

МЕТОД ПРЯМОГО ВИРІЗУВАННЯ У ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Розроблений раніше метод прямого вирізування поширено на клас плоских задач теорії пружності для тіл з тріщинами. Основа методу – моделювання вихідної задачі для тіла з тонкими неоднорідностями за допомогою задачі пружної рівноваги тіла простішої геометричної форми зі збільшеною кількістю тонких дефектів, які формують межі тіла. На прикладах вивчення задач пружної рівноваги півплощини, смуги та клина з тріщиною за дії симетричного навантаження проаналізовано достовірність, точність і ефективність запропонованого підходу.

Міцність реальних тіл суттєво залежить від дефектності їхньої структури. Теоретичний аналіз механізмів руйнування таких тіл переважно пов'язаний зі значними труднощами як у моделюванні, так і у виборі механізмів і підходів до розв'язування змодельованих задач. Проте прогнозування надійності та довговічності тіл і елементів конструкцій викликає значний інтерес дослідників.

Одним із доволі ретельно вивчених розділів механіки є плоска задача теорії пружності. Великий огляд праць з цієї проблематики можна знайти, зокрема, в монографіях [9, 4]. Втім розробка нових фізично обґрунтованих методів і моделей, що враховують дефекти та конструкційні включення, залишається актуальною.

У 1974 р. М. П. Саврук, розглянувши нескінченну пластину з $N+1$ тріщиною та спрямувавши довжину однієї з тріщин до нескінченності, отримав систему N сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) задачі про визначення напружено-деформованого стану півнескінченної пластини, послабленої системою з N довільно орієнтованих тріщин [6, 4]. У 1978 р. такий самий підхід застосували до визначення напружено-деформованого стану смуги, послабленої системою з N тріщин [8, 4]. Розглянувши нескінченну пластину з $N+2$ тріщинами та спрямувавши довжину двох паралельних тріщин до нескінченності, задачу звели до розв'язування системи N СІР. В обох випадках з нескінченної пластини ніби «вирізують» необхідний об'єкт. Надалі називатимемо такий підхід методом непрямого вирізування, оскільки задачі зводять до системи сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР), зменшуючи загальну розмірність вихідної системи, проте ускладнюючи ядра інтегральних рівнянь, причому кожна нова задача потребує як побудови нових ядер ССІР, так і розробки методів їх обчислень.

У праці [3] запропоновано зводити задачі пружної рівноваги тіл складної геометричної форми за наявності тонких дефектів до розв'язування геометрично простіших задач, зокрема для нескінченного простору чи кусково-однорідного простору зі збільшеною кількістю тонких, проте скінчених, неоднорідностей – тріщин і абсолютно жорстких включень, які формуватимуть навантажені чи защемлені з певним натягом межі тіла. Так досягають універсальності підходу, оскільки, розв'язуючи одну ССІР, можна отримати наближені розв'язки окремих геометрично різних задач. Надалі називатимемо такий підхід методом прямого вирізування.

Його достовірність, точність і ефективність апробовано на прикладах задач поздовжнього зсуву однорідних та кусково-однорідних тіл з тонкими дефектами, зокрема півпростору [3], клина [2], двошарової структури [3] та бруса [5, 1] з тонкими неоднорідностями за дії однорідного навантаження, а також зосереджених чинників.

Нижче застосуємо метод прямого вирізування для дослідження напруженого стану низки однорідних ізотропних тіл з тріщинами для плоскої

задачі теорії пружності. Як і в антиплоскій постанові задачі [3], навантажені або вільні від навантаження межі тіла моделюватимемо за допомогою симетрично навантажених тріщин. Тому задачі пружної рівноваги однорідного тіла з тріщинами за допомогою методу прямого вирізування формально зводяться до розв'язування задачі теорії пружності для системи довільно орієнтованих тріщин у площині.

Формулювання задачі. У пружній ізотропній площині є N прямолінійних дефектів довжиною $2a_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Центри тріщин O_k визначені координатами $Z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0$; α_k – кути нахилу локальних систем координат $x_k O_k y_k$ до осі абсцис.

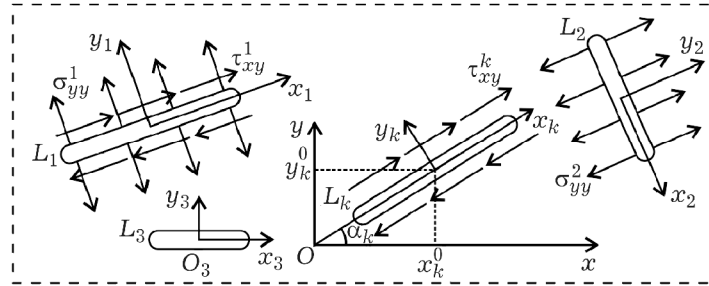


Рис. 1.

