УДК 519.6

О. М. Литвин, І. С. Томанова

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ЗГИН БАГАТОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ ІЗ ВХІДНИМИ КУТАМИ

Проаналізовано використання сплайнів п'ятого степеня на трикутній сітці вузлів для розв'язання бігармонічної задачі для жорстко защемленої багатокутної пластини із вхідними кутами з рівномірним навантаженням. Розроблено та досліджено схему методу скінченних елементів для розв'язання задач про згин жорстко защемленої пластини складної форми із вхідними кутами з застосуванням сплайнів п'ятого степеня. Результати експерименту порівняно з отриманими за допомогою R-функцій. Область розбито на 16 та 56 трикутників. Встановлено, що чим більша кількість трикутників розбиття області, то менша похибка наближення.

Аналіз останніх публікацій. Основні труднощі, які виникають під час розв'язання задач сплайнами п'ятого степеня, пов'язані з відсутністю явних виразів базисних інтерполяційних поліномів п'ятого степеня в кожному трикутнику тріангуляції, оскільки тоді необхідно розв'язувати в кожному трикутнику систему двадцять першого порядку для знаходження всіх 21 коефіцієнтів інтерполяційного полінома п'ятого степеня.

У працях [4, 5] для полінома п'ятого степеня

$$P_5(x,y) = \sum_{0\le|\beta|\le 5} a_\beta x^{\beta 1} y^{\beta 2}\,,\ |\beta| = \beta_1+\beta_2\,,\ \beta=(\beta_1,\beta_2)$$

доведено, що вимоги

$$D^\alpha f(\mathrm{A}_i) = \mathrm{D}^\alpha P_5(\mathrm{A}_i)\,,\ i=\overline{1,3}\,,\quad 0\le|\alpha|\le 2\,,\ D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}\,,$$

$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2\,,\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\,,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}}\right|_{M_{ij}} = \left.\frac{\partial P5}{\partial \upsilon_{ij}}\right|_{M_{ij}}\,,\ (\mathrm{i},\mathrm{j})\in\{(1,2),(2,3),(3,1)\}\,,$$

де υ_{ij} − нормаль до сторони, що з'єднує вершини A_i та A_j, точка $M_{ij} = \left(\frac{x_i+x_j}{2},\frac{y_i+y_j}{2}\right) = (x_{ij},y_{ij})$ − середина цієї сторони, достатні для знаходження 21 коефіцієнтів $\alpha_\beta, 0\le|\beta|\le 5$.

Похідну по внутрішній нормалі υ_{ij} визначає формула

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}} = \frac{\mathrm{sign}(\Delta_{kij})}{|A_i,A_j|}\left[(y_i-y_j)\frac{\partial f}{\partial x} - (x_i-x_j)\frac{\partial f}{\partial y}\right],$$

$$|A_iA_j| = \sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}\,,\ \Delta_{kij} = \begin{vmatrix} x_k & y_k & 1\\ x_i & y_i & 1\\ x_j & y_j & 1\end{vmatrix}.$$

Введемо в розгляд такі допоміжні функції [4]:

$$h_{k\beta}(x,y) = \frac{(x-x_k)^{\beta_1}(y-y_k)^{\beta_2}}{\beta_1!\beta_2!}\omega_{ij}^3(x,y)\left\{\frac{1}{\omega_{ij}^3(x,y)}\right\}^{(2-|\beta|)}_{(x_k,y_k)},$$

$$H_{ij}(x,y) = \frac{\omega_{ik}^2(x,y)\omega_{jk}^2(x,y)\omega_{ij}(x,y)\,\mathrm{sing}(\Delta_{kij})}{\omega_{ik}^2(x_{ij},y_{ij})\omega_{jk}^2(x_{ij},y_{ij})|A_iA_j|},$$

де

$$\omega_{ij}(x,y)=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \end{vmatrix}; \quad \omega_{ik}(x,y)=\begin{vmatrix} x-x_k & y-y_k & 0 \\ x_i-x_k & y_i-y_k & 0 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}.$$

