x_2 = h$ , отримаємо систему шести ( $k = \overline{1,6}$ ) алгебричних рівнянь для невідомих комплексних амплітуд  $W_{R(l)}^{(1)}, W_{R(s)}^{(1)}, W_{I(l)}, W_{I(s)}, W_{R(l)}, W_{R(s)}$  у вигляді

$$A_{k1} W_{R(l)}^{(1)} + A_{k2} W_{R(s)}^{(1)} + A_{k3} W_{I(l)} + A_{k4} W_{I(s)} + A_{k5} W_{R(l)} + A_{k6} W_{R(s)} = F_k(\alpha). \quad (13)$$

Тут матрицю  $A = \{A_{ij} : i, j = \overline{1,6}\}$  системи задають компоненти

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sin \alpha, \quad A_{12} = \cos \alpha_s, \quad A_{13} = -\sin \theta_{I(l)}, \quad A_{14} = -\cos \theta_{I(s)}, \\ A_{15} &= -\sin \theta_{R(l)}, \quad A_{16} = -\cos \theta_{R(s)}, \quad A_{21} = \cos \alpha, \quad A_{23} = \cos \theta_{I(l)}, \\ A_{24} &= -\sin \theta_{I(s)}, \quad A_{25} = -\cos \theta_{R(l)}, \quad A_{26} = \sin \theta_{R(s)}, \quad A_{31} = \mu^{(1)} K_l^{(1)} \sin 2\alpha, \\ A_{32} &= \mu^{(1)} K_s^{(1)} \cos 2\alpha_s, \quad A_{33} = -K_{I(l)} \left( \bar{B}_2 \sin(\beta_{I(l)} + \theta_{I(l)}) + \bar{B}_2 \cos(\beta_{I(l)} - \theta_{I(l)}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{34} &= -K_{I(s)} \left( \bar{B}_2 \cos(\beta_{I(s)} + \theta_{I(s)}) + \bar{B}_{12} \sin(\beta_{I(s)} - \theta_{I(s)}) \right), \\
A_{35} &= K_{R(l)} \left( \bar{B}_2 \sin(\beta_{R(l)} + \theta_{R(l)}) - \bar{B}_{12} \cos(\beta_{R(l)} - \theta_{R(l)}) \right), \\
A_{36} &= K_{R(s)} \left( \bar{B}_2 \cos(\beta_{R(s)} + \theta_{R(s)}) - \bar{B}_{12} \sin(\beta_{R(s)} - \theta_{R(s)}) \right), \\
A_{41} &= K_I^{(1)} (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \cos^2 \alpha), \quad A_{42} = -\mu^{(1)} K_S^{(1)} \sin 2\alpha_s, \\
A_{43} &= -K_{I(l)} \left( \bar{B}_{12} \sin(\beta_{I(l)} + \theta_{I(l)}) + \bar{B}_1 \cos(\beta_{I(l)} - \theta_{I(l)}) + \bar{B}_3 \cos \beta_{I(l)} \cos \theta_{I(l)} \right), \\
A_{44} &= -K_{I(s)} \left( \bar{B}_{12} \cos(\beta_{I(s)} + \theta_{I(s)}) + \bar{B}_1 \sin(\beta_{I(s)} - \theta_{I(s)}) - \bar{B}_3 \cos \beta_{I(s)} \sin \theta_{I(s)} \right), \\
A_{45} &= K_{R(l)} \left( \bar{B}_{12} \sin(\beta_{R(l)} + \theta_{R(l)}) - \bar{B}_1 \cos(\beta_{R(l)} - \theta_{R(l)}) - \bar{B}_3 \cos \beta_{R(l)} \cos \theta_{R(l)} \right), \\
A_{46} &= K_{R(s)} \left( \bar{B}_{12} \cos(\beta_{R(s)} + \theta_{R(s)}) - \bar{B}_1 \sin(\beta_{R(s)} - \theta_{R(s)}) + \bar{B}_3 \cos \beta_{R(s)} \sin \theta_{R(s)} \right), \\
A_{51} &= A_{52} = 0, \quad A_{61} = A_{62} = 0, \\
A_{53} &= K_{I(l)} \left( \bar{B}_2 \sin(\beta_{I(l)} + \theta_{I(l)}) + \bar{B}_{12} \cos(\beta_{I(l)} - \theta_{I(l)}) \right) G_{I(l)}, \\
A_{54} &= K_{I(s)} \left( \bar{B}_2 \cos(\beta_{I(s)} + \theta_{I(s)}) + \bar{B}_{12} \sin(\beta_{I(s)} - \theta_{I(s)}) \right) G_{I(s)}, \\
A_{55} &= K_{R(l)} \left( -\bar{B}_2 \sin(\beta_{R(l)} + \theta_{R(l)}) + \bar{B}_{12} \cos(\beta_{R(l)} - \theta_{R(l)}) \right) G_{R(l)}, \\
A_{56} &= K_{R(s)} \left( -\bar{B}_2 \cos(\beta_{R(s)} + \theta_{R(s)}) + \bar{B}_{12} \sin(\beta_{R(s)} - \theta_{R(s)}) \right) G_{R(s)}, \\
A_{63} &= K_{I(l)} G_{I(l)} \left( \begin{array}{l} \bar{B}_{12} \sin(\beta_{I(l)} + \theta_{I(l)}) + \bar{B}_1 \cos(\beta_{I(l)} - \theta_{I(l)}) + \\ + \bar{B}_3 \cos \beta_{I(l)} \cos \theta_{I(l)} \end{array} \right), \\
A_{64} &= K_{I(s)} G_{I(s)} \left( \begin{array}{l} \bar{B}_{12} \cos(\beta_{I(s)} + \theta_{I(s)}) + \bar{B}_1 \sin(\beta_{I(s)} - \theta_{I(s)}) - \\ - \bar{B}_3 \cos \beta_{I(s)} \sin \theta_{I(s)} \end{array} \right), \\
A_{65} &= K_{R(l)} G_{R(l)} \left( \begin{array}{l} -\bar{B}_{12} \cos(\beta_{R(l)} + \theta_{R(l)}) + \bar{B}_1 \cos(\beta_{R(l)} - \theta_{R(l)}) + \\ + \bar{B}_3 \cos \beta_{R(l)} \cos \theta_{R(l)} \end{array} \right), \\
A_{66} &= K_{R(s)} G_{R(s)} \left( \begin{array}{l} -\bar{B}_{12} \sin(\beta_{R(s)} + \theta_{R(s)}) + \bar{B}_1 \sin(\beta_{R(s)} - \theta_{R(s)}) - \\ - \bar{B}_3 \cos \beta_{R(s)} \sin \theta_{R(s)} \end{array} \right),
\end{aligned}$$

