УДК 512.64

О. А. Тилищак

ПРО ЧИСЛО НЕРОЗКЛАДНИХ МОДУЛЯРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЦИКЛІЧНОЇ *p*-ГРУПИ НАД СКІНЧЕННИМ ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ

Знайдено число нееквівалентних нерозкладних зображень спеціального вигляду циклічної p-групи над скінченним комутативним локальним кільцем скінченної довжини характеристики p.

Вступ. Матричні зображення скінченних груп над полями вивчені досить добре. Якщо характеристика p поля не ділить порядок групи G (зокрема, $p=0$), вона завжди має (з точністю до еквівалентності) скінченне число нерозкладних зображень. Крім того, всі нерозкладні зображення незвідні. Якщо p ділить порядок групи G, група має скінченне число нерозкладних зображень тоді і лише тоді, коли її силовська p-підгрупа циклічна. В обох випадках число (з точністю до еквівалентності) незвідних зображень довільної скінченної групи описано (в групових термінах) у працях [2, 28]. (У другому випадку більшість нерозкладних зображень звідні.) Класифікацію всіх нерозкладних зображень скінченних груп у модулярному випадку досліджували В. М. Бондаренко і Ю. А. Дрозд, зокрема у праці [7], результати якої разом з результатами праці [16] є важливим етапом розвитку сучасної теорії зображень, пов'язаним з ручними та дикими матричними задачами.

Матричні зображення скінченних груп над кільцями загалом вивчені набагато менше (навіть для циклічних груп), хоча існує чимало праць, особливо для відомих класів кілець характеристики $p=0$. Зауважимо, що задача про ручні та дикі випадки актуальна і для зображень груп над кільцями (що не є полями); перші результати про дикість для зображень циклічних груп отримано в працях [5, 9] для деяких областей цілісності та нецілісних відповідно. Якщо мова йде про кількість нерозкладних зображень (а саме із такою тематикою пов'язана ця стаття), слід, зокрема, звернути увагу на праці [1, 3, 4, 8, 10, 17, 18, 20–25] для $p=0$ і [11–15, 19, 22] для $p>0$.

П. М. Гудивок, І. Б. Чухрай [15] стверджують, що скінченна p-група G порядку $|G|>2$ над комутативним локальним кільцем характеристики p^s $(s \ge 1)$, яке не є полем, має нееквівалентні нерозкладні матричні зображення довільного степеня $n>1$ не менше за порядок поля лишків кільця K. Мета цієї статті – побудувати серію нееквівалентних нерозкладних матричних зображень скінченної p-групи над нецілісним комутативним локальним кільцем K головних ідеалів характеристики p з використанням результатів В. М. Бондаренка і М. Ю. Бортош [6]. А також для випадку, коли кільце K скінченне, обчислити кількість побудованих зображень.

Теоретичні обчислення частково підтверджено та доповнено обчисленнями в системі комп'ютерної алгебри GAP [27]. Одна її компонента – спеціальна мова, за допомогою якої можна створювати власні програми і розширювати систему.

Критерій подібності мономіальних матриць над локальними кільцями головних ідеалів. Наведемо означення (разом з позначеннями) та твердження з праці [6].

Нехай K – комутативне локальне кільце головних ідеалів і R – його єдиний максимальний ідеал (радикал). Зафіксуємо в R твірний елемент t.

Тоді будь-який ненульовий елемент $x \in K$ має вигляд εt^s, де ε — елемент мультиплікативної групи K^* кільця K і $s \ge 0$ (див. [26]). Число s (яке не залежить від вибору t) називають *вагою елемента* x і позначають через $w(x)$ [6, с. 70]. Елемент ε, очевидно, залежить від t; більш того, якщо K не є областю цілісності (тобто радикал нільпотентний), він визначається елементом x неоднозначно, зокрема $\varepsilon t^s = \varepsilon' t^s$ тоді і лише тоді, коли ε і ε' рівні за модулем $\mathrm{Ann}(t^s) = \{y \in K \mid yt^s = 0\}$, тобто $\varepsilon - \varepsilon' \in \mathrm{Ann}(t^s)$. Ступінь l нільпотентності радикала R називають також довжиною кільця K.

Згідно з [6] матриця над кільцем K вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_n \\ a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

де $a_i \ne 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, *канонічно циклічна.* Послідовність $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ називаємо визначальною послідовністю матриці A і пишемо $A = M(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, а послідовність ваг $\bar{w}(\bar{a}) = (w(a_1), \ldots, w(a_{n-1}), w(a_n))$ членів визначальної послідовності – ваговою послідовністю матриці A. Тоді $\bar{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, де $s_i = w(a_i)$ і $\varepsilon_i \in K^*$ (ε_i визначаються послідовністю $\bar{a}$ неоднозначно). В цьому випадку матрицю $M(\bar{a}) = M(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ позначають також через $M(\bar{w}, \bar{\varepsilon})$, де $\bar{w} = \bar{w}(\bar{a})$ і $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$. Очевидно,

$$M(\bar{a}) = M(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = M(t^{s_1}, \ldots, t^{s_{n-1}}, t^{s_n}) \cdot \mathrm{diag}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n].$$

Дві послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, члени яких належать деякій множині, називають циклічно еквівалентними, якщо $\bar{y}$ отримують із $\bar{x}$ циклічною перестановкою її членів: $\bar{y} = (x_k, \ldots, x_n, x_1 \ldots, x_{k+1})$.