Для кожної функції $f(x,y)\in C^1(\overline{T}_{ijk})$ оператор

$$S_5 f(x,y)=w(x,y)+\sum_{(i,j)\in Q}\left[\frac{\partial f}{\partial\upsilon_{ij}}-\frac{\partial w}{\partial\upsilon_{ij}}\right]\Bigg|_{M_{ij}} H_{ij}(x,y),$$

$$w(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{0\le|\beta|\le 2} D^{\beta} f(A_i)\,h_{i\beta}(x,y),$$

$$D^{\alpha}S_{\partial}f\Big|_{A_p}=D^{\alpha}f\Big|_{A_p},\ p\in\{1,2,3\},0\le|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2\le 2$$

визначає поліном п'ятого степеня із властивостями

$$D^{\alpha}S_{\partial}f\Big|_{A_p}=D^{\alpha}f\Big|_{A_p},\ p\in\{1,2,3\},0\le|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2\le 2,$$

$$\frac{\partial S_5 f}{\partial\nu_{ij}}\Big|_{M_{ij}}=\frac{\partial f}{\partial\nu_{ij}}\Big|_{M_{ij}},(i,j)\in Q\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Формулювання бігармонічної задачі. Задача про згин та коливання жорстко защемлених пластин полягає в інтегруванні бігармонічного рівняння

$$D(\Delta\Delta W)=f(x,y)$$

за крайових умов

$$W\big|_{\partial G}=0,\ \frac{\partial W}{\partial x}\bigg|_{\partial G}=0,\ \frac{\partial W}{\partial y}\bigg|_{\partial G}=0. \qquad (1)$$

У працях В.Л. Рвачова [2, 3] подано структуру розв'язку такої задачі:

$$W=\psi^2\Phi.$$

Запишемо невизначену функцію Φ наближено у вигляді

$$\Phi\approx\sum_{i+j=0,i\ge0,j\ge0}^{m} a_{ij}T_i(\lambda x)T_j(\mu y).$$

Розв'язок шукаємо так:

$$W_n=\psi^2\sum_{i+j=0}^{m} a_{ij}T_i(\lambda x)T_j(\mu y),$$

де $T_k(t)$ – повна система поліномів Чебишева; $n=C_{m+2}^2=\frac{(m+2)(m+1)}{2}$; a_{ij} – невизначені коефіцієнти, які знаходять з умови мінімуму відповідного функціонала

$$I=\iint_{\Omega}(h^3(\Delta W)^2-2Wf(x,y))dxdy$$

на множині функцій, задовольняючи умови (1); μ та λ – масштабні коефіцієнти, які обирають залежно від розмірів пластини в напрямку осей Ox, Oy відповідно.

Для обчислювального експерименту оберемо багатокутну область [1], яку за допомогою R-функцій запишемо так:

$$\psi(x,y)=(f_1\wedge f_2)\wedge(f_3\vee f_4)\wedge(f_5\wedge f_6),$$

де функції f_i, $(i=1,2,3,4,5,6)$ визначають такі аналітичні рівняння:

$f_1(x,y) = \frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \geq 0$, $f_2(x,y) = \frac{1}{2b}(b^2 - y^2) \geq 0$,

$f_3(x,y) = d + y \geq 0$ – напівплощина, яка розташована вище $y = -d$;

$f_4(x,y) = c + x \geq 0$ – напівплощина, яка розташована правіше $x = -c$;

$f_5(x,y) = d - y \geq 0$ – напівплощина, яка розташована нижче $y = d$;

$f_6(x,y) = c - x \geq 0$ – напівплощина, яка розташована лівіше $x = c$.

Алгоритм побудови сплайнів п'ятого степеня для розв'язання бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини. Наведемо алгоритм побудови сплайнів п'ятого степеня для розв'язання бігармонічної задачі жорстко защемленої пластини на області G.

1. Область G розбиваємо прямими на підобласті, далі кожну з цих підобластей ділимо на трикутники однією із діагоналей. Отримані трикутники задаємо набором з трьох точок вигляду (x_i, y_i), $i = \overline{1, m}$, які є вершинами трикутників, на які розбиваємо область G. Трикутник $T = T_{ijk}$ $i, j, k \in \{1, 2, ..., m\}$, $i \neq j \neq k$.

