

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА:
“НЕОСРЕДНЕННОЕ” ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ
СОСТОЯНИЕ**

При исследовании методом малого параметра возможной потери устойчивости быстровращающегося кругового тонкого диска конечной постоянной толщины установлена зависимость между скоростью вращения и радиусом пластической зоны. На основе условия текучести Сен-Венана характеристическое уравнение получено в первом приближении по малому параметру. Найдена критическая угловая скорость вращения при различных параметрах диска.

Введение. Важнейшей особенностью трехмерных теорий устойчивости деформируемых тел [3–5], двумерных прикладных теорий устойчивости, а также различных приближенных подходов к их реализации является соотношение между общностью, строгостью, последовательностью и точностью, с одной стороны, а также эффективностью и целесообразностью применения к исследованию конкретных классов задач – с другой. Оценки этого соотношения для изучения плоской формы потери упругопластической устойчивости вращающихся дисков при радиальном растяжении [10] требует, в частности, подход Лейбензона–Ишлинского [6, 13], являющийся существенно приближенным в трехмерной теории упругой устойчивости [7, 8]. С помощью аналитического метода возмущений в теории упругопластических тел [9, 13] этот подход успешно применяют при расчете (в двумерном случае) возможной потери устойчивости быстровращающихся дисков, перегруженных центробежными усилиями [11, 12, 14–16, 20, 21]. Полученные таким образом приближенные значения критического радиуса пластической зоны и критической угловой скорости вращения диска зависят от допущения о реализуемом напряженно-деформированном состоянии. Если предполагать, что во вращающемся круговом диске постоянной конечной толщины реализуется обобщенное плоское напряженное состояние [18] согласно [19] (неполное решение определяющих уравнений без предположения о малости толщины – подход 1), то критические значения, сопровождающие гармоническое по полярному углу искривление края диска при потере устойчивости, следует считать заниженными в сравнении с полученными на основании плоской теории упругости для плоских пластин [1, 2] (подход 2). Вместе с этим такую расчетную критическую нагрузку можно считать более приемлемой для исследуемой плоской формы потери устойчивости неплоских дисков и более близкой к эйлеровой критической нагрузке [6]. Для этого следует учесть выводы [4, 6] о количественном и качественном расхождении результатов решения отдельных задач, полученных как с помощью приближенного подхода, так и с привлечением линеаризованных теорий. Суть соответствующего заключения работы [14] в том, что либо используемый в исследовании устойчивости вращающихся дисков приближенный подход Лейбензона–Ишлинского не противоречит (в конкретном двумерном случае) соображениям инженерного и физического характера и не превышает критическую нагрузку до значений, превышающих эйлерову (иначе подход 1, как более грубый и базирующийся по сути на предположении о плоском деформированном состоянии, применимым, главным образом, к длинным вращающимся цилиндрам, должен был привести к результатам, превышающим полученные при подходе 2), либо исследуемая плоская форма потери устойчивости неплоских дисков более точно описывается обобщенным плоским напряженным состоянием, примененным к нетонким пластинам.

Цель настоящей работы – выяснить характер результатов задачи о возможной потере упругопластической устойчивости тонких дисков постоянной толщины, полученных лишь из предположения об осесимметричном распределении напряжений в телах вращения [22]. При этом использованы полные решения уравнений равновесия и уравнений совместимости [17] при условии реализации обобщенного плоского напряженного состояния без сведения напряжений к результирующим по толщине диска (подход 3).

Постановка задачи. Рассмотрим вращающийся однородный и изотропный сплошной/кольцевой круговой тонкий диск постоянной толщины (рис. 1). Предел текучести материала диска σ_s , модуль упругости E , плотность γ , коэффициент Пуассона ν . Вместе с диском вращается цилиндрическая система координат. Срединная плоскость диска принята за плоскость $r\theta$ радиальной и угловой координат, согласованных с декартовыми X и Y , а его ось – за ось аппликат. Постоянная угловая скорость вращения

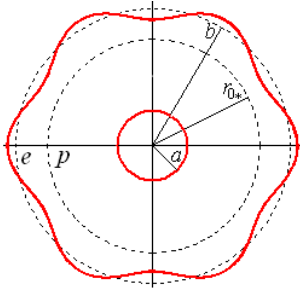


Рис. 1.