Береги тріщин навантажені симетричними нормальними і дотичними зусиллями $p_k = \sigma_{yy}^k + i\tau_{xy}^k$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Тут $\sigma_{yy}^k, \tau_{xy}^k$ – компоненти тензора напружень на верхньому та нижньому берегах дефекту у його локальній системі координат $x_k O_k y_k$. Напруження на нескінченності відсутні (рис. 1).

Методика розв'язування такої задачі з використанням комплексних потенціалів Колосова–Мусхелішвілі відома [9, 4]. Компоненти тензора напружень виражають через дві аналітичні функції – комплексні потенціали $\Phi(z), \Psi(z)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}; \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]; \\ 2\mu(u + iv) &= \chi\phi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}; \\ \Phi(z) &= \phi'(z); \quad \Psi(z) = \psi'(z); \quad \Phi'(z) = \phi''(z). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $\mu = E/2(1 + \nu)$ – модуль зсуву; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; $\chi = 3 - 4\nu$ – для плоскої деформації; $\chi = \frac{3 - \nu}{1 - \nu}$ – для плоского напруженого стану.

Вплив системи тонких дефектів на напружений стан тіла подамо у вигляді невідомих функцій стрибків напружень f_1^k, f_2^k і похідних від зміщень f_3^k, f_4^k [9]. Враховуючи симетрію напружень на берегах тріщин, запишемо [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{k+} - \sigma_{yy}^{k-} - i(\tau_{xy}^{k+} - \tau_{xy}^{k-}) &= 2q_k(x) = -f_1^k + if_2^k = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x}(u^{k+} - u^{k-} + i(v^{k+} - v^{k-})) &= \frac{i(\chi + 1)}{2\mu} g_k'(x) = -f_3^k - if_4^k. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $\sigma_{yy}^{k\pm}, \tau_{xy}^{k\pm}$ і $U^{k\pm}, V^{k\pm}$ – компоненти тензора напружень і вектора переміщень відповідно на верхньому (+) і нижньому (–) берегах k -ої тріщини. Комплексні потенціали $\Phi_n(z), \Psi_n(z)$ у системі координат $x_n, O_n y_n$ згідно з [4] мають вигляд

$$\begin{aligned}\Phi_n(z_n) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{a_k} \frac{g'_k(t) dt}{t - z_k}; \\ \Psi_n(z_n) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{2i\alpha_{nk}} \int_{-a_k}^{a_k} \left[\frac{\overline{g'_k(t)}}{t - z_k} - \frac{(\overline{T_k} - \overline{z_n}^0) e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g'_k(t) \right] dt,\end{aligned}\quad (3)$$

де $T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^0$; $z_k = e^{-i\alpha_k} (z_n e^{i\alpha_n} + z_n^0 - z_k^0)$; $\alpha_{nk} = \alpha_n - \alpha_k$.

Визначивши за формулами (1), (3) напруження на осі $O_n x_n$ і підставивши їх в умови на тріщині

$$\sigma_{yy}^{n+} + \sigma_{yy}^{n-} + i(\tau_{xy}^{n+} + \tau_{xy}^{n-}) = 2p_n(x_n) \quad (n = 1, 2, \mathbf{K}, N), \quad (4)$$

отримаємо систему N СІР [4]

$$\begin{aligned}\int_{-a_n}^{a_n} \frac{g'_n(t) dt}{t - x_n} + \sum_{k \neq n} \int_{-a_k}^{a_k} [g'_k(t) K_{nk}(t, x_n) + \\ + \overline{g'_k(t)} L_{nk}(t, x_n)] dt = \pi p_n(x_n) \quad |x_n| < a_n; n = 1, 2, \mathbf{K}, N.\end{aligned}\quad (5)$$

Тут

$$\begin{aligned}K_{nk}(t, x) &= \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left(\frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\overline{T_k} - \overline{X_n}} \right); \\ L_{nk}(t, x) &= \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left(\frac{1}{\overline{T_k} - \overline{X_n}} - \frac{T_k - X_n}{(\overline{T_k} - \overline{X_n})^2} e^{-2i\alpha_n} \right); X_n = xe^{i\alpha_n} + z_n^0.\end{aligned}$$

