

## АЛГОРИТМИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ

*Запропоновано паралельні ітераційні методи декомпозиції області для розв'язування осесиметричної задачі про контакт пружних тіл. Визначено умови слабкої збіжності цих методів. Зі застосуванням скінченноелементних апроксимацій розроблені методи апробовано для дослідження контактної взаємодії двох пружних тіл обертання, одне з яких має поодинокі дискретне циліндричне пружне покриття. Вивчено вплив висоти та жорсткості покриття на контактні та міжфазні напруження.*

**Ключові слова:** осесиметричні контактні задачі, пружні покриття, варіаційні рівняння, нелінійні варіаційні рівняння, методи декомпозиції області, метод скінченних елементів.

**Вступ.** Підвищення вимог до надійності елементів і вузлів сучасної техніки, на функціонування яких впливають контактні деформації, зумовило інтенсивні дослідження контактної взаємодії тіл з якнайповнішим урахуванням їх поверхневих властивостей, зокрема неоднорідностей у вигляді нерівностей та тонких покриттів, які виникають внаслідок різних технологій оброблення поверхонь та під час експлуатації.

Тонкі пружні покриття використовують для підвищення міцності та несучої здатності деталей, захисту від агресивних середовищ, високих температур, негативного впливу частинок зношування, антифрикційного та протидарного захисту, зменшення концентрації напружень в основному тілі.

Короткий огляд досліджень контактних задач для тіл з тонкими покриттями наведено у праці [8] та у цитованих там публікаціях.

В останні роки все більшого поширення набувають тонкі пружні та пластичні покриття дискретної структури. Їх застосовують для збільшення зносо- та тріщиностійкості, адгезійної і когезійної міцності покриття, порога настання пластичних деформацій, зменшення залишкових напружень у системі покриття – основа, утримання твердих частинок зношування і абразивних частинок. Також під час їх нанесення вдається зекономити матеріал та енергозатрати.

Аналіз напружено-деформованого стану дво- і тривимірних пружних тіл з тонкими дискретними покриттями без урахування можливої контактної взаємодії з іншими тілами виконано у працях [5–7, 18]. Контактну взаємодію між тілами з дискретними покриттями та жорсткими штампами досліджено у публікаціях [23, 24, 29].

Актуальною залишається проблема вивчення контактної взаємодії багатьох пружних тіл між собою за наявності тонких дискретних покриттів різної форми та поверхневих неоднорідностей у вигляді макро- і мікронерівностей.

Ефективними для дослідження контакту багатьох тіл є методи декомпозиції області (МДО), які зводять розв'язування задач про напружено-деформований стан системи тіл з умовами неідеального контакту між ними до розв'язування послідовності простіших задач у окремих тілах (підобластях). Це дає можливість використовувати найбільш оптимальні математичні моделі та методи для окремих тіл та розпаралелювати обчислення. Результати досліджень, які стосуються розробки та застосування різних алгоритмів МДО для розв'язування контактних задач теорії пружності, наведено у працях [19–21, 25].

---

✉ [ihor84@gmail.com](mailto:ihor84@gmail.com)

У публікаціях [12–17, 22, 28] запропоновано ряд паралельних алгоритмів декомпозиції області типу Робіна для розв’язування задач про контакт багатьох лінійно та нелінійно пружних тіл. У працях [8, 10, 11, 27] ці методи узагальнено для задач про контакт тіл за можливої наявності нелінійних вінклерівських шарів, а в праці [9] – для термомеханічної контактної задачі. Ці МДО ґрунтуються на методі штрафу для варіаційних нерівностей та нестационарних одно- і двоточкових ітераційних методах для нелінійних варіаційних рівнянь або їх систем у гільбертовому просторі.

У цій статті на основі результатів праць [12–17, 22, 28] розроблено алгоритми декомпозиції області типу Робіна для розв’язування осесиметричної задачі про контакт трьох пружних тіл обертання, перше з яких взаємодіє з другим внаслідок одностороннього контакту, а друге – з третім завдяки ідеальному механічному контакту. Встановлено умови слабкої збіжності цих методів, а також існування і єдиності слабого розв’язку осесиметричної контактної задачі.