Теорема ([6]). *Матриці* $M = M(\bar{w}, \bar{\varepsilon})$ *і* $M' = M(\bar{w}', \bar{\varepsilon}')$, *де* $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$, $\bar{\varepsilon}' = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{n-1}, \varepsilon'_n)$, *подібні тоді і лише тоді, коли* $\bar{w}$ *та* $\bar{w}'$ *циклічно еквівалентні, а елементи* $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$ *і* $\varepsilon' = \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_{n-1}\varepsilon'_n$ *кільця* K *рівні за модулем* $\mathrm{Ann}(t^s)$, *де* s *— найбільший член вагової послідовності* $\bar{w}$.

Число неперіодичних послідовностей з точністю до циклічної еквівалентності. Назвемо послідовність $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з елементами з довільної множини періодичною, якщо для деякого натурального $k < n$ $\bar{x} = (x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_k)$. У цьому випадку k назвемо періодом послідовності $\bar{x}$. Розглянемо клас W послідовностей, циклічно еквівалентних $\bar{x}$. На W природно розглянути дію циклічної групи H порядку $|H| = n$, яка перетворить W в одну H-орбіту. Послідовність $\bar{x}$ періодична тоді і тільки тоді, коли в неї нетривіальний стабілізатор, який, очевидно, буде циклічною підгрупою групи H. Отже, найменший період послідовності $\bar{x}$ ділить n та кожний період послідовності $\bar{x}$. У праці [6] встановили, що якщо послідовність $\bar{w}$ неперіодична, то матриця $M(\bar{w}, \bar{\varepsilon})$ нерозкладна. Але неперіодичною буде і будь-яка послідовність $\bar{w}'$, отримана з $\bar{w}$ циклічним зсувом. Тому всі матриці $M(\bar{w}', \bar{\varepsilon}')$ теж нерозкладні.

Нехай K – комутативне локальне кільце головних ідеалів, радикал якого $R = tK$, t – нільпотентний елемент степеня $l > 1$. З'ясуємо число $U(l, n)$ неперіодичних послідовностей $\overline{w} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ з точністю до циклічної еквівалентності, де s_i – вага ненульового елемента кільця K, тобто $s_i \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В одному класі циклічно еквівалентних неперіодичних послідовностей є рівно n послідовностей, оскільки будь-який циклічний зсув неперіодичної послідовності генерує відмінну від початкової послідовність.

Очевидно, $U(2,6)$ є числом неперіодичних послідовностей $\overline{w} = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ $s_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, де $\overline{w}$ – найменша в лексикографічному порядку серед їй циклічно еквівалентних. Тоді, очевидно, $s_1 = 0$, $s_6 = 1$. Перебір таких послідовностей дасть:

$$(0,0,0,0,0,1),\ (0,0,0,0,1,1),\ (0,0,0,1,0,1),\ (0,0,0,1,1,1),\ (0,0,1,0,1,1),$$
$$(0,0,1,1,1,1),\ (0,0,1,1,0,1),\ (0,1,0,1,1,1),\ (0,1,1,1,1,1).$$

Таким чином, $U(2,6) = 9$.

При $l = 2$, $n = 6$ число $U(l, n)$ можна розрахувати, наприклад, за такою серією команд системи GAP 4.8.7.

```
l:=2;n:=6;
   # Формуємо n-ий декартовий степінь множин {0, 1, .., l-1}
L:=Cartesian(List([1..n],i->[0..l-1]));;
   # Вибираємо неперіодичні послідовності
M:=Filtered(L,f->not(ForAny([1..n-1],i->ForAll([1..n],j->f[j]=f[(j+i-1) mod n+1]))));
   # Рахуємо кількість класів циклічно еквівалентних послідовностей
Length(M)/n;
```

У результаті обчислень також одержуємо $U(2,6) = 9$. Запропонований код, однак, нещадний до пам'яті, бо завантажує спочатку n-й декартовий степінь множини $\{0, 1, \ldots, l-1\}$, з якими потім виконує один перебір зі завантаженням всіх неперіодичних послідовностей та їх подальшим кількісним обчисленням. Код без значного завантаження пам'яті з такими ж результатами може бути таким:

```
l:=2;n:=6;y:=0;
f:=List([1..n], x->0);# формуємо послідовність з n нулів
repeat
  # Перевірка на неперіодичність
 if not(ForAny([1..n-1],i->ForAll([1..n],j->f[j]=f[(j+i-1) mod n+1]))) then y:=y+1; fi;
  # формуємо наступну послідовність з n-го декартовогоі степеня множин
{0,1,..,l-1}
 for i in [1..n] do if f[i]=l-1 then f[i]:=0; else f[i]:=f[i]+1; break; fi; od;
until Sum(f)=0;
 # Рахуємо кількість класів циклічно еквівалентних послідовностей
Print(y/n,"\n").
```

У результаті обчислень також одержуємо $U(2,6) = 9$.