Додаткові N умов однозначності переміщень за обходу навколо тріщин

$$\int_{-a_n}^{a_n} g'_n(t) dt = 0 \quad (n = 1, 2, \mathbf{K}, N) \quad (6)$$

дають змогу розв'язати ССІР (5), зокрема методом колокацій, розділивши дійсну і уявну частини у (5), (6) та розвинувши функції стрибків у скінченні суми ряду з виділеною кореневою особливістю:

$$f_r^n(t) = \sum_{m=0}^{N_n} \frac{A_m^{rn} T_m(t/a_n)}{\sqrt{1 - (t/a_n)^2}} \quad (r = 3; 4). \quad (7)$$

Тут A_m^{rn} – невідомі коефіцієнти; T_m – поліноми Чебишева першого роду.

Задовольнивши кожне з рівнянь (5) з урахуванням (7) у N_n точках колокації $x_n = x_{nl}$ ($l = 1, 2, \dots, N_n$), за які виберемо поліноми Чебишева другого роду

$$x_{nl}/a_n = \cos[\pi l / (N_n + 1)] \quad (l = 1, 2, \dots, N_n; \quad n = 1, 2, \mathbf{K}, N),$$

та взявши до уваги (6), (7), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для A_m^{ln} , розв'язавши яку, визначимо за (7) наближений вигляд функцій стрибків, а отже, згідно з (1)–(3) напружений стан тіла.

Однією з характеристик тріщиностійкості матеріалу та важливим критерієм руйнування є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) [4, 9], які розраховують за формулою [4]

$$K_1^{AB} - iK_2^{AB} = \mathbf{m} \lim_{x \rightarrow \pm a} \left[\sqrt{\pi \frac{a^2 - x^2}{a}} g'(x) \right].$$

Тут a – півдовжина досліджуваної тріщини; верхній знак відповідає лівій (A) вершині тріщини, а нижній – правій (B). Апробуємо метод прямого вирізування на прикладах задач пружної рівноваги півплощини, смуги та клина зі симетрично навантаженою тріщиною.

Приклад 1. Дослідимо півплощину ($y \geq 0$) з вільною від навантаження межею уздовж осі Ox . Центр симетрично навантаженої нормальними зусиллями σ_{yy}^1 тріщини L_1 лежить у точці $(0, y_1)$. Довжина тріщини $2a_1$; кут нахилу до осі абсцис α_1 . Застосовуючи метод прямого вирізування, вихідну задачу зведемо до дослідження площини з двома тріщинами L_1, L_2 , де L_2 моделює вільну від навантаження межу тіла (рис. 2).

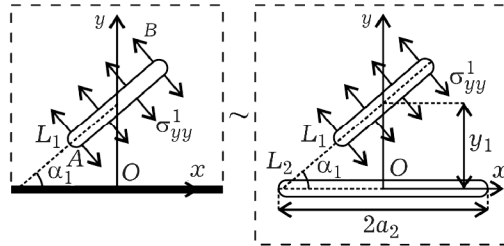


Рис. 2.

Позначимо відносну півдовжину L_2 через $a = a_2/a_1$, а відносну відстань між центрами тріщин – через $d = y_1/a_1$. У табл. 1 і 2 подано результати обчислення нормованих КІН $K_j^{0AB} = K_j^{AB}/\sigma_{yy}^1 \sqrt{\pi a_1}$ ($j = 1; 2$) для $\alpha_1 = 0$ та $\alpha_1 = \pi/2$ відповідно за різних значень a та d . Зазначимо, що для $\alpha_1 = \pi/2$ КІН $K_2^{0AB} = 0$.

Обчислювали у цьому й інших прикладах за $N_1 = 40$ і $N_j = 80$ ($j \neq 1$) членів розкладу в ряди за поліномами Чебишева для $a \leq 8$ та $N_1 = 40$ і $N_j = 320$ ($j \neq 1$), коли $a = 16$. Це забезпечило похибку обчислень менше 1%.

В останніх рядках таблиць подано значення КІН, отримані безпосереднім розв'язуванням задачі пружної рівноваги півплощини з тріщиною [7, 10] та за асимптотичними формулами (8) [7, 4]:

$$K_1^{0AB} = 1 + (2 + \cos 2\alpha_1)/4d^2 \pm (3 \sin \alpha_1 + \sin 3\alpha_1)/16d^3 - \\ - (17 + 40 \cos 2\alpha_1 + 6 \cos 4\alpha_1)/128d^4,$$

$$K_2^{0AB} = \sin 2\alpha_1 / 8d^2 \mathbf{m}(5 \cos \alpha_1 + \cos 3\alpha_1) / 16d^3 - (3 \sin 2\alpha_1 + \sin 4\alpha_1) / 32d^4. \quad (8)$$

Тут вершині A відповідає верхній знак, а вершині B – нижній.