За допомогою отриманих методів декомпозиції області та скінченноелементних апроксимацій досліджено задачу про односторонній контакт двох пружних осесиметричних об’єктів, один з яких має поодиноким розташоване дискретне циліндричне пружне покриття. Проаналізовано контактні та міжфазні напруження для різних пружних і геометричних характеристик поодиноким дискретного покриття.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо задачу про контакт трьох пружних тіл обертання  $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3 \subset \mathbb{R}^3$ . Введемо циліндричну систему координат  $(r, \varphi, z)$ , вісь  $z$  якої збігається з віссю обертання. Вважаємо, що між тілами  $\Omega'_1$  та  $\Omega'_2$  у площині, перпендикулярній до осі  $z$ , відбувається односторонній контакт без тертя, а між тілами  $\Omega'_2$  та  $\Omega'_3$  – ідеальний механічний контакт. Уведемо області  $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , які є меридіальними перетинами тіл  $\Omega'_\alpha \subset \mathbb{R}^3$  (рис. 1). Позначимо  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ . Вважаємо, що області  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , є обмеженими та мають ліпшецеві межі  $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ .

Вважатимемо, що напружено-деформований стан тіл  $\Omega'_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , є осесиметричним, тобто розподіли переміщень, деформацій і напружень не залежать від координати  $\varphi$ . Позначимо через  $u_{\alpha r}(\mathbf{x})$ ,  $u_{\alpha z}(\mathbf{x})$ ,  $\varepsilon_{\alpha rr}(\mathbf{x})$ ,  $\varepsilon_{\alpha zz}(\mathbf{x})$ ,  $\varepsilon_{\alpha \varphi\varphi}(\mathbf{x})$ ,  $\varepsilon_{\alpha rz}(\mathbf{x})$ ,  $\sigma_{\alpha rr}(\mathbf{x})$ ,  $\sigma_{\alpha zz}(\mathbf{x})$ ,  $\sigma_{\alpha \varphi\varphi}(\mathbf{x})$ ,  $\sigma_{\alpha rz}(\mathbf{x})$  відповідно компоненти

вектора переміщень  $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x})$ , тензорів деформацій  $\hat{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x})$  і напружень  $\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})$  у точці  $\mathbf{x} = (r, z)^\top$  області  $\Omega_\alpha$ . Ці величини задовольняють рівняння рівноваги, закон Гука та співвідношення Коші:

$$\frac{\partial(r\sigma_{\alpha rr}(\mathbf{x}))}{\partial r} + r \frac{\partial\sigma_{\alpha rz}(\mathbf{x})}{\partial z} - \sigma_{\alpha \varphi\varphi}(\mathbf{x}) + f_{\alpha r}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(r\sigma_{\alpha rz}(\mathbf{x}))}{\partial r} + r \frac{\partial\sigma_{\alpha zz}(\mathbf{x})}{\partial z} + f_{\alpha z}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (2)$$

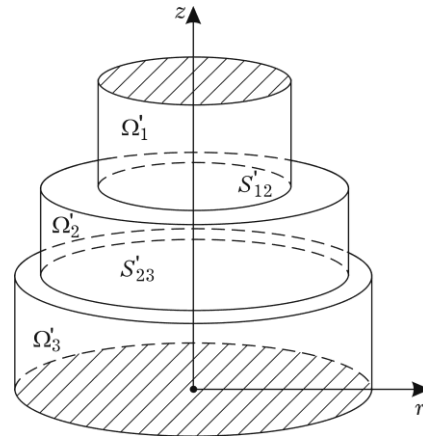


Рис. 1

$$\sigma_{\alpha rr}(\mathbf{x}) = \lambda_{\alpha}(\mathbf{x}) \Theta_{\alpha}(\mathbf{x}) + 2\mu_{\alpha}(\mathbf{x}) \varepsilon_{\alpha rr}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3)$$

$$\sigma_{\alpha zz}(\mathbf{x}) = \lambda_{\alpha}(\mathbf{x}) \Theta_{\alpha}(\mathbf{x}) + 2\mu_{\alpha}(\mathbf{x}) \varepsilon_{\alpha zz}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (4)$$

$$\sigma_{\alpha \varphi\varphi}(\mathbf{x}) = \lambda_{\alpha}(\mathbf{x}) \Theta_{\alpha}(\mathbf{x}) + 2\mu_{\alpha}(\mathbf{x}) \varepsilon_{\alpha \varphi\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (5)$$

$$\sigma_{\alpha rz}(\mathbf{x}) = 2\mu_{\alpha}(\mathbf{x}) \varepsilon_{\alpha rz}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{\alpha rr}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_{\alpha r}(\mathbf{x})}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha zz}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_{\alpha z}(\mathbf{x})}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{\alpha \varphi\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{u_{\alpha r}(\mathbf{x})}{r}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{\alpha rz}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\alpha r}(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial u_{\alpha z}(\mathbf{x})}{\partial r} \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (8)$$