а вектор-стовпчик вільних членів  $F^T = \{F_i(\alpha) : i = \overline{1,6}\}$  – компоненти

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha) &= -\sin \alpha, \quad F_2(\alpha) = \cos \alpha, \quad F_3(\alpha) = \mu^{(1)} K_I^{(1)} \sin 2\alpha, \\
F_4(\alpha) &= -K_I^{(1)} (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} \cos^2 \alpha), \quad F_5(\alpha) = F_6(\alpha) = 0;
\end{aligned} \tag{15}$$

$$G_{I(\chi)} = \exp(i h K_{I(\chi)} \cos \beta_{I(\chi)}), \quad G_{R(\chi)} = \exp(-i h K_{R(\chi)} \cos \beta_{R(\chi)});$$

$$\bar{B}_3 = 2\mu + (2b + c) \bar{e}_{22}.$$

Таким чином, співвідношення (11), (12) та розв'язки системи рівнянь (13) повністю визначають у середньоінтегральному вздовж напрямків поширення збурень у неоднорідно деформованому шарі наближенні хвильове поле у шарі та у півпросторі.

За нормального падіння хвилі ( $\alpha = 0$ ) система (13) спрощується до трьох рівнянь та набуває вигляду

$$1 - W_R^{(1)} = W_I - W_R, \quad Z^{(1)}(1 + W_R^{(1)}) = \bar{Z}(W_I + W_R),$$

$$W_I \exp(i h \bar{K}) + W_R \exp(-i h \bar{K}) = 0.$$

Розв'язуючи її, знаходимо коефіцієнт відбивання на межі  $x_2 = 0$ :

$$W_R^{(1)} = \frac{\bar{Z}(1 - \exp(2i h \bar{K})) - Z^{(1)}(1 + \exp(2i h \bar{K}))}{Z^{(1)}(1 + \exp(2i h \bar{K})) + \bar{Z}(1 - \exp(2i h \bar{K}))}. \quad (16)$$

Тут  $W_R^{(1)} = W_{R(l)}^{(1)} / W_{I(l)}^{(1)}$ ,  $W_I = W_{I(l)} / W_{I(l)}^{(1)}$ ,  $W_R = W_{R(l)} / W_{I(l)}^{(1)}$  – коефіцієнти відбивання/заломлення;  $Z^{(1)} = \rho^{(1)} C^{(1)}$ ,  $\bar{Z} = \rho \bar{C}$  – акустичні опори хвилі у півпросторі та шарі,  $\bar{C} = \omega / \bar{K}$  – середньоінтегральна швидкість поширення хвилі у шарі.

Для прикладу розглянемо плоский шар  $|x_1| \leq 2$ ,  $|x_2| \leq h$ , вільно опертий на кінцях та рівномірно навантажений по поверхні  $x_2 = -h$  у напрямку осі  $Ox_2$ . Під дією такого навантаження у шарі виникає неоднорідна деформація [3]:

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{q}{4Eh^3} (x_2^3(2 + \nu) - 3x_2(x_1^2 + \nu h^2) - 2\nu h^3),$$

$$\varepsilon_{22}(x_1, x_2) = \frac{-q}{4E} (x_2^3(2\nu + 1) - 3x_2(\nu x_1^2 + h^2) + 2h^3), \quad \varepsilon_{12}(x_1, x_2) = \frac{3q}{8\mu} (x_2^2 - h^2) x_1. \quad (17)$$

Тут  $q$  – інтенсивність навантаження,  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу шару.

