УДК 512.552.13

А. В. Саган

КОЛИ $R(X)$ І $R\langle X\rangle$ Є ω-ЕВКЛІДОВИМИ ОБЛАСТЯМИ

Доведено, що область R є ω-евклідовою тоді і тільки тоді, коли $R\langle X\rangle$ є ω-евклідовою областю. Також, показано, що R є областю Безу тоді і тільки тоді, коли $R(X)$ є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Під R розумітимемо комутативну область з відмінною від нуля одиницею.

Нехай $\varphi : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ таке відображення, що $\varphi(a) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a = 0$; $\varphi(a) > 0$ – для довільного ненульового $a \in R$ і $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$ – для буль-яких $a, b \in R$. Це відображення називатимемо *нормою* області R.

Під *k-членним ланцюгом подільності* [1] для довільних елементів $a, b \in R, b \neq 0$, розумітимемо послідовність рівностей

$$a = bq_1 + r_1, b = r_1 q_2 + r_2, \ldots, r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k,$$

де $k \in \mathbb{N}$.

Область R називають *ω-евклідовою* [1] для норми φ, якщо для довільних елементів $a, b \in R, b \neq 0$, існує такий k-членний ланцюг подільності (1) для деякого k, що $\varphi(r_k) < \varphi(b)$.

Кільце R називають *кільцем з елементарною редукцією матриць* [11], якщо довільна матриця A над кільцем R *володіє елементарною редукцією*, тобто існують такі елементарні над R матриці P, Q відповідних розмірів, що

$$PAQ = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0),$$

де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq R\varepsilon_i \cap \varepsilon_i R$ для усіх $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Область R має *IP-властивість*, якщо довільна квадратна вироджена матриця розкладається в добуток ідемпотентних матриць. Область R називають *GE-кільцем*, якщо довільна квадратна оборотна матриця розкладається в добуток елементарних матриць. Кільце R називають *кільцем стабільного рангу 1* [10], якщо для таких довільних елементів $a, b \in R$, що $aR + bR = R$, існує такий елемент $t \in R$, що $(a + bt)R = R$.

Нехай $R[X]$ – кільце поліномів від змінної X, тоді для довільного $f \in R[X]$ позначимо через $c(f)$ ідеал з R, породжений коефіцієнтами полінома f. Розглянемо мультиплікативно замкнену підмножину $S = \{f \in R[X] \mid c(f) = R\}$. Тоді фактор-кільце $R(X) = R[X]_S$ називають Нагата кільцем. Також розглянемо іншу цікаву локалізацію $R[X]$ по мультиплікативно замкнененій підмножині $U = \{f \in R[X] \mid f - \textit{нормований}\}$. Позначимо таке фактор-кільце через $R[X]_U = R\langle X\rangle$.

Зауважимо, що S є насиченою мультиплікативно замкненою підмножиною $R[X]$. Внаслідок цього оборотні елементи з $R(X)$ зображають як частку $\frac{f}{g}$, де $c(f) = c(g) = R$. Множина U не є насиченою, оскільки одиниці $R\langle X\rangle$ мають складніший запис [5].

Виникає природне запитання, які властивості з R переносяться на $R(X)$ та $R\langle X\rangle$, і навпаки, які властивості з $R(X)$ та $R\langle X\rangle$ переносяться на R. Деякі автори в 1970-х і 1980-х роках досліджували питання про перенесення властивостей на ці кільця і навпаки. Також слід виокремити нові результати, передусім праці [6] і [7], де досліджували умови чистих і гаусових кілець.

Нижче вивчимо зв'язок умов подільності для довільних двох елементів над цими кільцями.

Теорема 1. Область R є ω-евклідовою тоді і тільки тоді, коли $R\langle X\rangle$ є ω-евклідовою областю.

Доведення. Нехай R – ω-евклідова область. Для доведення теореми введемо деякі додаткові позначення. Для комутативної області R позначимо множину $T=\{X^n+a_1X^{n+1}+\ldots+a_sX^{n+s}\mid a_1,\ldots,a_s\in R, s\geq 0\}$, а фактор-кільце $R[X]/T$ – через $R\{X\}$. Відображення $X\to X^{-1}$ індукує ізоморфізм між $R\{X\}$ і $R\langle X\rangle$. Зауважимо, що фактор-кільце $R\{X\}$ належить кільцю формальниих степеневих рядів Лорана, тобто $R\{X\}\subset R[[X,X^{-1}]]$. Для довільного $0\neq f\in R[[X,X^{-1}]]$ визначимо функцію ϕ за правилом, що $\phi(f)$ дорівнює коефіцієнту біля змінної з найменшим степенем. Тому досить показати, що R є ω-евклідовою тоді і тільки тоді, коли $R\{X\}$ є ω-евклідовим кільцем. Припустимо, що R – ω-евклідова область для норми φ. Для $f\in R[[X,X^{-1}]]$ визначимо $\varphi'(f)=\varphi(\phi(f))$. Тоді, згідно з теоремою 1 [9], $R[[X,X^{-1}]]$ є ω-евклідовою областю відносно норми φ'.

Нехай $f,g\in R\{X\}$, де $g\neq 0$. З теореми 1 [9] маємо, що $f=gq_1+r_1$, $g=r_1q_2+r_2,\ldots,r_{k-2}=r_{k-1}q_k+r_k$, де $q_i,r_i\in R\{X\}$ і $\varphi'(r_k)<\varphi'(g)$ або на деякому j-му кроці $r_{j-1}=r_ju$, де $u\in R[[X,X^{-1}]]$. Тоді $u=\dfrac{r_{j-1}}{r_j}\in K(X)\cap R[[X,X^{-1}]]$, де K – поле часток R. Оскільки R є областю Безу, а отже, повністю цілозамкненою, то з наслідку 5.5 праці [4] маємо $K(X)\cap R[[X,X^{-1}]]=R\{X\}$. Таким чином, $r_{j-1}=r_j\left(\dfrac{r_{j-1}}{r_j}\right)$, де $\dfrac{r_{j-1}}{r_j}\in R\{X\}$.

Навпаки, припустимо, що $R\{X\}$ є ω-евклідовою областю з нормою φ. Для $r\in R$ визначимо $\chi(r)=\min\{\varphi(f)\mid f\in R\{X\},\phi(f)\in Rr\}$. Перемодифікувавши доведення теореми 2 з [9], отримаємо, що χ є нормою над R і R – ω-евклідова область.

Теорему доведено.

Як наслідок з попередньої теореми і теореми 1 з праці [3] вірний такий результат.

Теорема 2. Нехай R – комутативна область Безу і $\dim R=1$. Тоді

1) R є GE-кільцем тоді і тільки тоді, коли $R\langle X\rangle$ є GE-кільцем;

2) R має IP-властивість тоді і тільки тоді, коли $R\langle X\rangle$ має IP-властивість.

Для Нагата кілець вірний такий результат.

Теорема 3. R – область цілісності. Тоді подальші твердження еквівалентні:

1) R – область Безу;

2) R – ω-евклідова область;

3) R – кільце з елементарною редукцією матриць.

Доведення. Спочатку доведемо включення з 1) в 3). Отже, нехай

R – комутативна область Безу, тоді за теоремою 3.1 з праці [2] $R(X)$ – комутативна область Безу. Тепер покажемо, що кільце $R(X)$ має стабільний ранг один. Припустимо, що $\left(\frac{f}{m}, \frac{g}{n}\right) = R(X)$, де $f, g, m, n \in R[X]$, $\deg f = s$ і $c(m) = c(n) = R$. Тоді $R(X) = (fn, gm)$, де $R(X) = c(fn)R(X) + c(gm)R(X) = c(fn + gmX^{s+1})R(X)$. Звідси $c(fn + gmX^{s+1}) = R$, а отже, $fn + gmX^{s+1}$ є оборотним в $R(X)$. Тоді легко переконатися, що $\frac{f}{m} + \left(\frac{g}{n}\right)X^{s+1} = \frac{1}{mn}(fn + gmX^{s+1})$ є оборотним елементом $R(X)$. Отже, $R(X)$ є кільцем стабільного рангу один. Тоді за теоремою 1 з праці [8] кільце $R(X)$ є кільцем з елементарною редукцією матриць. Імплікація з 3) в 2) очевидна.

Доведемо включення з 2) в 1). Оскільки ω-евклідова область є областю Безу, тоді $R(X)$ є комутативним кільцем Безу і за теоремою 3.1 з праці [2] R – комутативне кільце Безу.

Теорему доведено.

1. *Забавський Б. В., Романів О. М.* Некомутативні кільця з елементарною редукцією матриць // Вісник Львів. ун-ту. – 1998. – 49. – P. 16–20.
2. *Anderson D. D., Anderson D. F., Markanda R.* The rings R and $R\langle X\rangle$ // J. Algebra. – 1985. – 95. – P. 96–115.
3. *Brewer J. W., Costa D. L.* Projective modules over some non-Noetherian polynomial rings // J. Pure Appl. Alg. – 1978. –13. – P. 157–163.
4. *Brewer Cahen P. J., Chabert J. L.* Elements quasi-entier et extensions de Fatou // J. Algebra. – 1975. –36. – P. 185–192.
5. *Huckaba J.* Commutative rings with zero divisors. – Marcel Dekker New York., 1988. – 216 p.
6. *McGovern W. Wm., Richman F.* When $R(X)$ and $R\langle X\rangle$ are clean: a constructive treatment // Comm. Alg. – 2015. – 43. – P. 3389–3394.
7. *McGovern W. Wm., Sharma M.* Gaussian properties of the rings $R(X)$ and $R\langle X\rangle$ // Comm. Alg. – 2016. – 44. – P. 1636–1646.
8. *Romaniv O. M.* Elementary reduction of matrices over Bezout ring with stable range 1 // Mat. Stud. – 2012. – 37. – P. 132–135.
9. *Romaniv O. M., Sagan A. V.* ω-euclidean domain and Laurent series // Carpathian Math. Publ. – 2016. – 8. – P. 158–162.
10. *Vaserstein L. N.* Bass's first stable range condition // J. of Pure and Appl. Alg. – 1984. –34. – P. 319–330.
11. *Zabavsky B.V.* Rings with elementary reduction matrix // Ring Theory Conf., Miskolc, July 1996. – P. 15–20.

КОГДА $R(X)$ И $R\langle X\rangle$ ЕСТЬ ω-ЭВКЛИДОВЫМИ ОБЛАСТЯМИ

Доказано, что область R является ω-эвклидовой тогда и только тогда, когда $R\langle X\rangle$ является ω-эвклидовой областью. Также показано, что R является областью Безу тогда и только тогда, когда $R(X)$ является кольцом с элементарной редукцией матриц.

WHEN $R(X)$ AND $R\langle X\rangle$ IS ω-EUCLIDEAN DOMAIN

In this paper it is proved that a domain R is ω-Euclidean if and only if $R\langle X\rangle$ is ω-Euclidean domain. Also, we show that R is a Bezout domain if and only if $R(X)$ is a ring of elementary reduction matrices.

Львів. нац. ун-т
ім. Івана Франка, Львів

Одержано
21.09.18