Таблиця 1

d	0,2		0,4		1		4	
a	K_1^{0B}	K_2^{0B}	K_1^{0B}	K_2^{0B}	K_1^{0B}	K_2^{0B}	K_1^{0B}	K_2^{0B}
0,5	1,061	0,073	1,046	0,093	1,050	0,044	1,002	0,000
1,0	3,611	2,794	1,992	0,892	1,235	0,149	1,006	0,002
2,0	5,948	3,031	2,900	0,997	1,486	0,191	1,020	0,004
4,0	5,938	3,028	2,905	0,996	1,510	0,185	1,038	0,006
8,0	5,937	3,033	2,908	0,996	1,511	0,184	1,045	0,006
16	5,758	3,213	2,908	0,997	1,511	0,184	1,045	0,006
[10]	-	-	2,905	0,994	1,511	0,185	1,045	0,006
(8)	-	-	-	-	1,258	0,375	1,045	0,006

Таблиця 2

d	1,1		1,4		2		5	
a	K_1^{0A}	K_1^{0B}	K_1^{0A}	K_1^{0B}	K_1^{0A}	K_1^{0B}	K_1^{0A}	K_1^{0B}
0,5	1,068	1,011	1,020	1,008	1,007	1,003	1,000	1,000
1,0	1,218	1,017	1,029	1,009	1,010	1,005	1,000	1,000
2,0	1,423	1,056	1,097	1,020	1,015	1,006	1,001	1,001
4,0	1,637	1,129	1,185	1,060	1,047	1,020	1,001	1,001
8,0	1,732	1,183	1,232	1,094	1,076	1,040	1,004	1,002
16	1,779	1,203	1,248	1,107	1,087	1,050	1,008	1,006
[10]	1,758	1,211	1,254	1,112	1,091	1,054	1,011	1,009
(8)	1,391	1,203	1,208	1,117	1,086	1,055	1,011	1,009

Зі збільшенням a значення нормованих КІН прямують до відомих [4, 7, 10]. За паралельної межі області тріщини ($\alpha_1 = 0$) метод прямого вирізування порівняно з відомими результатами дає похибку менше 1% вже для $a = 4$. Для $\alpha_1 = \pi/2$ таку ж похибку одержали для $a = 16$ і $d > 1,1$. Через близьке розташування вістря тріщини до межі похибка обчислень збільшується. Такий ефект, зокрема, можна пов'язати з вибором розміщення і кількості точок колокації для областей з великими градієнтами напружень. Зазначимо, щоб зберегти точність результатів обчислень зі зростанням a необхідно збільшувати кількість членів ряду у методі колокацій. Тому взаємодія суттєво різних за розміром дефектів вимагає окремого додаткового дослідження.

Зі збільшенням d взаємодія між неоднорідностями зменшується і КІН прямують до значень для навантаженої нормальними зусиллями тріщини у нескінченній площині ($K_1^{0AB} = 1$; $K_2^{0AB} = 0$).

Приклад 2. Дослідимо смугу шириною $2H$ з вільними від навантаження межами та центральною симетрично навантаженою зусиллями σ_{yy}^1 тріщиною L_1 . Центр тріщини лежить у точці $(0, H)$; довжина тріщини $2a_1$; кут нахилу до осі абсцис $\alpha_1 = 0$. Застосовуючи метод прямого вирізування, вихідну задачу звели до дослідження площини з трьома тріщинами L_1, L_2, L_3 , де L_2, L_3 моделюють вільні від навантаження межі тіла (рис. 3).

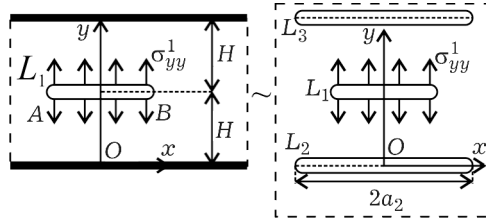


Рис. 3.

Відносні довжини L_2, L_3 однакові $a_2/a_1 = a_3/a_1 = a$. У табл. 3 подано результати обчислення нормованих КІН $K_1^{0AB} = K_1^{AB} / \sigma_{yy}^1 \sqrt{\pi a_1}$ ($K_2^{0AB} = 0$) тріщини L_1 для різних значень a та H .