Рисунок ілюструє вплив неоднорідного поля деформацій у шарі на фазу відбитої поверхнею  $x_2 = -h$  поздовжньої хвилі  $\delta(x_1)$  за фіксованої хвилевої товщини шару та різних інтенсивностей навантаження  $q$ . Криві 1–3 відповідають навантаженню  $q = P$ ,  $2P$  та  $5P$ .

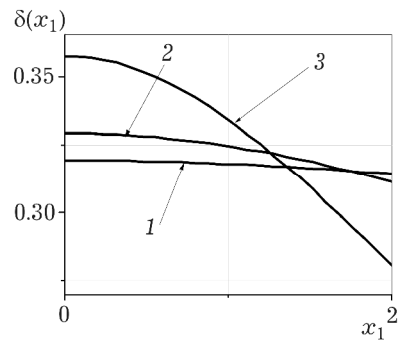
Пружні властивості середовищ та шару без напружень однакові:

$$\rho^{(1)} = \rho = 1.16 \cdot 10^3, \text{ кг/м}^3,$$

$$\lambda^{(1)} = \lambda = 3.920 \cdot 10^9, \text{ Н/м}^2,$$

$$\mu^{(1)} = \mu = 1.862 \cdot 10^9, \text{ Н/м}^2.$$

Як бачимо, зі зростанням навантаження збільшується фаза відбитої хвилі. Максимальних значень вона досягає в околі  $x_1 = 0$ , де інтенсивність навантаження найвища.



Зазначимо, що у статті [2] розглянули взаємодію із заданим шаром між двома ізотропними півпросторами хвилі SH-поляризації нормального падіння, параметри якої у середньоінтегральному наближенні не залежали від характеристик поля початкової деформації шару. Лише перше ітераційне наближення розв'язку задачі дало можливість отримати співвідношення,

що визначали вплив неоднорідності деформацій на зондувальну SH-хвилю. Застосовуючи поздовжньо поляризовану хвилю, отримали залежність параметрів відбитої хвилі від компонент тензора початкової деформації у нульовому наближенні розв'язку.

**Висновки.** У межах математичної моделі поширення малих пружних збурень у неоднорідно деформованому континуумі сформульовано стаціонарну задачу про падіння з ізотропного пружного півпростору плоскої ультразвукової L-хвилі на неоднорідно деформований плоский шар. Із використанням нульового наближення розробленого раніше ітераційного процесу записано систему алгебричних рівнянь для визначення амплітуд хвильового поля у напруженому шарі та амплітуд хвиль, відбитих шаром, як функцій середньоінтегральних уздовж напрямків поширення хвиль значень тензора початкової неоднорідної деформації. Отримано співвідношення для визначення напрямків поляризації відбитих/заломлених шаром хвиль. Числово досліджено взаємодію L-хвилі нормального падіння із балкою, опертою на кінцях, що згинається під дією навантаження. Виявлено залежність фази відбитої зондувальної хвилі від навантаження та розподілу деформацій. Таким чином, розв'язки побудованої задачі можна ефективно застосовувати для формулювання прямих та обернених задач неруйнівного визначення напружено-деформованого стану кусково-однорідних тіл із урахуванням процесів відбивання/заломлення на межі поділу середовищ.

1. Алешин Н. П., Белый В. Е., Вopilкин А. Х. и др. Методы акустического контроля металлов. – М.: Машиностроение, 1989. – 456 с.
2. Кравчишин О. З., Чекурін В. Ф. Проходження ультразвукової хвилі SH-поляризації крізь неоднорідно деформований пружний шар // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12. – С. 97–103.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
4. Чекурін В. Ф., Кравчишин О. З. Пружні збурення в неоднорідно деформованих твердих тілах. – Львів: СПОЛОМ, 2008. – 152 с.
5. Чекурін В. Ф., Кравчишин О. З. Математична модель взаємодії пружних хвиль L- та Sv-поляризації із неоднорідно деформованим шаром // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2015. – Вип. 22, № 2. – С. 133–141.
6. Kravchishin O. Z. and Chekurin V. F. Acoustoelasticity Model of Inhomogeneously Deformed Bodies // Mech. Solids – 2009. – 44, № 5. P. 781–791.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ С ПЛОСКИМ НЕОДНОРОДНО ДЕФОРМИРОВАННЫМ СЛОЕМ

Разработана математическая модель для описания взаимодействия продольно поляризованной ультразвуковой волны с неоднородно деформированным слоем. Записана система алгебраических уравнений для определения амплитуд отраженных/преломленных слоев волн как функций среднеинтегральных вдоль направлений их распространения значений компонент тензора начальной деформации.

#### THE MATHEMATICAL MODEL OF INTERACTION OF WAVE L-POLARIZATION WITH ELASTIC IN-HOMOGENEOUSLY DEFORMED LAYER

A mathematical model for interaction of a narrow ultrasonic beam of ultrasonic waves L-polarization with an elastic layer under plane deformation has been formulated. The system of algebraic equations for determination of amplitudes of reflected and refracted waves in the layer as the functions by mean-integral values along the directions of propagation the field of initial deformations are obtained.