У результаті задана область G складається з N трикутників.

2. Вводимо лінійну нумерацію невідомих параметрів, які відповідають функціям базисних поліномів п'ятого степеня $h_{0,0}, h_{1,0}, h_{0,1}, h_{2,0}, h_{1,1}, h_{0,2}$, для кожної з вершин трикутників. Причому для вершин трикутників, які знаходяться на межі області G, задля задоволення граничних умов задачі відповідні константи покладаємо рівними нулю.

3. Продовжуємо лінійну нумерацію для невідомих параметрів, які відповідають функціям базисних поліномів п'ятого степеня за нормалях до середин сторін трикутників. Згідно з граничною умовою, якщо точка $M_{ij} \in \partial G$, то константу в ній вважаємо рівною нулю.

У результаті виконання пунктів 2 та 3 отримаємо набір з K невідомих параметрів.

4. Використавши поліноми, отримані на трикутнику, можна записати кусково-поліноміальну функцію, яка на кожному із трикутників розбиття матиме такий вигляд:

$$S_5^{ijk}(x,y) = w(x,y) + \sum_{(i,j)\in Q}^{3} \left. \left(c_{ij} - \frac{\partial w}{\partial \upsilon_{ij}} \right) \right|_{M_{ij}} \cdot H_{i,j}(x,y), \quad (2)$$

де $w(x,y) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{0 \leq |\beta| \leq 2} c_{i,\beta} \cdot h_{i,\beta}(x,y)$, $c_{i,\beta}$ – невідомі параметри, що відповідають функціям $h_{i,\beta}$; $c_{i,j}$ – невідомі параметри, що відповідають нормалям до середини сторони трикутника з вершинами i та j.

5. Використовуємо отримані сплайни для знаходження інтегралів:

$$I_k = \int_{T_k} \left(\left(\frac{\partial S_k(x,y)}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial S_k(x,y)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_k(x,y)}{\partial y^2} \right)^2 - 2 f(x,y) S_k(x,y) \right) dx dy.$$

6. Запишемо функціонал $I = I(c)$ у вигляді

$$I = \sum_{k=1}^{N} I_k.$$

7. Мінімізуємо функціонал I за змінними c. За допомогою необхідної умови екстремуму знаходимо оптимальні значення констант, розв'язавши систему рівнянь

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0\,, \ \ i = \overline{1,K}\,.$$

8. Підставляємо отримані значення у формулу (2) і одержуємо наближений розв'язок бігармонічного рівняння для жорстко защемленої пластини на заданій області G .

Приклади розв'язання крайової задачі про згин жорстко защемленої пластини складної форми.

П р и к л а д 1. Розбиваємо область на 16 трикутників.

Ділимо область G , яка наведена на рис. 1*а*, на шістнадцять трикутників за схемою, яка подана на рис. 1*б*. Знаходимо поліном на кожному трикутнику.

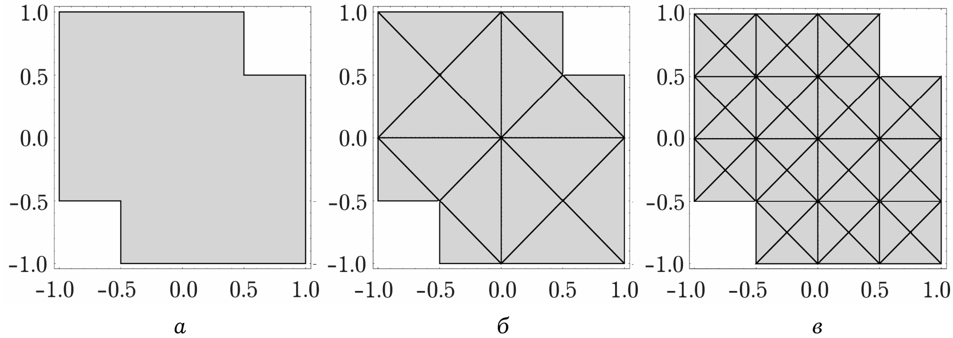

Рис. 1. Область (*а*) і розбиття її на 16 (*б*) і на 56 (*в*) трикутників.