Таблиця 3

H/a	0,4	0,8	1	1,2	1,6	3
0,5	1,093	1,118	1,102	1,082	1,049	1,009
1,0	3,043	1,687	1,464	1,327	1,177	1,032
2,0	4,145	2,145	1,809	1,598	1,354	1,085
4,0	4,145	2,149	1,816	1,610	1,377	1,118
8,0	4,150	2,149	1,816	1,610	1,377	1,120
16	4,150	2,149	1,816	1,610	1,377	1,120
[11]	4,146	2,149	1,816	1,611	1,377	1,122

Виявили, що зі зростанням відносної довжини a результати обчислення КІН збігаються з похибкою, меншою за 1%, з поданими, зокрема, у працях [7, 11]. Зазначимо, що за близького розташування дефекта до межі, подібно, як і у першому прикладі, збіжність методу прямого вирізування гірша через високі градієнти напружень біля вістря тріщини і недосконалість обчислювальної схеми.

Приклад 3. Дослідимо вільний від навантаження клин з розхилом кута 2α і центральною симетрично навантаженою тріщиною L_1 на його бісектрисі. Координати центра тріщини знаходяться у точці $(x_1, 0)$. За допомогою методу прямого вирізування зведемо вихідну задачу до задачі взаємодії трьох тріщин у площині (рис. 4).

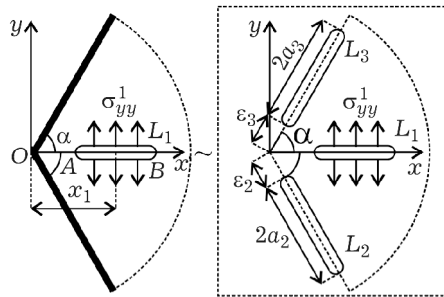


Рис. 4.

Проаналізуємо вплив відносної довжини $a = a_2/a_1 = a_3/a_1$ тріщин L_2, L_3 (табл. 4) та відносної відстані $\epsilon = \epsilon_2/a_1 = \epsilon_3/a_1$ до віртуальної вершини клина (табл. 5) на нормовані КІН $K_1^{0AB} = K_1^{AB} / \sigma_{yy}^1 \sqrt{\pi a_1}$ ($K_2^{0AB} = 0$) для різних кутів його розхилу. Відносне розташування тріщини L_1 приймали рівним $x_1/a_1 = 1,1$, оскільки з віддаленням від вістря збіжність методу прямого

вирізування, очевидно, поліпшуватиметься через зменшення градієнтів напружень.

Таблиця 4

α	$\pi/6$		$\pi/4$		$\pi/3$		$\pi/2$	
a	K_1^{0A}	K_1^{0B}	K_1^{0A}	K_1^{0A}	K_1^{0B}	K_1^{0B}	K_1^{0A}	K_1^{0B}
0,5	3,110	1,035	2,100	1,037	1,624	1,026	1,214	1,012
1,0	5,552	2,031	3,300	1,471	2,296	1,228	1,447	1,057
2,0	6,111	2,958	3,758	1,955	2,659	1,501	1,637	1,136
4,0	5,900	2,956	3,767	1,983	2,710	1,556	1,723	1,187
8,0	6,098	2,963	3,777	1,984	2,713	1,560	1,749	1,204
16	6,159	2,965	3,778	1,984	2,713	1,560	1,756	1,209

Таблиця 5

α	$\pi/6$		$\pi/4$		$\pi/3$		$\pi/2$	
ϵ	K_1^{0A}	K_1^{0B}	K_1^{0A}	K_1^{0B}	K_1^{0A}	K_1^{0B}	K_1^{0A}	K_1^{0B}
0,1	5,178	2,935	3,349	1,966	2,496	1,550	1,690	1,206
0,01	6,159	2,965	3,778	1,984	2,714	1,560	1,756	1,209
0,001	6,159	2,965	3,778	1,984	2,714	1,560	1,756	1,209

Досліджуючи вплив a на нормовані КІН, вважали, що $\epsilon = 0,001$. Вплив ϵ аналізували для $a = 16$. Найгірші результати очікувано одержали для гострих кутів розхилу клина, коли градієнти напружень в околі вістря тріщини максимальні. Збіжність значень КІН для ближчого до вершини клина вістря тріщини (A) є гіршою ніж віддаленого (B). Зіставлення отриманих результатів з графічними, поданими у праці [7], а також з результатами обчислення КІН для півплощини (табл. 2) для $\alpha = \pi/2$ дає похибку менше 1%.