Число нерозкладних матриць $M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ з точністю до подібності. З'ясуємо число нерозкладних матриць $M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ з точністю до подібності над скінченним комутативним локальним кільцем K довжини $l > 1$.

Лема. *Нехай K – комутативне локальне кільце головних ідеалів, радикал якого $R = tK$, t – нільпотентний елемент степеня $l > 1$. Кільце K скінченне тоді і тільки тоді, коли поле відношень K / R кільця K*

скінченне. Крім того, в останньому випадку $\left|t^iK\,/\,t^jK\right| = k^{j-i}$ $(0 \le i < j \le l)$, *зокрема,* $|K| = k^l$, $\left|K\,/\,t^jK\right| = k^j$ $(0 < j \le l)$, *де* $k = |K\,/\,R|$.

Д о в е д е н н я. Необхідність очевидна. Нехай поле відношень $K\,/\,R$ кільця K скінченне, $|K\,/\,R| = k$. Якщо $0 \le i < l$, то $\varphi : x \to t^i x\,/\,t^{i+1}K$ є гомоморфізмом адитивних груп $\varphi : K \to t^iK\,/\,t^{i+1}K$ з ядром $R = tK$ і, зокрема, $\left|t^iK\,/\,t^{i+1}K\right| = |K\,/\,R| = k$. Крім того, якщо $0 \le i < j \le l$, то

$$\left|t^iK\,/\,t^jK\right| = \left|t^iK\,/\,t^{i+1}K\right| \cdot \left|t^{i+1}K\,/\,t^{i+2}K\right| \ldots \left|t^{j-1}K\,/\,t^jK\right| = \underbrace{k \cdot k \ldots k}_{j-i} = k^{j-i}.$$

Звідси $|K| = |K\,/\,\{0\}| = \left|t^0K\,/\,t^lK\right| = k^{l-0} = k^l$, $\left|K\,/\,t^jK\right| = \left|t^0K\,/\,t^jK\right| = k^{j-0} = k^j$. ◊

З'ясуємо число $W(k,l,n)$ нерозкладних матриць $M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$ порядку $n > 1$, які розглядаємо з точністю до подібності над скінченним комутативним локальним кільцем K довжиною $l > 1$ з порядком $k = |K\,/\,R|$ поля відношень кільця K. Це число буде числом матриць $M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$ з точністю до подібності над кільцем K з неперіодичними ваговими послідовностями $\overline{w}$. Але неперіодичною буде і всяка послідовність, отримана з $\overline{w}$ циклічним зсувом. Тому всі матриці $M(\overline{w}',\overline{\varepsilon}')$ з послідовністю $\overline{w}'$, циклічно еквівалентною $\overline{w}$, теж нерозкладні. З теореми випливає, що всіх матриць $M(\overline{w}',\overline{\varepsilon}')$ з точністю до подібності з послідовністю $\overline{w}'$, циклічно еквівалентною $\overline{w}$, є стільки, скільки є значень $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ з точністю до конгруентності за модулем $\mathrm{Ann}(t^s)$, де s – найбільший елемент вагової послідовності $\overline{w}$. Очевидно, $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ може бути довільним оборотним елементом у кільці K. Тому число матриць $M(\overline{w}',\overline{\varepsilon}')$ з точністю до подібності з послідовністю $\overline{w}'$, циклічно еквівалентною фіксованій неперіодичній послідовності $\overline{w}$, буде:

$$\left|\left(K\big/Ann(t^s)\right) \setminus \left(tK\big/Ann(t^s)\right)\right| = \left|\left(K\big/t^{l-s}K\right) \setminus \left(tK\big/t^{l-s}K\right)\right| = k^{l-s} - k^{l-s-1} = (k-1)k^{l-s-1}.$$

Очевидно, $W(k,4,3)$ є числом послідовностей $(s_1,s_2,s_3,\varepsilon)$, де $s_i \in \{0,1,2,3\}$ $(i = 1,2,3)$, ε належить множині оборотних представників всіх різних суміжних класів $K\,/\,Ann(t^s) = K\,/\,t^{4-s}K$ $(s = \max(s_1,s_2,s_3))$, $\overline{w} = (s_1,s_2,s_3)$ – неперіодична послідовність, найменша в лексикографічному порядку серед їй циклічно еквівалентних. Оскільки 3 просте число, то $\overline{w}$ є неперіодичною тоді і тільки тоді, коли містить принаймні два різні елементи. Якщо $\overline{w}$ найменша в лексикографічному порядку серед їй циклічно еквівалентних, то $s_1 = \min(s_1,s_2,s_3)$. Перебір таких послідовностей $(s_1,s_2,s_3,\varepsilon)$ разом з s та кількістю варіантів для ε дасть:

$(0,0,1,\varepsilon)$ -1- $(k-1)k^2$, $(0,1,1,\varepsilon)$ -1- $(k-1)k^2$, $(0,0,2,\varepsilon)$ -2- $(k-1)k$,
$(0,1,2,\varepsilon)$ -2- $(k-1)k$, $(0,2,1,\varepsilon)$ -2- $(k-1)k$, $(0,2,2,\varepsilon)$ -2- $(k-1)k$,
$(1,1,2,\varepsilon)$ -2- $(k-1)k$, $(1,2,2,\varepsilon)$ -2- $(k-1)k$, $(0,0,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$,
$(0,1,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$, $(0,2,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$, $(0,3,1,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$,
$(0,3,2,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$, $(0,3,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$, $(1,1,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$,
$(1,2,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$, $(1,3,2,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$, $(1,3,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$,
$(2,2,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$, $(2,3,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$.

Таким чином, $W(k,4,3) = (k-1)(2k^2 + 6k + 12) = 2k^3 + 4k^2 + 6k - 12$.

Модифікуємо код, що обчислює число $U(l,n)$ неперіодичних послідовностей $\overline{w}$ з точністю до циклічної еквівалентності. Приєднуємо для кожної такої послідовності обчислення найбільшого її елемента s, домноження кількостей послідовностей з однаковим s на $(k-1)k^{l-s-1}$, де k оголошується цілочисловою невідомою, та сумування одержаних добутків.

```
l:=4;n:=3;maxlist:=[];matnumblist:=[];k:=Indeterminate(Integers,"k");
f:=List([1..n], x->0); # формуємо послідовність з n нулів
repeat
  # Перевірка на неперіодичність
 if not(ForAny([1..n-1],i->ForAll([1..n],j->f[j]=f[(j+i-1) mod n+1]))) then
Add(maxlist,Maximum(f)); fi;
  # формуємо наступну послідовність з n-го декартового степеня множин
{0,1,..,l-1}
 for i in [1..n] do if f[i]=l-1 then f[i]:=0; else f[i]:=f[i]+1; break; fi; od;
until Sum(f)=0;
 # Рахуємо кількість класів ц. еквівалентних послідовностей з однаковими s
for s in [1..l-1] do Add(matnumblist, Number(maxlist,x->x=s)/n*(k-1)*k^(l-s-1)); od;
Print(Sum(matnumblist),"\n");
```

У результаті обчислень також одержуємо $W(k,4,3)=2k^3+4k^2+6k-12$. Тут подано обчислення $W(k,l,n)$ за деяких значень l, n.

	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$l=2$	$k-1$	$2k-2$	$3k-3$
$l=3$	k^2+k-2	$2k^2+4k-6$	$3k^2+12k-15$
$l=4$	k^3+k^2+k-3	$2k^3+4k^2+6k-12$	$3k^3+12k^2+27k-42$
$l=5$	$k^4+k^3+k^2+k-4$	$2k^4+4k^3+6k^2+8k-20$	$3k^4+12k^3+27k^2+48k-90$
$l=6$	$k^5+k^4+k^3+k^2+$ $+k-5$	$2k^5+4k^4+6k^3+8k^2+$ $+10k-30$	$3k^5+12k^4+27k^3+48k^2+$ $+75k-165$

Система дає можливість також обчислювати громіздкі значення $W(k,l,n)$, які не наводимо в таблиці, наприклад,

$$W(k,7,8)=30k^6+750k^5+6570k^4+33240k^3+120450k^2+349470k-510510.$$

Модулярні зображення деяких циклічних p-груп над комутативним локальним кільцем.

Твердження 1. *Нехай $G=\langle a\rangle$ – циклічна p-група, K – комутативне локальне кільце головних ідеалів характеристики p, що не є полем, радикал якого $R=tK$, E – одинична матриця порядку n, $s_i\in N\cup\{0\}$ і $\varepsilon_i\in K^*$ $(i=1,\ldots,n)$. Відображення*

$$\Gamma_{\overline{w},\overline{\varepsilon}}:a\to\Gamma_{\overline{w},\overline{\varepsilon}}(a)=E+M(\overline{w},\overline{\varepsilon})=E+M(\varepsilon_1t^{s_1},\ldots,\varepsilon_nt^{s_n})$$

є зображенням групи G тоді і тільки тоді, коли $M(t^{s_1},\ldots,t^{s_n})^{|G|}=0.$