Перевірка засвідчила, що сплайн є неперервним разом зі своїми нормальними похідними першого порядку до сторін трикутника. Тобто зберігає неперервність за переходу від одного трикутника до суміжного.

Згідно з алгоритмом, наведеним вище, будуємо поліноми для кожного трикутника розбиття. Інтегруємо отримані поліноми за кожним трикутником та сумуємо їх інтеграли. Далі знаходимо невідомі параметри з умови мінімуму функціонала $\dfrac{\partial I}{\partial c_i} = 0$. Підставляємо отримані константи в поліноми.

Максимальне значення наближеного розв'язку [1] досягається в точці [0,0] та дорівнює 0.0102658, значення отриманого наближеного розв'язку задачі в цій точці 0.00773969. Різниця між цими наближеними розв'язками становить 0.002526.

Графік наближеного розв'язку наведений на рис. 2*б*.

На рис. 2*а* наведено графік розв'язку бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини з праці [1].

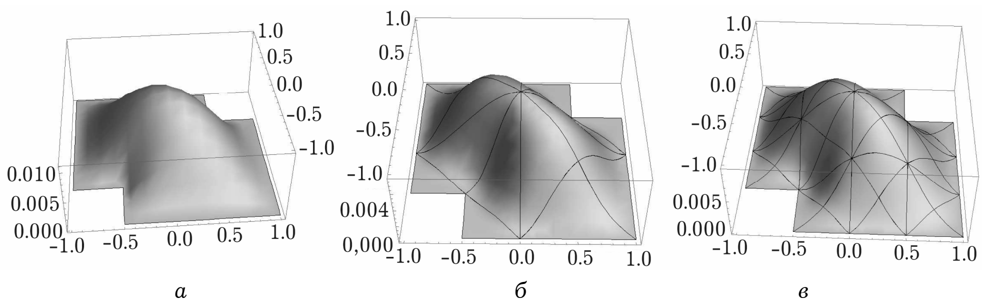

Рис. 2. Графік розв'язку, отриманого за допомогою R-функцій бігармонічної задачі для жорстко защемленої платини складної форми (*а*); графік наближеного розв'язку для розбиття на 16 (*б*) та на 56 трикутників (*в*).

П р и к л а д 2. Розбиваємо область на 56 трикутників.

Наведемо результати обчислювального експерименту зі знаходження наближеного розв'язку у вигляді сплайну п'ятого степеня для розбиття, поданого на рис. 1*в*. Явні вирази для поліномів п'ятого степеня в кожному з 56 трикутників розбиття опускаємо. Перевіркою виявили, що отриманий сплайн належить класу $C^1(G)$ і найбільшого значення досягає в точці $SP56(0,0) = 0.009609$, тобто різниця між цими двома наближеними розв'язками в цьому випадку дорівнює 0,0006568.

Графік наближеного розв'язку наведений на рис. 2*в*.

Лінії рівня для всіх розв'язків подані на рис. 3.

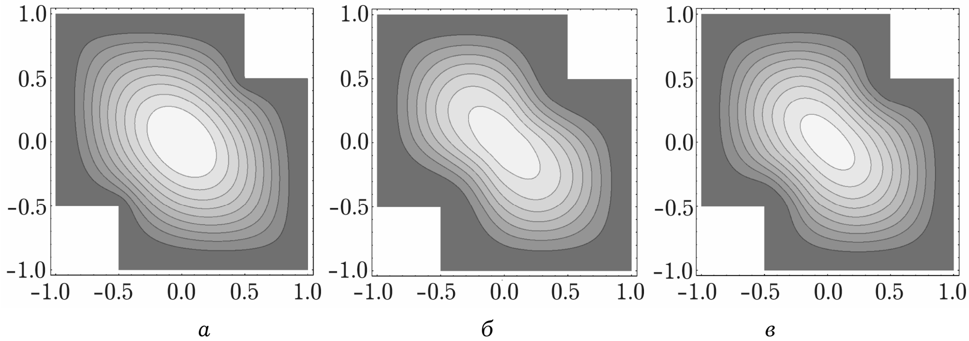

Рис. 3. Лінії рівня отриманого за допомогою *R*-функцій розв'язку бігармонічної задачі для жорстко защемленої платини складної форми (*а*); лінії рівня наближеного розв'язку для розбиття на 16 (*б*) та 56 трикутників (*в*).

Результати обчислювального експерименту

Кількість елементів	Кількість невідомих коефіцієнтів	Значення в центрі наближеного розв'язку, який отримано за допомогою *R*-функцій	Значення в центрі наближеного розв'язку	Максимальна похибка $\max_{(x,y)\in G} \lvert W(x,y) - S(x,y) \rvert$
16	44	0.0102658	0.00773969	0.002526
56	214		0.009609	0,0006568

Висновки. Запропонована схема розв'язання бігармонічної задачі для багатокутної пластини з вхідними кутами за граничних умов, які відповідають умовам жорсткого защемлення пластини у вигляді сплайна п'ятого степеня, який забезпечує належність наближеного розв'язку класу $C^1(G)$.

Хоч сплайни п'ятого степеня дають точнішу оцінку, їх рідше застосовують через складність обчислення. Ці поліноми не використовували раніше для бігармонічного рівняння. Формули застосували для побудови полінома п'ятого степеня з праці [4] для бігармонічної задачі.

Порівняно наближений розв'язок отриманий за допомогою *R*-функцій, з поліномами, які одержані з формул [4] для багатокутної області з вхідними кутами. Як наближений розв'язкок, з яким порівнювали отримані дані, взято формулу (233) з праці [2]. Область розбито на 16 та 56 трикутників. Обчислювальний експеримент продемонстрував, що наведений метод добре узгоджується із розв'язком, одержаним за допомогою *R*-функцій для аналогічної задачі.

1. *Курпа Л. В, Мазур О. С., Шматко Т. В.* Применение теории R-функций к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. − Харьков: ООО "В деле", 2016. − 492 с.
2. *Рвачев В. Л., Курпа Л. В, Склепус Н. Г, Учишвили Л. А.* Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы − Киев: Наук. думка, 1973. − 122 с.
3. *Рвачев В. Л., Курпа Л. В.* R-функции в задачах теории пластин. − Киев: Наук. думка, 1987. − 176 с.
4. *Сергиенко И. В, Литвин О. Н., Литвин О. О., Денисова О. И.* Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике − Кибернетика и системный анализ. − 2014. − **50**, № 5. − С. 17−33
5. *Zlamal M., Zenesek A., Kolar V., Kratochvil J.* Matematical aspect of the finite element method − Technical physical and mathematical principles of the finite element method. − 1971. − P. 15−39

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙНОВ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СГИБЕ МНОГОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ВХОДНЫМИ УГЛАМИ

Проанализировано использование сплайнов пятой степени на треугольной сетке узлов для решения бигармонической задачи для жестко защемленной многоугольной пластины с входными углами с равномерной нагрузкой. Разработана и исследована схема метода конечных элементов для решения задач об изгибе жестко защемленной пластины сложной формы с входными углами с использованием сплайнов пятой степени. Результаты вычислительного эксперимента сравнены с полученными с помощью R-функций. Область разбита на 16 и 56 треугольников. Выявлено, что чем больше треугольников разбиения области, тем меньше погрешность приближения.

THE USE OF SPLINES OF THE FIFTH DEGREE FOR SOLVING PROBLEM ABOUT THE BENDING OF A POLYGONAL PLATE WITH THE INPUT ANGLES

In this paper, we discussed the use of splines of the fifth degree on a triangular grid of nodes for solving the biharmonic problem for a rigidly clamped polygonal plate with input angles with uniform load. The purpose of this article is to develop and study the finite element scheme (FEM) for solving problems on the bending of a rigidly clamped plate of complex shape with input angles using splines of the fifth degree. The results of the computational experiment are compared with the results obtained with the help of R-functions. The region was divided into 16 and 56 triangles. The experiment showed that the larger count of triangles in the subdivision of the region, the smaller the approximation error.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Одержано
06.12.16