равна ω . Конечная толщина диска $2h$ достаточно мала. Основания диска считаем свободными от внешних напряжений и предполагаем также, что внешние радиальные напряжения, приложенные к внутренней $r = a$ (кольцевой диск) и к наружной $r = b$ боковым поверхностям, параллельны основаниям и распределены симметрично относительно срединной плоскости. То же предполагаем для сил инерции.

Поле невозмущенных напряжений в упругой зоне диска определяем из дифференциальных уравнений равновесия [22]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma}{b^2} r, \quad \sigma = \gamma b^2 \omega^2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$$

и условий совместимости

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x}, \\ \Delta \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Delta \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$\Delta \sigma_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right),$$

$$\Delta \sigma_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right),$$

$$\Delta \sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right),$$

где $\Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$; $X = \gamma \omega^2 x$; $Y = \gamma \omega^2 y$; $Z = 0$, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. В пластической зоне уравнения (1) используются вместе с условием текучести $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$.

Возмущенное состояние упругой области диска

$$\sigma_{\mu} = \sigma_{\mu}^0 + \delta \sigma'_{\mu} + \delta^2 \mathbf{K}, \quad u_{\mu} = u_{\mu}^0 + \delta u'_{\mu} + \delta^2 \mathbf{K}$$

(μ – произвольная компонента напряжения и перемещения) находим с учетом того, что линеаризованные по малому параметру δ возмущения первого порядка малости (обозначены штрихом) удовлетворяют те же уравнения (1) и (2), но при $\omega = 0$. При этом из уравнения внешней границы диска [10, 13], теряющего устойчивость,

$$r = b + d \cos n\theta, \quad d = \text{const}, \quad n \in N,$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta \quad (3)$$

(здесь $\rho = r/b$ – безразмерный текущий радиус), граничное условие для возмущения радиального смещения на контурной окружности получаем в виде

$$u'^e = \cos n\theta, \quad \rho = 1.$$

Исследуем критическую угловую скорость вращения диска $\omega = \omega_*$. Для ее определения необходимо составить (в первом приближении по малому параметру) характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны $r_0 = r_{0*}$ в виде условия существования нетривиальных решений системы линейных однородных уравнений [10, 11, 13]:

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} + \frac{d\sigma_{rr}^0}{dr} u' &= 0, & \sigma'_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^0 - \sigma_{rr}^0}{b} \frac{du'}{d\theta} &= 0, & r &= b, \\ \sigma'_{rr} &= 0, & \sigma'_{r\theta} &= 0, & r &= r_0 \end{aligned} \quad (4)$$

(линеаризованные по малому параметру δ граничные условия в напряжениях).

Сплошной диск. Частное решение задачи о равновесии упругой плиты с незагруженными торцами, подверженной действию центробежной силы, имеет следующий вид [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^* &= -\frac{\sigma}{2mb^2} \left[\frac{3m+1}{4} r^2 + \frac{m+1}{m-1} \left(z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right], \\ \sigma_{\theta\theta}^* &= -\frac{\sigma}{2mb^2} \left[\frac{m+3}{4} r^2 + \frac{m+1}{m-1} \left(z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right], & \sigma_{zz}^* &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

(касательные напряжения равны нулю; $m = \nu^{-1}$). Для вращающегося круглого диска, край $r = b$ которого свободен, на решение (5) следует наложить однородное решение (состояние), оставляющее торцы диска свободными от нагружения, а его край нагруженным растягивающими усилиями, равными в среднем по величине и противоположными по направлению среднему значению при $r = b$ напряжения σ_{rr}^* :

$$\frac{1}{2h} \left(\int_{-h}^h \sigma_{rr}^* dz \right)_{r=b} = -\frac{(3+\nu)\sigma}{8}. \quad (6)$$

Поскольку упругая зона диска кольцевая, указанное однородное бигармоническое решение определяем функцией напряжения

$$\Phi = C_1 r^2 + C_2 \ln r. \quad (7)$$

Постоянные C_1 и C_2 в (7) должны быть связаны соответствующим условием на внешней контуре диска. С учетом (6) функцию (7) находим из условия

$$\frac{1}{b} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=b} = 2C_1 + \frac{C_2}{b^2} = \frac{(3+\nu)\sigma}{8},$$

которое приводит к соотношению

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{(3+\nu)\sigma}{8} - \frac{C_2}{b^2} \right).$$

Далее, учитывая, что [17, 22]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y},$$

а

$$\Psi = \Phi + \frac{1}{2(m+1)} \left(\frac{h^2}{3} - z^2 \right) \Delta \Phi,$$

искомые напряжения получаем в виде

$$\sigma_{rr} = -\frac{C_2}{b^2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{(3+\nu)\sigma}{8}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{C_2}{b^2} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{(3+\nu)\sigma}{8}. \quad (8)$$

Сложив решения (5) и (8) и обозначив константу $-C_2/b^2$ через c , полное решение в напряжениях, отнесенных к σ_s , представляем следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{0e} &= c \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{3+\nu}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} (1 - \rho^2 + f), \\ \sigma_{\theta\theta}^{0e} &= c \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{3+\nu}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} \left(1 - \frac{3\nu+1}{3+\nu} \rho^2 + f \right), \quad \sigma_{zz}^{0e} = 0, \quad \sigma_{zr}^{0e} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$f = \frac{4\nu(1+\nu)}{(1-\nu)(3+\nu)} \left(\frac{1}{3} h^{*2} - \varsigma^2 \right), \quad h^* = \frac{h}{b}, \quad \varsigma = \frac{z}{b}.$$

Наличием слагаемого f полное решение (9) отличается от неполного, используемого для плоских (если $h \rightarrow 0$, то $z \rightarrow 0$ и $f \rightarrow 0$) или тонких дисков, в которых допустимо рассмотрение результирующих по толщине напряжений ($\int_{-h}^h f dz = 0$).

Для сопряжения σ_{rr}^{0e} и $\sigma_{\theta\theta}^{0e}$ с напряжениями в пластической зоне диска [10, 15]

$$\sigma_{rr}^{0p} = 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s} \rho^2, \quad \sigma_{\theta\theta}^{0p} = 1 \quad (10)$$

параллельно учитываем непрерывность на упругопластической границе радиального усилия и радиального смещения (радиального и окружного напряжений), а также вид линии уровня $\sigma_{\theta\theta}^{0e} = 1$ (рис. 2). Отсюда получаем систему уравнений с параметром $z \in [0, h]$

$$c(1 - \beta_0^{-2}) + \frac{3+\nu}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} (1 - \beta_0^2 + f) = 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s} \beta_0^2,$$

$$c(1 + \beta_0^{-2}) + \frac{3+\nu}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} \left(1 - \frac{3\nu+1}{3+\nu} \beta_0^2 + f\right) = 1$$

для определения c и ω в зависимости от безразмерного радиуса пластической зоны $\beta_0 := r_0 / b$. Решая эту систему, находим:

$$c = \frac{(3\nu+1)\beta_0^4}{3(\nu+3)(1+f) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2}, \quad (11)$$

$$x := \frac{\nu+3}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} = \frac{\nu+3}{8} \frac{\omega^2}{q^2} = \frac{3(\nu+3)}{3(\nu+3)(1+f) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2},$$

где $q = b^{-1} \sqrt{\sigma_s / \gamma}$. Принимая во внимание то, что решения (9) описывают напряженное состояние упругой области диска на некотором расстоянии от края [22], необходимые в дальнейшем величины $A_1 := d\sigma_{rr}^{0e}(1) / d\rho$, $A_2 := \sigma_{\theta\theta}^{0e}(1) - \sigma_{rr}^{0e}(1)$ определим, исходя из соответствующих усредненных по толщине напряжений:

$$A_1 := \overline{d\sigma_{rr}^{0e}(1) / d\rho} = 2(c - x), \quad A_2 := \overline{\sigma_{\theta\theta}^{0e}(1) - \sigma_{rr}^{0e}(1)} = A_1 + 8x / (\nu + 3). \quad (12)$$

Это обосновано использованием в расчете неустойчивости вращающегося диска решений плоской упругопластической задачи, инициированной упругопластическим состоянием, сопровождающим плоскую форму потери устойчивости. Для сопряжения решений (9) и (10) по слоям $z = \text{const}$ также необходимо проектирование на каждый из этих слоев единственной для всех z формы возмущения контурной окружности (3). Кроме этого, пределы функций $d\sigma_{rr}^{0e} / d\rho$ и $\sigma_{\theta\theta}^{0e} - \sigma_{rr}^{0e}$ при $\rho \rightarrow 1$ совпадают со значениями соответствующих усредненных выражений в точке $\rho = 1$.

Предыдущие пояснения и уточнение в виде f с коэффициентом, пропорциональным квадрату угловой скорости вращения ω , компонентов невозмущенного осесимметричного напряженного состояния диска (9) позволяют возмущенное состояние (центробежные силы в определяющих уравнениях не учитываются) его упругой зоны в случае $n \in \{2, 3, \mathbf{K}\}$ принять в виде [1, 15, 16, 20, 21]

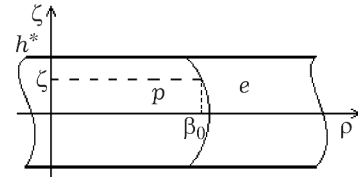


Рис. 2.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^e &= (nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} + (n-2)C\rho^n + (n+2)D\rho^{-n}) \cos n\theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^e &= (-nA\rho^{n-2} - nB\rho^{-n-2} - (n+2)C\rho^n - (n-2)D\rho^{-n}) \cos n\theta, \\ \sigma_{r\theta}^e &= (-nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} - nC\rho^n + nD\rho^{-n}) \sin n\theta, \end{aligned} \quad (13)$$

$$u^e = \frac{\sigma_s}{E} \left(\frac{(\nu+1)n}{n-1} A\rho^{n-1} - \frac{(\nu+1)n}{n+1} B\rho^{-n-1} + \frac{n-2+\nu(n+2)}{n+1} C\rho^{n+1} - \frac{n+2+\nu(n-2)}{n-1} D\rho^{-n+1} \right) \cos n\theta.$$

На основе безразмерных условий (4)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^e + A_1 u^e &= 0, & \sigma_{r\theta}^e - A_2 \frac{du^e}{d\theta} &= 0, & \rho &= 1, \\ \sigma_{rr}^e &= 0, & \sigma_{r\theta}^e &= 0, & \rho &= \beta_0. \end{aligned}$$

и соотношений (9), (11)–(13) получаем искомое характеристическое уравнение [7, 8, 13, 15]

$$\det A(\beta_0) = 0, \quad (14)$$

в котором

$$\begin{aligned} a_{11} &= n + A_1 \frac{\sigma_s (v+1)n}{E (n-1)}, & a_{12} &= n - A_1 \frac{\sigma_s (v+1)n}{E (n+1)}, \\ a_{13} &= n - 2 + A_1 \frac{\sigma_s (n-2+v(n+2))}{E (n+1)}, & a_{14} &= n + 2 - A_1 \frac{\sigma_s (n+2+v(n-2))}{E (n-1)}, \\ a_{21} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_s (v+1)n}{E (n-1)}, & a_{22} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_s (v+1)n}{E (n+1)}, \\ a_{23} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_s (n-2+v(n+2))}{E (n+1)}, & a_{24} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_s (n+2+v(n-2))}{E (n-1)}, \\ a_{31} &= n\beta_0^{n-2}, & a_{32} &= n\beta_0^{-n-2}, & a_{33} &= (n-2)\beta_0^n, & a_{34} &= (n+2)\beta_0^{-n}, \\ a_{41} &= -\beta_0^{n-2}, & a_{42} &= \beta_0^{-n-2}, & a_{43} &= -\beta_0^n, & a_{44} &= \beta_0^{-n}. \end{aligned}$$

Кольцевой диск. Заменяв сплошной диск кольцевым, получаем возможность принять во внимание в расчетах возможное дополнительное внутреннее радиальное давление [16, 21]. Чтобы учесть в данной модели и дополнительное внешнее радиальное давление, рассмотрим кольцевой диск, который одновременно может быть загружен симметрично распределенным относительно плоскости $z=0$ радиальным давлением со средними значениями $p_i = \varepsilon_i \sigma_s + \kappa_i \sigma$, $p_e = \varepsilon_e \sigma_s + \kappa_e \sigma$ на поверхностях $r=a$ и $r=b$ соответственно. Коэффициенты ε_i , κ_i , ε_e , κ_e предполагаем известными; условия на контурах диска принимаем в виде $\overline{\sigma_{rr}}(a) = -p_i$ и $\overline{\sigma_{rr}}(b) = p_e$.

Возвращаясь к соотношениям (5)–(7), для компенсации среднего значения (6) в данном случае уже следует использовать напряжение $(3+v)\sigma/8 + p_e$. Поэтому теперь

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{(3+v)\sigma}{8} + p_e - \frac{C_2}{b^2} \right)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{0e} &= c \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{3+v}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} (1 - \rho^2 + f) + \frac{p_e}{\sigma_s}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{0e} &= c \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{3+v}{8} \frac{\sigma}{\sigma_s} \left(1 - \frac{3v+1}{3+v} \rho^2 + f \right) + \frac{p_e}{\sigma_s}. \end{aligned}$$

Система уравнений относительно c и x имеет вид

$$\begin{aligned} c(1 - \beta_0^{-2}) + x(1 - \beta_0^2 + f) + \frac{p_e}{\sigma_s} &= 1 - \frac{8\beta_0^2 x}{3(3+v)} + \beta\beta_0^{-1} \left(-1 - \frac{p_i}{\sigma_s} + \frac{8\beta^2 x}{3(3+v)} \right), \\ c(1 + \beta_0^{-2}) + x \left(1 - \frac{3v+1}{3+v} \beta_0^2 + f \right) + \frac{p_e}{\sigma_s} &= 1, \end{aligned}$$

а ее решение –

$$\begin{aligned} c = \tau^{-1} \left\{ \left(1 - \frac{p_e}{\sigma_s} \right) [(3v+1)\beta_0^4 - 4\beta^3\beta_0] - \right. \\ \left. - 1,5\beta\beta_0 \left(-1 - \frac{p_i}{\sigma_s} \right) [(v+3)(1+f) - (3v+1)\beta_0^2] \right\}, \end{aligned}$$

$$x = \tau^{-1}(\nu + 3) \left\{ 3 \left(1 - \frac{\rho_e}{\sigma_s} \right) + 1,5\beta\beta_0^{-1} \left(-1 - \frac{\rho_i}{\sigma_s} \right) (1 + \beta_0^2) \right\},$$

где

$$\tau = 3(\nu + 3)(1 + f) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^3\beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2), \quad \beta = a/b,$$

$$\frac{\rho_i}{\sigma_s} = \varepsilon_i + \frac{8\kappa_i\%}{\nu + 3}, \quad \frac{\rho_e}{\sigma_s} = \varepsilon_e + \frac{8\kappa_e\%}{\nu + 3},$$

$$\% = \frac{(\nu + 3)[3(1 - \varepsilon_e) + 1,5(-1 - \varepsilon_i)\beta\beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2)]}{\tau + 24\kappa_e + 12\kappa_i\beta\beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2)}.$$

Полученные выражения позволяют определить коэффициенты A_1, A_2 (см. (12)) в искомом характеристическом уравнении (14) для кольцевого диска.

Числовые примеры и обсуждение результатов. Применим приведенный подход 3 к расчету неустойчивости сплошных тонких дисков, отношение h/b для которых составляет $1/6, 1/12$ и $1/18$ соответственно (диск можно считать тонким, если его диаметр превышает толщину не менее, чем в 5–6 раз [1, 2]). Параметру z/b присвоим значения h/b и 0, чтобы оценить максимальную поправку на результаты, полученные с использованием подходов 1 [19] и 2 [1, 2]. Результаты вычислений, выполненных при $\nu = 0,5, \sigma_s/E = 0,01$ и различных n , приведены в таблице. Как видим, с помощью подхода 3, учитывающего толщину диска, можно (в частности, при отслеживании скорости продвижения упругопластической границы в срединной плоскости диска, т.е. при $z=0$) уточнить до высших значений критическую нагрузку, рассчитанную с применением подхода 1. При этом с использованием полных решений уравнений равновесия и уравнений совместимости убеждаемся в завышении значений критической угловой скорости вращения, рассчитанной на основании плоской теории применительно к плоским пластинам (подход 2). Действительно, при $n=2$ и $h^* = 1/6$ полученное значение относительной критической угловой скорости ω_*/q составляет 1.6551 и располагается между значениями 1.6355 и 1.6706, рассчитанными в рамках подходов 1 и 2. Убывание h^* влечет возрастание ω_*/q и приближение расчетной критической нагрузки к значению 1.6706, полученному с применением подхода 2, вследствие минимизации влияния слагаемого f в (9). При $n=3, 4$ указанная закономерность наблюдается, начиная с $h^* = 1/12$, а при $n=5$ – начиная с $h^* = 1/18$. Это легко объяснить соблюдением основного требования о малости толщины диска для использования в подходе 3 обобщенного плоского напряженного состояния (даже без сведения напряжений к результирующим по толщине).

n		2	3	4	5
1		2	3	4	5
Подход 1	β_{0*}	0.7120	0.8388	0.8918	0.9204
	ω_*/q	1.6355	1.6952	1.7141	1.7220
Подход 2	β_{0*}	0.7144	0.8433	0.8963	0.9247
	ω_*/q	1.6706	1.7099	1.7217	1.7264
Подход 3 $h^* = 1/6;$ $\zeta = 0$ $\zeta = h^*$	β_{0*}	0.7159	0.8442	0.8969	0.9251
	ω_*/q	1.6551	1.6930	1.7043	1.7088
	β_{0*}	0.7111	0.8413	0.8949	0.9237
	ω_*/q	1.7027	1.7451	1.7579	1.7631

Продолжение табл.

1		2	3	4	5
Подход 3 $h^* = 1/12$; $\zeta = 0$ $\zeta = h^*$	β_{0*}	0.7148	0.8435	0.8964	0.9247
	ω_* / q	1.6667	1.7056	1.7172	1.7219
	β_{0*}	0.7136	0.8428	0.8959	0.9244
	ω_* / q	1.6784	1.7185	1.7305	1.7353
Подход 3 $h^* = 1/18$; $\zeta = 0$ $\zeta = h^*$	β_{0*}	0.7145	0.8434	0.8963	0.9247
	ω_* / q	1.6688	1.7080	1.7197	1.7244
	β_{0*}	0.7140	0.8431	0.8961	0.9245
	ω_* / q	1.6740	1.7137	1.7256	1.7303

1. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: в 2-х т. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – Т. 1. – 900 с.
2. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: в 2-х т. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1952. – Т. 2. – 640 с.
3. Гузь А. Н. О построении трехмерной теории устойчивости деформируемых тел // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 1. – С. 3–44.
То же: Guz A. N. Constructing the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, № 1. – P. 1–37.
4. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Виц. шк., 1986. – 506 с.
5. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1971. – 276 с.
6. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии (обзор) // Прикл. механика. – 2012. – 48, № 3. – С. 3–78.
То же: Guz A. N. Stability of elastic bodies under uniform compression (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, № 3. – P. 241–293.
7. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 280 с.
8. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. – К.: Виц. шк., 1980. – 168 с.
9. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – К.: Виц. шк., 1989. – 352 с.
10. Еришов Л. В., Ивлев Д. Д. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. – 1958. – № 1. – С. 124–125.
11. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2-х т. Т. 2: Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – М.: Физматлит, 2002. – 448 с.
12. Ивлев Д. Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. – 1957. – № 1. – С. 141–144.
13. Ивлев Д. Д., Еришов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
14. Ли́ла Д. М. Упругопластическая неустойчивость вращающегося тонкого диска // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – № 14. – С. 92–98.
15. Ли́ла Д. М., Мартынюк А. А. О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кругового диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 1. – С. 145–158.
То же: Lila D. M., Martynyuk A. A. On instability of a rotating elastoplastic composite plane circular disk // J. Math. Sci. – 2013. – 190, № 6. – P. 804–822.
16. Ли́ла Д. М., Мартынюк А. А. Развитие неустойчивости вращающегося упругопластического кольцевого диска // Прикл. механика. – 2012. – 48, № 2. – С. 127–136.

- То же: *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – 48, № 2. – P. 224–233.
17. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1955. – 492 с.
 18. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.; Л.: Объединенное науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 1935. – 674 с.
 19. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
 20. *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Analysis of dynamics of boundary shape perturbation of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous plane circular disk: Analytical approach // *Appl. Math.* – 2012. – 3, № 5. – P. 451–456.
 21. *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Stability loss of rotating elastoplastic discs of the specific form // *Appl. Math.* – 2011. – 2, № 5. – P. 579–585.
 22. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1934. – 415 p.
То же: *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА НЕСТІЙКІСТЬ ДИСКА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ: «НЕУСЕРЕДНЕНИЙ» УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

Під час дослідження методом малого параметра можливої втрати стійкості кругового тонкого диска скінченної сталі товщини, що обертається, встановлено залежність між швидкістю обертання і радіусом пластичної зони. На основі умови текучості Сен-Венана характеристичне рівняння одержано у першому наближенні за малим параметром. Знайдено критичну кутову швидкість обертання за різних параметрів диска.

ELASTO-PLASTIC INSTABILITY OF ROTATING DISC: STATE OF «NON AVERAGE» GENERALIZED PLANE STRESS

Possible loss of stability of a rotating circular thin disk of finite constant thickness is investigated with the help of the small parameter method. The relationship between rotational velocity and radius of the plastic zone was established. Based on the Saint-Venant yield condition a characteristic equation is obtained in a first approximation with respect to the small parameter. The values of critical angular rotational velocity are found for different parameters of the disc.