Д о в е д е н н я. Очевидно, G є зображенням групи G тоді і тільки тоді, коли $\left(E+M(\varepsilon_1t^{s_1},\ldots,\varepsilon_nt^{s_n})\right)^{|G|}=E$. Оскільки p – характеристика кільця K, то остання умова еквівалентна $M(\varepsilon_1t^{s_1},\ldots,\varepsilon_nt^{s_n})^{|G|}=0$. Або, що одне і те саме,

$$(M(t^{s_1},\ldots,t^{s_n})\cdot\operatorname{diag}[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n])^{|G|}=0. \quad (1)$$

Останнє можливе через те, що

$$M(t^{s_1},\ldots,t^{s_n})\cdot\operatorname{diag}[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n]=\operatorname{diag}[\varepsilon_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}]\cdot M(t^{s_1},\ldots,t^{s_n}).$$

Тому рівність (1) еквівалентна

$$M(t^{s_1},\dots,t^{s_n})^{|G|}\cdot \mathrm{diag}[\delta_1,\dots,\delta_n]=0$$

для деяких $\delta_i \in K^*$ $(i=1,\dots,n)$. Або, що одне і те саме, $M(t^{s_1},\dots,t^{s_n})^{|G|}=0.$ ◊

Твердження 2. *Нехай K – комутативне локальне кільце головних ідеалів, радикал якого $R=tK$, t – нільпотентний елемент степеня $l>1$, $s_i\in N\cup\{0\}$ $(i=1,\dots,n)$, m — натуральне число;*

$$M(t^{s_1},\dots,t^{s_n})^m=0 \tag{2}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{j=0}^{m-1} s_{i+j}\ge l\ (i=1,\dots,n),$$

при цьому індекси $i+j$ треба замінити на індекси $i+j-kn$, якщо $i+j>kn$, де k – максимально можливе натуральне число (тобто тут також індекси розглядають за модулем n).

Доведення. Очевидно, $M(t^{s_1},\dots,t^{s_n})=M(1,\dots,1)\cdot\mathrm{diag}[t^{s_1},\dots,t^{s_n}]$. Враховуючи, що $M(1,\dots,1)\cdot\mathrm{diag}[t^{s_1},\dots,t^{s_n}]=\mathrm{diag}[t^{s_n},t^{s_1},\dots,t^{s_{n-1}}]\cdot M(1,\dots,1)$, одержимо:

$$M(t^{s_1},\dots,t^{s_n})^m=\left(M(1,\dots,1)\cdot\mathrm{diag}[t^{s_1},\dots,t^{s_n}]\right)^m=M(1,\dots,1)^m\cdot\prod_{j=0}^{m-1}\mathrm{diag}_j[t^{s_1},\dots,t^{s_n}],$$

де $\mathrm{diag}_j[t^{s_1},\dots,t^{s_n}]=[t^{s_{j \bmod n+1}},\dots,t^{s_n},t^{s_1},\dots,t^{s_{j \bmod n}}]$. Беручи до уваги, що індекси розглядаємо за модулем n, одержимо:

$$M(t^{s_1},\dots,t^{s_n})^m=M(1,\dots,1)^m\cdot\prod_{j=0}^{m-1}\mathrm{diag}[t^{s_{1+j}},\dots,t^{s_n},t^{s_1},\dots,t^{s_j}]=$$

$$=M(1,\dots,1)^m\cdot\mathrm{diag}\left[\prod_{j=0}^{m-1}t^{s_{1+j}},\prod_{j=0}^{m-1}t^{s_{2+j}},\dots,\prod_{j=0}^{m-1}t^{s_{n+j}}\right].$$

Оскільки $M(1,\dots,1)^m$ оборотна матриця, то рівність (2) еквівалентна

$$\prod_{j=0}^{m-1}t^{s_{i+j}}=0\ (i=1,\dots,n)$$

або, що одне і те ж,

$$t^{\sum_{j=0}^{m-1}s_{i+j}}=0\ (i=1,\dots,n).$$

Тобто рівність (2) еквівалентна

$$\sum_{j=0}^{m-1}s_{i+j}\ge l\ (i=1,\dots,n).$$ ◊

Наслідок 1. *Нехай $G=\langle a\rangle$ – циклічна p-група, K – комутативне локальне кільце головних ідеалів характеристики p, радикал якого $R=tK$, t – нільпотентний елемент степеня $l>1$, E – одинична матриця порядку n, $s_i\in N\cup\{0\}$ і $\varepsilon_i\in K^*$ $(i=1,\dots,n)$. Відображення*

$$\Gamma_{\overline{w},\overline{\varepsilon}}:a\to\Gamma_{\overline{w},\overline{\varepsilon}}(a)=E+M(\overline{w},\overline{\varepsilon})=E+M(\varepsilon_1t^{s_1},\dots,\varepsilon_nt^{s_n})$$

є зображенням групи G тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{j=0}^{|G|-1}s_{i+j}\ge l\ (i=1,\dots,n).$$

Доведення. Доведення наслідку безпосередньо випливає з тверджень 1 та 2. ◊

Наслідок 2. *Нехай* $G = \langle a \rangle$ *— циклічна* p*-група,* K *– комутативне локальне кільце головних ідеалів характеристики* p*, радикал якого* $R = tK$*,* t *– нільпотентний елемент степеня* $l > 1$*,* E *– одинична матриця порядку* $n <|G|$*,* $s_i \in N \cup \{0\}$ *і* $\varepsilon_i \in K^*$ $(i = 1,\dots,n)$*. Якщо* $\sum_{j=1}^{n} s_j \geq l$*, то відображення*

$$\Gamma_{\overline{w},\overline{\varepsilon}} : a \to \Gamma_{\overline{w},\overline{\varepsilon}}(a) = E + M(\overline{w},\overline{\varepsilon}) = E + M(\varepsilon_1 t^{s_1},\dots,\varepsilon_n t^{s_n}) \qquad (3)$$

є зображенням групи G.

Доведення. За твердженням 2, $M(\varepsilon_1 t^{s_1},\dots,\varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}})^n = 0$, бо

$$\sum_{j=0}^{n-1} s_{i+j} = \sum_{j=1}^{n} s_j \geq l \ (i = 1,\dots,n).$$

Тоді $0 = M(\varepsilon_1 t^{s_1},\dots,\varepsilon_n t^{s_n})^n = M(\varepsilon_1 t^{s_1},\dots,\varepsilon_n t^{s_n})^{|G|}$. За твердженням 1, відображення (3) є зображенням групи G. ◊

Число нерозкладних модулярних зображень з точністю до еквівалентності циклічних p**-груп над скінченним комутативним локальним кільцем**. Нехай K – скінченне комутативне локальне кільце головних ідеалів характеристики p, радикал якого $R = tK$, t – нільпотентний елемент степеня $l > 1$.

За наслідком 2 відображення

$$\Gamma_{\overline{w},\overline{\varepsilon}} : a \to \Gamma_{\overline{w},\overline{\varepsilon}}(a) = E + M(\overline{w},\overline{\varepsilon}) = E + M(\varepsilon_1 t^{s_1},\dots,\varepsilon_n t^{s_n}) \qquad (4)$$

є зображенням циклічної p-групи $G = \langle a \rangle$ порядку $|G| = m > 1$ над кільцем K характеристики p тоді і тільки тоді, коли $\sum_{j=0}^{m-1} s_{i+j} \geq l$ $(i = 1,\dots,n)$. Очевидно, два зображення вигляду (4) є еквівалентними над кільцем K тоді і тільки тоді, коли відповідні матриці $M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$ подібні над кільцем K. За наведеною теоремою останнє виконується тоді і тільки тоді, коли відповідні $\overline{w}$ циклічно еквівалентні, а добутки елементів відповідних $\overline{\varepsilon}$ рівні за модулем $\mathrm{Ann}(t^s)$, де s – найбільший член вагової довільної з циклічно еквівалентних послідовностей $\overline{w}$. Якщо послідовність $\overline{w}$ – неперіодична, то в [6] показано, що матриця $M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$, а отже, і зображення $\Gamma_{\overline{w},\overline{\varepsilon}}$ нерозкладні.

Таким чином, число зображень вигляду (4) якщо m є деяким степенем простої характеристики p кільця K, не менше за число $V(k,l,m,n)$ послідовностей $(s_1, s_2, \dots, s_n, \varepsilon)$, $s_i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$, $\sum_{j=0}^{m-1} s_{i+j} \geq l$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, таких, що ε належить множині оборотних представників всіх різних суміжних класів $K / Ann(t^s) = K / t^{l-s}K$ $(s = \max(s_1, s_2, \dots, s_n))$, $\overline{w} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ – неперіодична послідовність, найменша в лексикографічному порядку серед їй циклічно еквівалентних. (Для зручності знаходитимемо $V(k,l,m,n)$ і тоді, коли m не є степенем жодного простого числа).

Очевидно, $V(k,4,2,3)$ є числом послідовностей $(s_1, s_2, s_3, \varepsilon)$, де $s_i \in \{0,1,2,3\}$ $(i = 1, 2, 3)$, $s_1 + s_2 \geq 4$, $s_2 + s_3 \geq 4$, $s_3 + s_1 \geq 4$, ε належить множині оборотних представників всіх різних суміжних класів $K / Ann(t^s) = K / t^{4-s}K$ $(s = \max(s_1, s_2, s_3))$, $\overline{w} = (s_1, s_2, s_3)$ і містить принаймні два різні елементи. Якщо $\overline{w}$ найменша в лексикографічному порядку серед їй циклічно еквівалентних, то $s_1 = \min(s_1, s_2, s_3)$. Перебір таких послідовностей $(s_1, s_2, s_3, \varepsilon)$ разом з s та кількістю варіантів для ε дасть $(1,3,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$, $(2,2,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$, $(2,3,3,\varepsilon)$ -3- $(k-1)$. Таким чином, $V(k,4,2,3) = 3k-3$.

Модифікуємо код, що обчислює число $W(k,l,n)$ нерозкладних матриць $M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$ порядку $n>1$, які розглядаємо з точністю до подібності над скінченним комутативним локальним кільцем K головних ідеалів, радикал якого $R = tK$, t – нільпотентний елемент степеня $l>1$ характеристики p з порядком $k = |K / R|$ поля відношень кільця K. Приєднуємо до нього перевірку, чи послідовність $\overline{w} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $s_i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ задовольняє умову $\sum_{j=0}^{m-1} s_{i+j} \geq l$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $m > 1$).

При $l = 4$, $m = 2$, $n = 3$ число $V(k,4,2,3)$ можна обчислити, наприклад, такою серією команд системи GAP 4.8.7.

```
l:=4;m:=2;n:=3;maxlist:=[];matnumblist:=[];k:=Indeterminate(Integers,"k");
f:=List([1..n], x->0); # формуємо послідовність з n нулів
repeat
  # Перевірка на неперіодичність та умову зображення
  if not(ForAny([1..n-1],i->ForAll([1..n],j->f[j]=f[(j+i-1) mod n+1]))) then
  if ForAll([1..n],i->Sum(List([0..m-1],j->f[(j+i-1) mod n+1]))>=l) then
    Add(maxlist,Maximum(f)); fi;fi;
  # формуємо наступну послідовність з n-го декартового степеня множин
{0,1,..,l-1}
  for i in [1..n] do if f[i]=l-1 then f[i]:=0; else f[i]:=f[i]+1; break; fi; od;
until Sum(f)=0;
  # Рахуємо кількість класів ц. еквівалентних послідовностей з однаковими s
for s in [1..l-1] do Add(matnumblist, Number(maxlist,x->x=s)/n*(k-1)*k^(l-s-1)); od;
Print(Sum(matnumblist),"\n");
```

У результаті одержимо $V(k,4,2,3) = 3k-3$ ($W(k,4,3) = 2k^3 + 4k^2 + 6k - 12$).

Запуск коду за деяких значень n, m та при $l=2$, $l=3$, $l=4$ подано відповідно в табл. 1–3, де рискою відмічені значення, які повторюють вказані вище.

Таблиця 1

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$m=2$	0	0	0	0	0	0	0
$m=3$	—	$k-1$	$k-1$	$k-1$	$k-1$	$2k-2$	$2k-2$
$m=4$	$k-1$	—	$2k-2$	$3k-3$	$3k-3$	$6k-6$	$8k-8$
$m=5$	—	—	—	$5k-5$	$6k-6$	$10k-10$	$15k-15$
$m=6$	—	$2k-2$	—	—	$8k-8$	$14k-14$	$21k-21$
$m=7$	—	—	—	—	—	$17k-17$	$26k-26$
$m=8$	—	—	$3k-3$	—	—	—	$29k-29$
$m=9$	—	—	—	—	—	—	—
$m=10$	—	—	—	$6k-6$	—	—	—

Таблиця 2

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
$m=2$	$k-1$	$k-1$	$k-1$	$2k-2$	$2k-2$
$m=3$	—	$5k-5$	$7k-7$	$14k-14$	$27k-27$
$m=4$	$2k-2$	—	$k^2+13k-14$	$k^2+28k-29$	$k^2+61k-62$
$m=5$	—	k^2+4k-5	—	$3k^2+38k-41$	$3k^2+86k-89$
$m=6$	k^2+k-2	k^2+5k-6	—	—	$6k^2+100k-106$
$m=7$	—	—	$2k^2+12k-14$	—	—
$m=8$	—	—	$2k^2+13k-15$	$4k^2+37k-41$	—
$m=9$	—	$2k^2+4k-6$	—	$5k^2+36k-41$	—
$m=10$	—	—	—	$5k^2+37k-42$	$7k^2+99k-106$

Таблиця 3

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$m=2$	$2k-2$	$3k-3$	$5k-5$	$11k-11$
$m=3$	k^2+k-2	$3k^2+8k-11$	$3k^2+21k-24$	$5k^2+63k-68$
$m=4$	$2k^2+k-3$	—	$11k^2+30k-41$	$19k^2+104k-123$
$m=5$	—	$5k^2+6k-11$	—	$k^3+36k^2+118k-155$
$m=6$	—	$k^3+5k^2+6k-12$	$k^3+11k^2+29k-41$	—
$m=7$	—	—	$k^3+13k^2+27k-41$	$2k^3+35k^2+118k-155$
$m=8$	k^3+k^2+k-3	—	$2k^3+13k^2+27k-42$	$3k^3+36k^2+116k-155$
$m=9$	—	—	—	$3k^3+38k^2+114k-155$
$m=10$	—	—	—	$5k^3+37k^2+114k-156$

Система дає можливість також обчислювати громіздкі значення $V(k,l,m,n)$, які не наводимо в таблиці, наприклад,

$$V(k,7,6,8)=127k^5+4353k^4+30618k^3+118275k^2+347601k-500974.$$

Автор щиро вдячний професору В. М. Бондаренку за увагу до праці і цінні поради.

1. *Берман С. Д.* Представления конечных групп над произвольным полем и над кольцом целых чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1966. – 30, № 1. – С. 69–132.
2. *Берман С. Д.* Число неприводимых представлений конечной группы над произвольным полем // Докл. АН СССР. – 1956. – 106, № 5. – С. 767–769.
3. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1964. – 28, № 4. – С. 875–910.
4. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* О целочисленных представлениях конечных групп // Докл. АН СССР. – 1962. – 145, № 6. – С. 1199–1201.

5. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцом классов вычетов // Мат. сборник. – К.: Наук. думка, 1976. – С. 275–277.
6. *Бондаренко В. М., Бортош М. Ю.* Нерозкладні та ізоморфні об'єкти в категорії мономіальних матриць над локальним кільцем // Укр. мат. журн. – 2017. – 69, № 7. – С. 889–904.
7. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – 71. – С. 24–41.
8. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над квадратичными кольцами // Докл. АН СССР. – 1964. – 159, № 6. – С. 1210–1213.
9. *Гудивок П. М.* О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп // ДАН СССР. – 1974. – 214, № 5. – С. 993–996.
10. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над числовыми кольцами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – 31, № 4. – С. 799–834.
11. *Гудивок П. М.* Про обмеженість степенів нерозкладних модулярних зображень скінченних груп над кільцем головних ідеалів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 8. – С. 683–685.
12. *Гудивок П. М., Дроботенко В. С., Лихтман А. И.* О представлениях конечных групп над кольцом классов вычетов по модулю m // Укр. мат. журн. – 1964. – 16, № 1. – С. 82–89.
13. *Гудивок П. М., Погориляк В. И.* О неразложимых представлениях конечных p-групп над коммутативными локальными кольцами // Доп. НАН України. – 1996. – № 5. – С. 7–11.
14. *Гудивок П. М., Тилищак О. А.* Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1998. – Вип. 3. – С. 78–83.
15. *Гудивок П. М., Чухрай І. Б.* Про число нерозкладних матричних зображень даного степеня скінченної p-групи над комутативними локальними кільцями характеристики p^s // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. і інформ. – 2000. – Вип. 5. – С. 33–40.
16. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104–114.
17. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Примарные порядки с конечным числом неразложимых представлений кольцами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – 37, № 4. – С. 715–736.
18. *Дрозд Ю. А., Ройтер А. В.* Коммутативные кольца с конечным числом целочисленных неразложимых представлений // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – 31, № 4. – С. 783–798.
19. *Gudivok P. M., Chukhraj I. B.* On indecomposable matrix representations of the given degree of a finite p-group over commutative local ring of characteristic p^s // An. Ştiinţe Univ. «Ovidius» Constanţa, Ser. Mat. – 2000. – 8, № 2. – P. 27–36.
20. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integers. I. // Ann. Math. Second Ser. – 1962. – 76, № 1. – P. 73–92.
21. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integers. II. // Ann. Math. Second Ser. – 1963. – 77, № 2. – P. 318–328.
22. *Jacobinski H.* Sur les ordres commutatifs avec un nombre fini de réseaux indecomposables // Acta Math. – 1967. – 118. – P. 1–31.
23. *Jones A.* Groups with a finite number of indecomposable integral representations // Mich. Math. J. – 1963. – 10. – P. 257–261.
24. *Kneser M.* Einige Bemerkungen über ganzzahlige Darstellungen endlicher Gruppen // Arch. Math. – 1966. – 17. – P. 377–379.
25. *Roggenkamp K. W.* Classification of the completely primary totally ramified orders with a finite number of nonisomorphic indecomposable lattices // Bull. Am. Math. Soc. – 1972. – 78. – P. 399–401.
26. *Samuel O., Zariski P.* Commutative Algebra (Part I). – D. Van Nostrand Company, Canada, 1965. – 329 p.
27. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.10. – 2017. – http://www.gap-system.org.

28. *Witt E.* Die algebraische Struktur des Gruppenringes einer endlichen Gruppe über einem Zahlkörper // J. für Math. – 1952. – 190. – P. 231–245.

О ЧИСЛЕ НЕРАЗЛОЖИМЫХ МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ *p*-ГРУППЫ НАД КОНЧЕННЫМ ЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ

Найдено число неэквивалентных неразложимых представлений специального вида циклической p-группы над конечным коммутативным локальным кольцом конечной длины характеристики p.

ON NUMBER OF INDECOMPOSABLE MODULAR REPRESENTATIONS OF CYCLIC *p*-GROUP OVER FINITE LOCAL RING

It had been find the number of non-equivalent indecomposable representations of a special form of a cyclic p-group over a finite commutative local ring of finite length of characteristic p.

Київ. нац. ун-т
ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
08.10.18