Висновки. Метод прямого вирізування продемонстрував добру застосовність до плоских задач теорії пружності. На трьох прикладах дослідження пружної рівноваги півплощини, смуги і клина зі симетрично навантаженою тріщиною проаналізована його достовірність і ефективність. Отримані результати обчислення КІН збіглися з похибкою менше 1% з відомими літературними. Випадки близького розташування тріщини до межі тіла, або її взаємодії з навантаженими межами потребують додаткових досліджень через виникнення високих градієнтів напружень в околі досліджуваної області. Зазначимо, що використання комплексних потенціалів для кусково-однорідного тіла з включеннями та умов взаємодії матриці з тонкими неоднорідностями, побудованими у [9], дають можливість перейти до розв'язування задач пружної рівноваги кусково-однорідних тіл з тонкими дефектами за заданих на межі напружень і переміщень.

1. Васильєв К. В., Пастернак Я. М., Сулим Г. Т. Антиплоска деформація квадратного в плані тіла з внутрішньою тонкою неоднорідністю // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – 73. – С. 165–176.
2. Васильєв К. В., Сулим Г. Т. Застосування методу прямого вирізування до розв'язування задач поздовжнього зсуву клина з тонкими неоднорідностями довільної орієнтації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 3. – С. 117–126.
The same: Vasil'ev K. V., Sulym H. T. Application of the method of direct cutting-out to the solution of the problem of longitudinal shear of a wedge with thin heterogeneities of arbitrary orientation // J. Math. Sci. – 2012. – 180, № 2. – P. 122–134.
3. Васильєв К. В., Сулим Г. Т. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями

- рідностями за антиплоского деформування // *Машинознавство*. – 2006. – № 11–12. – С. 10–17.
4. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
 5. *Пастернак Я. М., Васильев К. В., Сулим Г. Т.* Антиплоска деформація зосередженими чинниками обмежених тіл із тріщинами та жорсткими включеннями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2012. – 55, № 1. – С. 72–83.
Te same: *Pasternak Ia. M., Vasil'ev K. V., Sulym H. T.* Antiplane deformation by concentrated factors of bounded bodies with cracks and rigid inclusions // *J. Math. Sci.* – 2013. – 190, № 5. – P. 710–724.
 6. *Саврук М. П., Дацьшин А. П.* О взаимодействии системы трещин с границей упругого тела // *Прикл. механика*. – 1974. – 10, № 7. – С. 84–92.
 7. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами: Справ. пос. в 4-х т. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.
 8. *Саврук М. П.* Система произвольно ориентированных трещин в упругой полосе // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1978. – 1. – С. 91–96.
 9. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ. – 2007. – 716 с.
 10. *Ashbauch N.* Stress solution for a crack at an arbitrary angle to an interface // *Int. J. Fract.* – 1975. – 11, № 2. – P. 205–219.
 11. *Cinar A., Erdogan F.* The crack and welding problem for an orthotropic strip // *Int. J. Fract.* – 1983. – 23, № 2. – P. 83–102.

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проектом Ф70/139-2017 Державного фонду фундаментальних досліджень.

МЕТОД ПРЯМОГО ВЫРЕЗАНИЯ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Разработанный ранее метод прямого вырезания распространен на класс плоских задач теории упругости для тел с трещинами. Основа метода – моделирование исходной задачи для тела с тонкими неоднородностями при помощи задачи упругого равновесия тела более простой геометрической формы с увеличенным количеством тонких дефектов, которые формируют границы исследуемого тела. На примерах исследования задач упругого равновесия полуплоскости, полосы и клина с трещиной при действии симметричной нагрузки проанализированы достоверность, точность и эффективность предложенного подхода.

DIRECT CUTTING-OUT METHOD IN PLANE PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

The direct cutting-out method, developed earlier, was extended to the class of plane problems of the elasticity theory for bodies with cracks. The basis of the method consists in modeling the initial problem for a body with thin inhomogeneities, using the problem of elastic equilibrium of a body with simpler geometric shape and an increased number of finite defects, which form the boundaries of the investigated body. The reliability, accuracy, and effectiveness of the proposed approach were analyzed on examples of studying the problems of elastic equilibrium of a half-plane, a strip and a wedge with a crack under the action of a symmetric load.

¹Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

²Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів