УДК 517.95

С. М. Репетило, М. М. Симотюк

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В області, що є декартовим добутком відрізка на p-вимірний тор, досліджено крайову задачу з умовами Діріхле–Неймана за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за іншими координатами для лінійних рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі та конструктивно побудовано її розв'язок у вигляді ряду за системою ортогональних функцій. З'ясовано, що розв'язність задачі не пов'язана з проблемою малих знаменників.

Вступ. Задачі з крайовими умовами, заданими на всій межі області, для гіперболічних і безтипних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними є, взагалі кажучи, умовно коректними, а їхня розв'язність у багатьох випадках ускладнена через виникнення проблеми малих знаменників (див. [6, 7] та бібліографію в них).

У працях [1, 2, 8–10] на основі метричного підходу досліджено умови однозначної розв'язності крайових задач зі даними на всій межі області для багатьох класів рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними, під час побудови розв'язків яких виникають малі знаменники.

Крайові задачі для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними в обмежених і необмежених областях, де переважно виділені випадки коректно поставлених задач, які унеможливлюють появу малих знаменників, вивчались у працях [3, 5, 11–15].

У цій статті, яка доповнює результати праць [8, 9], в області, що є декартовим добутком відрізка на p-вимірний тор, досліджено крайову задачу з умовами Діріхле–Неймана за виділеною змінною t та умовами 2π-періодичності за координатами $x_1,\dots,x_p$ для лінійних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами. Вивчено умови однозначної розв'язності задачі та конструктивно побудовано її розв'язок. Встановлено, що розв'язність задачі не пов'язана з виникненням малих знаменників.

Основні позначення. Використовуватимемо такі позначення: $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел; $\mathbb{Z}_+^p$ – множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами; $x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$, $|k|=|k_1|+\cdots+|k_p|$; Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $p\in\mathbb{N}$; $Q_T^p=\{(t,x):0<t<T,\ x\in\Omega^p\}$, $T>0$; $D_x=(-i\partial/\partial x_1,\dots,-i\partial/\partial x_p)$; H_q, $q\in\mathbb{R}$, – простір 2π-періодичних функцій $v(x)=\sum\limits_{|k|\ge 0} v_k\exp(ik,x)$ з нормою $\|v;H_q\|:=\sqrt{\sum\limits_{|k|\ge 0}(1+k^2)^q\,|v_k|^2}$; $C^p([0,T],H_q)$, $q\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{Z}_+$, – простір таких функцій $v(t,x)$, що для кожного $t\in[0,T]$ функції $\dfrac{\partial^r v(t,x)}{\partial t^r}$, $r\in\{0,1,\dots,p\}$, належать до простору H_{q-r} та є неперервними за t у нормі цього простору; $\|v;C^p([0,T],H_q)\|:=\sum\limits_{r=0}^{p}\max\limits_{0\le t\le T}\left\|\dfrac{\partial^r v}{\partial t^r};H_{q-r}\right\|$; c_j, $j=1,2,\dots$, – додатні сталі, які не залежать від k.

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2018. – Вип. 16. – С. 147–153.

Формулювання задачі. В області Q_T^p розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, B(D_x)\right)u(t,x) := \frac{\partial^{2n}u}{\partial t^{2n}} + \sum_{s=0}^{n-1} a_s B^{(n-s)}(D_x)\frac{\partial^{2s}u}{\partial t^{2s}} = 0,\ (t,x) \in Q_T^p, \quad (1)$$

$$U_j[u] := \left.\frac{\partial^{2j-2}u(t,x)}{\partial t^{2j-2}}\right|_{t=0} = \varphi_j(x),\ j \in \{1,\ldots,n\},$$

$$U_{n+j}[u] := \left.\frac{\partial^{2j-1}u(t,x)}{\partial t^{2j-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x),\ j \in \{1,\ldots,n\},\ x \in \Omega^p, \quad (2)$$

де $B(D_x)$ − такий диференціальний вираз, що

$$c_1|k|^N \le |B(k)| \le c_2|k|^N,\ 0 < c_1 \le c_2,\ k \in \mathbb{Z}^p,\ N \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Вигляд області Q_T^p зумовлює умови 2π-періодичності за x на розв'язок $u(t,x)$ та функції $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$.

Єдиність розв'язку задачі. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t)\exp(ik,x), \quad (4)$$

де кожен з коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, справджує, відповідно, рівності

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}, k\right) = 0,\ t \in (0,T), \quad (5)$$

$$u_k^{(2r-2)}(0) = \varphi_{rk},\ r \in \{1,\ldots,n\},\ u_k^{(2r-1)}(T) = \varphi_{n+r,k},\ r \in \{1,\ldots,n\}, \quad (6)$$

де φ_{jk}, $k \in \mathbb{Z}^p$, − коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$.

Нехай $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ − корені рівняння $L(\lambda,1) = 0$. Надалі вважатимемо, що рівняння (1) є таким, що $\lambda_j \ne \lambda_q$, $j \ne q$, $j,q \in \{1,\ldots,n\}$, $\lambda_j \ne 0$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Зауважимо, що виконуються нерівності

$$0 < c_3 \le |\lambda_j| \le c_4,\ j \in \{1,\ldots,n\}. \quad (7)$$

Таким чином, корені рівняння

$$L(\lambda,k) = 0 \quad (8)$$

мають вигляд

$$\lambda_j(k) = \lambda_j B(k),\ j \in \{1,\ldots,n\}. \quad (9)$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ рівнянню (5) відповідає характеристичне рівняння $L(\eta^2,k) = 0$, η-корені якого мають вигляд

$$\eta_j(k) = \sqrt{|\lambda_j(k)|}\exp\left(i\arg\lambda_j(k)/2\right),$$

$$\eta_{n+j}(k) = -\eta_j(k),\ j \in \{1,\ldots,n\}, \quad (10)$$

де $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ − корені рівняння (8).

Якщо $k = (0)$, рівняння (5) набуває вигляду

$$\frac{d^{2n}u_0(t)}{dt^{2n}} = 0,$$

а його фундаментальна система розв'язків така: $\{u_{0j}(t) = t^{j-1},\ j \in \{1,\ldots,2n\}\}$. Тому характеристичний визначник задачі (5), (6), якщо $k = (0)$, зображує рівність

$$\Delta(0,T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2T & \ldots & nT^{n-1} & \ldots & (2n-1)T^{2n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n(n-1)(n-2)T^{n-3} & \ldots & (2n-1)(2n-2)(2n-3)T^{2n-4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & (2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \end{vmatrix}.$$

Визначник

$$\Delta(0,T) = 1!\,2!\ldots(2n-1)!. \tag{11}$$

Рівняння (5) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$\left\{u_{kj}(t) = \exp\left(\eta_j(k)t\right),\ u_{k,n+j}(t) = \exp\left(-\eta_j(k)t\right),\ j \in \{1,\ldots,n\}\right\}.$$

Запровадимо позначення: $\eta_j = \eta_j(k)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Характеристичний визначник [4] задачі (5), (6) можна зобразити як визназник блочної матриці

$$\Delta(k,T) = \det\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}(\eta) & \mathrm{A}(\eta) \\ \hline \mathrm{A}^{(T)}(\eta) & \mathrm{A}^{(-T)}(\eta) \end{array}\right], \tag{12}$$

де

$$\mathrm{A}(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \eta_1^2 & \ldots & \eta_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_1^{2(n-1)} & \ldots & \eta_n^{2(n-1)} \end{bmatrix},\quad \mathrm{A}^{(\pm T)}(\eta) = \begin{bmatrix} \pm\eta_1 e^{\pm\eta_1 T} & \ldots & \pm\eta_n e^{\pm\eta_n T} \\ \pm\eta_1^3 e^{\pm\eta_1 T} & \ldots & \pm\eta_n^3 e^{\pm\eta_n T} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \pm\eta_1^{2n-1} e^{\pm\eta_1 T} & \ldots & \pm\eta_n^{2n-1} e^{\pm\eta_n T} \end{bmatrix},$$

і розрахувати за формулою

$$\Delta(k,T) = (-1)^n \prod_{1\le s<l\le n}\left(\eta_l^2 - \eta_s^2\right)^2 \prod_{j=1}^{n}\left(\left(e^{\eta_j T} + e^{-\eta_j T}\right)\eta_j\right). \tag{13}$$

Лема. *Для довільних чисел* $T > 0$ *та фіксованих коефіцієнтів рівняння (1) оцінка*

$$|\Delta(k,T)| \ge c_5\,|k|^{Nn(n-1/2)}\, e^{n\left|\operatorname{Re}\eta_q(k)\right|T} \tag{14}$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Д о в е д е н н я . Оцінимо знизу модулі виразів, які містить як множники формула (13). На підставі оцінок (3), (7) і формул (9) отримуємо оцінку

$$c_2c_4\,|k|^N \ge \left|\lambda_j(k)\right| \ge c_1c_3\,|k|^N.$$

Таким чином, із урахуванням формул (10) одержимо:

$$\sqrt{c_2c_4}\,|k|^{N/2} \ge |\eta_j(k)| \ge \sqrt{c_1c_3}\,|k|^{N/2},\ k \in \mathbb{Z}^p, \tag{15}$$

$$\left|\prod_{1\le s<l\le n}\left(\eta_l^2-\eta_s^2\right)^2\right| = \left|\prod_{1\le s<l\le n}\left(\lambda_q(k)-\lambda_s(k)\right)^2\right| =$$

$$= |B(k)|^{n(n-1)}\prod_{1\le s<l\le n}\left|\lambda_q-\lambda_s\right|^2 \ge c_1^{n(n-1)}c_6\,|k|^{Nn(n-1)},\ k\in\mathbb{Z}^p. \tag{16}$$

Оцінимо знизу величину $\left|e^{\eta_q T}+e^{-\eta_q T}\right|$. Зауважимо, що

$$\left|e^{\eta_q T}+e^{-\eta_q T}\right|^2 = e^{2\operatorname{Re}\eta_q T}+e^{-2\operatorname{Re}\eta_q T}+2\cos\left(2\operatorname{Im}\eta_q T\right) \ge e^{2\operatorname{Re}\eta_q T}+e^{-2\operatorname{Re}\eta_q T}-2.$$

Легко бачити, що оцінка

$$e^{2\operatorname{Re}\eta_q T}+e^{-2\operatorname{Re}\eta_q T}-2 \ge 1/2\,e^{2|\operatorname{Re}\eta_q|T} \tag{17}$$

справджується для таких η_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$, що $\operatorname{Re}\eta_j > (\ln 2)/T$. Оскільки $\operatorname{Re}\eta_j(k) \le |\eta_j(k)|$, $k\in\mathbb{Z}^p$, то, враховуючи оцінки (3) і (7) та формули (9) і (10), отримаємо, що оцінка (17) справджується для таких всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, що $|k|>K$, де $K=\left(\dfrac{\ln 2}{T\sqrt{c_2c_4}}\right)^{2/N}$. Таким чином,

$$\left|e^{\eta_q(k)T}+e^{-\eta_q(k)T}\right| \ge 1/\sqrt{2}\,e^{|\operatorname{Re}\eta_q(k)|T},\ k\in\mathbb{Z}^p,\ |k|>K. \tag{18}$$

На підставі формули (13) та оцінок (15), (16), (18) отримуємо оцінку (14), в якій $c_5=c_5(n,c_1,c_3,c_6)$. Лему доведено.

Відомо [4], що задача (5), (6) для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(k,T)\ne 0$.

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $C^{2n}([0,T],H_q)$ необхідно і досить, щоб справджувались умови

$$\left(\forall k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\},\,|k|\le K,\,\forall m\in\mathbb{Z}\right)\ i\eta_j(k)T\ne\pi(m+1/2),\ j\in\{1,\ldots,n\}.$$

Доводимо за схемою доведення теореми 1 з праці [8], враховуючи лему.

Наслідок. Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $C^{2n}([0,T],H_q)$ досить, щоб виконувалися умови

$$\left(\forall k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\},\,|k|\le K\right)\ \cos\left(\arg\lambda_j(k)/2\right)\ne 0,\ j\in\{1,\ldots,n\}. \tag{19}$$

Існування розв'язку задачі. Надалі вважатимемо, що справджуються умови (19). Тоді для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ задача (5), (6) має єдиний розв'язок $u_k(t)$, який будуємо конструктивно; при цьому формальний розв'язок задачі (1), (2) зображає ряд

$$u(t,x)=\sum_{|k|\ge 0}u_k(t)\,e^{(ik,x)}, \tag{20}$$

у якому

$$u_0(t):=\sum_{l,j=1}^{2n}(-1)^{l+j}\varphi_{j0}\,\frac{\Delta_{jl}(0,T)}{\Delta(0,T)}\,t^{l-1}, \tag{21}$$

$$u_k(t)=\sum_{q,j=1}^{n}S_{n-j}^{(q)}\frac{\varphi_{jk}\eta_q\left(e^{\eta_q(T-t)}+e^{-\eta_q(T-t)}\right)+\varphi_{n+j,k}\left(e^{\eta_q t}-e^{-\eta_q t}\right)}{(-1)^{n+j}\eta_q\left(e^{\eta_q T}+e^{-\eta_q T}\right)\prod\limits_{s=1,s\neq q}^{n}(\eta_q^2-\eta_s^2)},$$

$$k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}, \tag{22}$$

де $\Delta_{jl}(0,T)$ – алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині j-го рядка та l-го стовпця у визначнику $\Delta(0,T)$; $S_l^{(q)}$, $l\in\{1,\dots,n-1\}$ – сума всіх можливих добутків елементів $\eta_1^2,\dots,\eta_{q-1}^2,\eta_{q+1}^2,\dots,\eta_n^2$, узятих по l штук у кожному добутку, $S_0^{(q)}\equiv 1$.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови (19) і* $\varphi_j\in H_{n(N-2)+N-Nj+q}$, $\varphi_{n+j}\in H_{n(N-2)+N/2-Nj+q}$, $j\in\{1,\dots,n\}$, *то у просторі* $C^{2n}([0,T],H_q)$ *існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j\in\{1,\dots,2n\}$.

Д о в е д е н н я . Оцінимо зверху величину $\max\limits_{0\le t\le T}\left|u_k^{(r)}(t)\right|$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ та $r\in\{0,1,\dots,n\}$. Міркуючи аналогічно, як і під час встановлення нерівності (16), оцінимо знизу модулі виразів $\prod\limits_{s=1,s\neq q}^{n}\left(\eta_q^2-\eta_s^2\right)$, які входять множниками у знаменники членів ряду (22). Отримаємо:

$$\left|\prod_{s=1,s\neq q}^{n}\left(\eta_q^2-\eta_s^2\right)\right|\ge c_1^{n-1}c_7\,|k|^{N(n-1)},\ k\in\mathbb{Z}^p. \tag{23}$$

З формул (21), (22) та оцінок (15), (18), (23) дістанемо:

$$\max_{0\le t\le T}\left|u_0^{(r)}(t)\right|\le\max_{\substack{0\le t\le T,\\ j,l\in\{1,\dots,2n\}}}\left|t^{i-1}\Delta_{jl}(0,T)\big/\Delta(0,T)\right|,\ r\in\{0,1,\dots,2n\};$$

$$\max_{0\le t\le T}\left|u_k^{(r)}(t)\right|\le c_8\max_{0\le t\le T,\,k\le K}e^{\operatorname{Re}\eta_q(k)t}\Big/\min_{k\le K}\left|e^{\eta_q(k)T}+e^{-\eta_q(k)T}\right|\times$$
$$\times\left((1+|k|)^{rN/2}\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_{jk}\right|+(1+|k|)^{(r-1)N/2}\sum_{j=n+1}^{2n}\left|\varphi_{jk}\right|\right),$$
$$r\in\{0,1,\dots,2n\},$$

якщо $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$, $|k|\le K$, і

$$\max_{0\le t\le T}\left|u_k^{(r)}(t)\right|\le c_8\left((1+|k|)^{rN/2}\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_{jk}\right|+(1+|k|)^{(r-1)N/2}\sum_{j=n+1}^{2n}\left|\varphi_{jk}\right|\right),$$
$$r\in\{0,1,\dots,2n\},$$

якщо $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$, $|k|>K$.

На підставі отриманих оцінок і формули (20) одержуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\left\|u;C^{2n}([0,T],H_q\right\|=\sum_{r=0}^{2n}\max_{0\le t\le T}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}(1+k^2)^{q-r}\left|u_k^{(r)}(t)\right|^2}\le$$

$$\le \sum_{r=0}^{2n} \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1+k^2)^{q-r} \max_{0\le t\le T} \left| u_k^{(r)}(t) \right|^2} \le$$

$$\le c_9 \sum_{r=0}^{2n} \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1+k^2)^{q-r} \left| \left(1+|k|\right)^{rN/2} \sum_{j=1}^{n} \left|\varphi_{jk}\right| + \left(1+|k|\right)^{(r-1)N/2} \sum_{j=n+1}^{2n} \left|\varphi_{jk}\right| \right|^2} \le$$

$$\le c_{10} \left(\sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1+|k|^2)^{n(N-2)+N-Nj+q} \left| \sum_{j=1}^{n} \left|\varphi_{jk}\right| \right|^2} + \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1+|k|^2)^{n(N-2)+N/2-Nj+q} \left| \sum_{j=n+1}^{2n} \left|\varphi_{jk}\right| \right|^2} \right) \le$$

$$\le c_{10} \left(\sqrt{n \sum_{|k|\ge 0} \sum_{j=1}^{n} \left|\varphi_{jk}\right|^2 (1+|k|^2)^{n(N-2)+N-Nj+q}} + \sqrt{n \sum_{|k|\ge 0} \sum_{j=n+1}^{2n} \left|\varphi_{jk}\right|^2 (1+|k|^2)^{n(N-2)+N/2-Nj+q}} \right) \le$$

$$\le c_{10} \sqrt{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} \left|\varphi_{jk}\right|^2 (1+|k|^2)^{n(N-2)+N-Nj+q}} + \sum_{j=n+1}^{2n} \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} \left|\varphi_{jk}\right|^2 (1+|k|^2)^{n(N-2)+N/2-Nj+q}} \right) \le$$

$$\le c_{10} \sqrt{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_j; H_{n(N-2)+N-Nj+q} \right\| + \sum_{j=n+1}^{2n} \left\| \varphi_j; H_{n(N-2)+N/2-Nj+q} \right\| \right). \tag{24}$$

З нерівності (24) випливає доведення теореми.

Аналогічні результати можна отримати для рівняння вигляду (1), коли рівняння $L\left(\eta^2, k\right) = 0$ має кратні корені $\eta_1(k), \ldots, \eta_q(k)$ $(q < n)$ кратностей $m_1, \ldots, m_q$ відповідно $\left(m_1 + \ldots + m_q = n\right)$. У цьому випадку відповідний характеристичний визначник обчислюють за формулою

$$\Delta_1(k, T) = \prod_{1\le s<l\le q} \left(\eta_l^2 - \eta_s^2\right)^2 \prod_{j=1}^{q} \left(\eta_j^{m_j^2} \left(e^{\eta_j T} + e^{-\eta_j T}\right) \prod_{d=1}^{m_j} 2^{2s-2} (s-1)!^{\,2} \right).$$

1. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. матем. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592–1602.
2. *Бобик І. О., Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки – 2010. – № 687. – С. 11–19.
3. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 4. – С. 7–17.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
5. *Павленко В. Н., Петраш Т. А.* Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – **18**, № 2. – С. 199–204.
6. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
7. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
8. *Пташник Б. Й, Репетило С. М.* Задача Діріхле–Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 3. – С. 15–28.

   Те саме: *Ptashnyk B. Yo., Repetylo S. M.* Dirichlet–Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, № 4. – P. 501–517.

9. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійних безтипних рівнянь з частинними похідними // Укр. матем. журн. – 2016. – **68**, № 5. – С. 665–682.
10. *Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних систем рівнянь з частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання // Мат. вісник НТШ. – 2004. – **1**. – С. 130–148.
11. *Bostan M.* Boundary value problem for the n dimensional time periodic Vlasov–Poisson system // Math. Methods in the Appl. Sci. – 2006. – **29**, № 15. – P. 1801–1848.
12. *Gentile G., Mastropietro V., Procesi M.* Periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations with Dirichlet boundary conditions // Commun. Math. Phys. – 2005. – **256**, No. 2. – P. 437–490.
13. *Kaliev I. A., Mugafarov M. F.* The third boundary value problem for the systems of equations of linear thermoelasticity // J. of appl. and industrial math. – 2008. – **2**, № 4. – P. 501–507.
14. *Kengne E.* Nonlocal boundary value-problem for partial differential equations with variable coefficients // Focus on African diaspora mathematics. – 2008. – P. 97–108.
15. *Nurmamedov M. A.* On the solvability of a boundary value problem for quasi-linear system equations of mixed and composite type in a multidimensional domain // Vladikavkaz. Math. Zh. – 2010. – **12**, № 2. – P. 46–61.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В области, являющейся декартовым произведением отрезка на p-мерный тор, исследована краевая задача с условиями Дирихле–Неймана по выделенной переменной и условиями 2π-периодичности по остальным координатам для линейных уравнений с частными производными высокого порядка с постоянными коэффициентами. Изучены условия однозначной разрешимости задачи и конструктивно построено ее решение в виде ряда по системе ортогональных функций. Установлено, что разрешимость задачи не связана с проблемой малых знаменателей.

DIRICHLET–NEUMANN PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

In the region, which is a Cartesian product of a segment on the p-measurable torque, the boundary value problem with Dirichlet–Neumann conditions in the chosen variable and the conditions 2π-periodicity in the other coordinates for linear partial differential equations of high order with constant coefficients has been investigated. The conditions of unique solvability for the problem have been established and its solution in the form of the series in the system of orthogonal functions has been constructed. It is established that the solvability of the problem is not related to the problem of small denominators.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.12.18