де  $f_{\alpha r}(\mathbf{x})$ ,  $f_{\alpha z}(\mathbf{x})$  – компоненти вектора об'ємних сил  $\mathbf{f}_{\alpha}(\mathbf{x})$ ,  $\Theta_{\alpha}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha rr}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha zz}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha \varphi\varphi}(\mathbf{x})$  – об'ємна деформація, а  $\lambda_{\alpha}(\mathbf{x})$ ,  $\mu_{\alpha}(\mathbf{x})$  – параметри Ляме, що володіють властивістю

$$(\forall \alpha = 1, 2, 3)(\forall \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}) \{0 < \lambda_{\alpha}(\mathbf{x}) < \infty, 0 < \mu_{\alpha}(\mathbf{x}) < \infty\}. \quad (9)$$

На межі  $\Gamma_{\alpha} = \partial\Omega_{\alpha}$  кожної із областей  $\Omega_{\alpha}$  уведемо локальний ортонормований базис  $\boldsymbol{\tau}_{\alpha}, \mathbf{n}_{\alpha}$ , де  $\boldsymbol{\tau}_{\alpha}$  – одинична дотична, а  $\mathbf{n}_{\alpha}$  – одинична зовнішня нормаль. Вектори переміщень і напружень на  $\Gamma_{\alpha}$  у цьому базисі запишемо так:

$$\mathbf{u}_{\alpha} = u_{\alpha\tau} \boldsymbol{\tau}_{\alpha} + u_{\alpha n} \mathbf{n}_{\alpha}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha} = \sigma_{\alpha\tau} \boldsymbol{\tau}_{\alpha} + \sigma_{\alpha n} \mathbf{n}_{\alpha}.$$

Припустимо, що межі  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_3$  складаються з трьох частин, які не перетинаються:  $\Gamma_1 = \Gamma_1^u \cup \Gamma_1^{\sigma} \cup S_{12}$ ,  $\Gamma_3 = \Gamma_3^u \cup \Gamma_3^{\sigma} \cup S_{32}$ ,  $\Gamma_1^u, \Gamma_3^u, S_{12}, S_{32} \neq \emptyset$ , а межа  $\Gamma_2$  – з чотирьох, що не перетинаються:  $\Gamma_2 = \Gamma_2^u \cup \Gamma_2^{\sigma} \cup S_{21} \cup S_{23}$ ,  $\Gamma_2^u, S_{21}, S_{23} \neq \emptyset$ . На частинах  $\Gamma_{\alpha}^u$  меж  $\Gamma_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , задано кінематичні крайові умови, які для спрощення варіаційних формулювань вважаємо нульовими, а на частинах  $\Gamma_{\alpha}^{\sigma}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , – статичні крайові умови:

$$\mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\alpha}^u, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{\alpha}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\alpha}^{\sigma}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (10)$$

де  $\mathbf{p}_{\alpha} = p_{\alpha\tau} \boldsymbol{\tau}_{\alpha} + p_{\alpha n} \mathbf{n}_{\alpha}$  – задані навантаження.

Межа  $S_{12} \subset \Gamma_1$  – зона можливого контакту області  $\Omega_1$  з областю  $\Omega_2$ , а  $S_{21} \subset \Gamma_2$  – зона можливого контакту області  $\Omega_2$  з областю  $\Omega_1$ . Вважаємо, що межі  $S_{12}$  і  $S_{21}$  достатньо близькі ( $S_{12} \approx S_{21}$ ) [2], тому приймаємо, що їхні зовнішні нормалі відрізняються лише знаком:  $\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_2(\mathbf{x}')$ , де  $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{21}$  – проекція точки  $\mathbf{x} \in S_{12}$  на межу  $S_{21}$ . Відстань по нормалі між областями  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$  до деформації позначимо  $d_n(\mathbf{x}) = \pm \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \pm \sqrt{(r - r')^2 + (z - z')^2}$ , де знак « $\pm$ » залежить від формулювання конкретної задачі.

На межах  $S_{12}$  і  $S_{21}$  задано умови одностороннього контакту без тертя:

$$\sigma_{1\tau}(\mathbf{x}) = \sigma_{2\tau}(\mathbf{x}') = 0, \quad \sigma_{1n}(\mathbf{x}) = \sigma_{2n}(\mathbf{x}') \leq 0, \quad (11)$$

$$u_{1n}(\mathbf{x}) + u_{2n}(\mathbf{x}') \leq d_n(\mathbf{x}), \quad (12)$$

$$[u_{1n}(\mathbf{x}) + u_{2n}(\mathbf{x}') - d_n(\mathbf{x})] \sigma_{1n}(\mathbf{x}) = 0, \quad (13)$$

де  $\mathbf{x} \in S_{12}$ ,  $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{21}$ .

На спільній межі  $S_{23} = S_{32}$  областей  $\Omega_2$  і  $\Omega_3$  виконуються умови ідеального механічного контакту:

$$u_{2\tau}(\mathbf{x}) = -u_{3\tau}(\mathbf{x}), \quad u_{2n}(\mathbf{x}) = -u_{3n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_{23}, \quad (14)$$

$$\sigma_{2\tau}(\mathbf{x}) = \sigma_{3\tau}(\mathbf{x}), \quad \sigma_{2n}(\mathbf{x}) = \sigma_{3n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_{23}. \quad (15)$$

Зазначимо, що контактна задача (1)–(8), (10)–(15) є нелінійною, оскільки фактична зона контакту між областями  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  наперед невідома.

**2. Варіаційні формулювання.** Для кожної із областей  $\Omega_\alpha$  розглянемо простори Соболева  $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^2$  та введемо в них замкнуті підпростори  $V_\alpha^0 = \{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u\}$  зі скалярним добутком  $(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0} = \int_{\Omega_\alpha} \left( u_{\alpha r} v_{\alpha r} + u_{\alpha z} v_{\alpha z} + \frac{\partial u_{\alpha r}}{\partial r} \frac{\partial v_{\alpha r}}{\partial r} + \frac{\partial u_{\alpha r}}{\partial z} \frac{\partial v_{\alpha r}}{\partial z} + \frac{\partial u_{\alpha z}}{\partial r} \frac{\partial v_{\alpha z}}{\partial r} + \frac{\partial u_{\alpha z}}{\partial z} \frac{\partial v_{\alpha z}}{\partial z} \right) d\Omega$  і нормою  $\|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha^0} = \sqrt{(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)_{V_\alpha^0}}$ .

Значення елементів просторів  $V_\alpha$  і  $V_\alpha^0$  на частинах межі області  $\Omega_\alpha$  розумітимемо у сенсі слідів [4] та для простоти позначатимемо їх тими ж символами.

Розглянемо рефлексивний банаховий простір  $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 \times V_3^0$ , який є прямим добутком просторів  $V_\alpha^0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . У просторі  $V_0$  означимо скалярний добуток  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^3 (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0}$  і норму  $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$ . Крім цього, введемо у просторі  $V_0$  опуклу замкнуту множину кінематично допустимих переміщень:

$$K = \{\mathbf{u} \in V_0 : u_{1n} + u_{2n} \leq d_n \text{ на } S_{12}, u_{2\tau} + u_{3\tau} = 0, u_{2n} + u_{3n} = 0 \text{ на } S_{23}\}, \quad (16)$$

де  $u_{\alpha n} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$ ,  $u_{\alpha\tau} = \boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$ ,  $d_n \in H_{00}^{1/2}(\Xi_1)$ ,  $\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u$ .

У цьому просторі визначимо таку білінійну форму  $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , що  $A(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  відповідає сумарній енергії пружної деформації тіл

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \\ a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \sigma_{\alpha rr}(\mathbf{u}_\alpha) \varepsilon_{\alpha rr}(\mathbf{v}_\alpha) d\Omega + \int [\sigma_{\alpha zz}(\mathbf{u}_\alpha) \varepsilon_{\alpha zz}(\mathbf{v}_\alpha) + \sigma_{\alpha \varphi\varphi}(\mathbf{u}_\alpha) \varepsilon_{\alpha \varphi\varphi}(\mathbf{v}_\alpha) + 2\sigma_{\alpha rz}(\mathbf{u}_\alpha) \varepsilon_{\alpha rz}(\mathbf{v}_\alpha)] d\Omega, \quad (17)$$

та лінійну форму  $L(\mathbf{u})$ , що дорівнює роботі заданих зовнішніх сил:

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^3 \ell_\alpha(\mathbf{u}_\alpha), \quad \mathbf{u} \in V_0, \\ \ell_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha d\Omega + \int_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha dS, \quad (18)$$

де  $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^2$ ,  $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^2$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ .

**Лема 1.** Нехай межі  $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$  областей  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , є ліпшицевими,  $\Gamma_\alpha^u \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^2$ ,  $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^2$ ,  $\lambda_\alpha, \mu_\alpha \in L_\infty(\Omega_\alpha)$  та виконується умова (9). Тоді білінійна форма  $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  – симетрична, неперервна з константою  $M_A > 0$  та коерцитивна з константою  $B_A > 0$  у просторі  $V_0$ , а лінійна форма  $L(\mathbf{v})$  – неперервна.

Застосовуючи результати праць [1–3], довели такі дві теореми.

**Теорема 1.** Вихідна контактна задача (1)–(8), (10)–(15) у слабкому розумінні еквівалентна задачі мінімізації на опуклій замкнутій множині  $K \subsetneq V_0$  квадратичного функціонала:

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in K}. \quad (19)$$

**Теорема 2.** Нехай виконуються умови лемми 1 та  $d_n \in H_{00}^{1/2}(\Xi_1)$ . Тоді задача (19) має єдиний розв'язок та її розв'язання еквівалентне розв'язанню на множині  $K$  варіаційної нерівності

$$F'(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in K, \mathbf{u} \in K. \quad (20)$$

Для зведення задачі мінімізації (19) на опуклій замкнутій множині  $K$  до задачі безумовної мінімізації у вихідному просторі  $V_0$  застосуємо метод штрафу [4, 26]. Уведемо штраф у формі

$$J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \int_{S_{12}} [(d_n - u_{1n} - u_{2n})^-]^2 dS + \frac{1}{2\theta} \int_{S_{23}} [(u_{2\tau} + u_{3\tau})^2 + (u_{2n} + u_{3n})^2] dS, \quad \mathbf{u} \in V_0, \quad (21)$$

де  $\theta > 0$  – параметр штрафу,  $y^- = \min\{0, y\}$ , та розглянемо задачу мінімізації функціонала зі штрафом у просторі  $V_0$ :

$$F_\theta(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in V_0}. \quad (22)$$

Штрафний доданок  $J_\theta(\mathbf{u})$  – невід'ємний та диференційовний за Гато. Його диференціал Гато має вигляд

$$J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} (d_n - u_{1n} - u_{2n})^- (v_{1n} + v_{2n}) dS + \frac{1}{\theta} \int_{S_{23}} [(u_{2\tau} + u_{3\tau})(v_{2\tau} + v_{3\tau}) + (u_{2n} + u_{3n})(v_{2n} + v_{3n})] dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0. \quad (23)$$

Тут величини  $\sigma_{12n} = (d_n - u_{1n} - u_{2n})^- / \theta$ ,  $\sigma_{23\tau} = -(u_{2\tau} + u_{3\tau}) / \theta$ ,  $\sigma_{23n} = -(u_{2n} + u_{3n}) / \theta$  мають сенс контактних напружень. Диференціал Гато  $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  лінійний за  $\mathbf{v}$  та нелінійний за  $\mathbf{u}$ .

На основі праць [14, 22] довели лему.

**Лема 2.** Нехай межі  $S_{12}$  і  $S_{23}$  є ліпшицевими та  $d_n \in H_{00}^{1/2}(\Xi_1)$ . Тоді функціонал  $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  володіє властивостями

$$(\forall \mathbf{u} \in V_0)(\exists R_J > 0)(\forall \mathbf{v} \in V_0)\{|J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq R_J \|\mathbf{v}\|_{V_0}\}, \quad (24)$$

$$(\exists D_J > 0)(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_0)\{|J'_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq D_J \|\mathbf{v}\|_{V_0} \|\mathbf{w}\|_{V_0}\}, \quad (25)$$

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \{J'_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0\} . \quad (26)$$

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови лем 1 і 2. Тоді задача (22) має єдиний розв'язок та її розв'язання еквівалентне розв'язанню в просторі  $V_0$  нелінійного за  $\mathbf{u}$  варіаційного рівняння*

$$F'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \mathbf{u} \in V_0. \quad (27)$$

Крім цього, якщо  $\bar{\mathbf{u}}_\theta \in V_0$  – розв'язок задачі (22) (варіаційного рівняння (27)) для  $\theta > 0$ , а  $\bar{\mathbf{u}} \in K$  – розв'язок задачі (19) (варіаційної нерівності (20)), то  $\bar{\mathbf{u}}_\theta$  збігається сильно в просторі  $V_0$  до  $\bar{\mathbf{u}}$  при  $\theta \rightarrow 0$ , тобто  $\|\bar{\mathbf{u}}_\theta - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$ .

Доведення цієї теореми здійснюється подібно, як і теореми 2 і 3 у [22].

Отже, застосовуючи метод штрафу, розв'язування варіаційної нерівності (20) на опуклій множині  $K$  звели до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (27) у просторі  $V_0$ , залежного від параметра штрафу  $\theta$ .

Це варіаційне рівняння недиференційовне, оскільки доданок  $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  не є диференційовним за Гато.

**3. Методи декомпозиції області.** Застосуємо до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (27), яке відповідає контактній задачі (1)–(8), (10)–(15), неявний нестационарний ітераційний метод з параметрами

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma^k [A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})] \\ \forall \mathbf{v} \in V_0, k = 0, 1, \dots, \quad (28)$$

де  $G^k : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ , – деякі білінійні форми, задані у просторі  $V_0$ ,  $\gamma^k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , – ітераційні параметри,  $\mathbf{u}^k \in V_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , –  $k$ -ті наближення до точного розв'язку рівняння (27), а  $\mathbf{u}^0 \in V_0$  – початкове наближення.

У загальному вигляді ітераційний метод (28), застосований до розв'язування варіаційного рівняння (27), не призводить до декомпозиції задачі за підобластями. Тому опишемо такі його варіанти, які на кожному ітераційному кроці реалізують таку декомпозицію, тобто які зводять розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (27) у всій області  $\Omega$  до розв'язування послідовності лінійних варіаційних рівнянь в окремих підобластях  $\Omega_\alpha$ . Декомпозиції можна досягти певним вибором білінійних форм  $G^k$  в ітераційному процесі (28).

Виберемо білінійні форми  $G^k$  у методі (28) так:

$$G^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \partial^2 F_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (29)$$

$$\partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \chi_{12}^k [u_{1n} + u_{2n}] [v_{1n} + v_{2n}] dS + \\ + \frac{1}{\theta} \int_{S_{23}} [u_{2\tau} + u_{3\tau}] [v_{2\tau} + v_{3\tau}] dS + \frac{1}{\theta} \int_{S_{23}} [u_{2n} + u_{3n}] [v_{2n} + v_{3n}] dS, \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \chi_{12}^k = -[\text{sgn}(d_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k)]^-, \quad (30)$$

де  $\partial^2 F_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  і  $\partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  – другі субдиференціали Гато функціоналів  $F_\theta$  і  $J_\theta$  у точці  $\mathbf{u}^k \in V_0$  за напрямками  $\mathbf{u} \in V_0$  і  $\mathbf{v} \in V_0$ .

Ітераційний метод (28) з білінійними формами (29) при  $\gamma^k = 1$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , відповідає неявному напівгладкому методу Ньютона для розв'я-

зування нелінійного варіаційного рівняння (27). Проте нестационарний ітераційний метод (28), (29) не призводить до декомпозиції задачі за підобластями.

Тепер білінійні форми  $G^k$  у методі (28) виберемо так:

$$G^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (31)$$

де  $X^k : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$  – білінійні форми

$$\begin{aligned} X^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}^k} (u_{1n}v_{1n} + u_{2n}v_{2n}) dS + \\ &+ \frac{1}{\theta} \int_{S_{23}^k} (u_{2\tau}v_{2\tau} + u_{2n}v_{2n} + u_{3\tau}v_{3\tau} + u_{3n}v_{3n}) dS = \\ &= \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \psi_{12}^k (u_{1n}v_{1n} + u_{2n}v_{2n}) dS + \\ &+ \frac{1}{\theta} \int_{S_{23}} \psi_{23}^k (u_{2\tau}v_{2\tau} + u_{2n}v_{2n} + u_{3\tau}v_{3\tau} + u_{3n}v_{3n}) dS. \end{aligned} \quad (32)$$

Тут  $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , – деякі задані підмножини меж  $S_{\alpha\beta}$ ,  $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}, \{2, 3\}$ , а  $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus S_{\alpha\beta}^k\} \vee \{1, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}^k\}$  – характеристичні функції, які визначають ці підмножини. Зокрема, функції  $\psi_{\alpha\beta}^k$  можна задати, як у напівгладкому методі Ньютонa, тобто у вигляді

$$\psi_{12}^k = \chi_{12}^k = \chi_{12}(\mathbf{u}^k) = -[\text{sgn}(d_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k)]^-, \quad \psi_{23}^k \equiv 1. \quad (33)$$

Покажемо, що такий вибір форм  $G^k$  зумовлює декомпозицію за підобластями. Увівши позначення  $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = [\mathbf{u}^{k+1} - (1 - \gamma^k)\mathbf{u}^k] / \gamma^k$ , запишемо ітераційний метод (28) з білінійними формами (31) в еквівалентному вигляді:

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) + X^k(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - J'_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad (34)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1 - \gamma^k)\mathbf{u}^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (35)$$

Оскільки величини, які є спільними для підобластей, відомі з попередньої ітерації, то варіаційне рівняння (34) розпадається на три незалежні варіаційні рівняння у підобластях  $\Omega_\alpha$ , і метод (34), (35) еквівалентний такому ітераційному методу:

$$\begin{aligned} a_1(\tilde{\mathbf{u}}_1^{k+1}, \mathbf{v}_1) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \psi_{12}^k \tilde{u}_{1n}^{k+1} v_{1n} dS &= \ell_1(\mathbf{v}_1) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \psi_{12}^k u_{1n}^k v_{1n} dS + \\ &+ \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} (d_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k)^- v_{1n} dS \quad \forall \mathbf{v}_1 \in V_1^0, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} a_2(\tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1}, \mathbf{v}_2) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} \psi_{12}^k \tilde{u}_{2n}^{k+1} v_{2n} dS + \frac{1}{\theta} \int_{S_{23}} \psi_{23}^k (\tilde{u}_{2\tau}^{k+1} v_{2\tau} + \tilde{u}_{2n}^{k+1} v_{2n}) dS &= \\ = \ell_2(\mathbf{v}_2) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} \psi_{12}^k u_{2n}^k v_{2n} dS + \frac{1}{\theta} \int_{S_{23}} \psi_{23}^k (u_{2\tau}^k v_{2\tau} + & \\ + u_{2n}^k v_{2n}) dS + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} (d_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k)^- v_{2n} dS - & \\ - \frac{1}{\theta} \int_{S_{23}} [(u_{2\tau}^k + u_{3\tau}^k) v_{2\tau} + (u_{2n}^k + u_{3n}^k) v_{2n}] dS \quad \forall \mathbf{v}_2 \in V_2^0, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
& a_3(\tilde{\mathbf{u}}_3^{k+1}, \mathbf{v}_3) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{32}} \psi_{23}^k(\tilde{u}_{3\tau}^{k+1} v_{3\tau} + \tilde{u}_{3n}^{k+1} v_{3n}) dS = \\
& = \ell_3(\mathbf{v}_3) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{32}} \psi_{23}^k(u_{3\tau}^k v_{3\tau} + u_{3n}^k v_{3n}) dS - \\
& - \frac{1}{\theta} \int_{S_{32}} [(u_{2\tau}^k + u_{3\tau}^k) v_{3\tau} + (u_{2n}^k + u_{3n}^k) v_{3n}] dS \quad \forall \mathbf{v}_3 \in V_3^0, \quad (38) \\
& \mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1 - \gamma^k) \mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, \dots \quad (39)
\end{aligned}$$

На кожній ітерації  $k$  методу (36)–(39) необхідно паралельно розв'язувати три незалежні лінійні варіаційні рівняння (36), (37) і (38) в окремих підобластях  $\Omega_\alpha$ , що відповідають осесиметричним задачам теорії пружності з крайовими умовами Робіна (Пуанкаре) на зонах можливого одностороннього контакту  $S_{12}$  і  $S_{21}$  та межах ідеального контакту  $S_{23}$  і  $S_{32}$ . Тому ітераційний метод (36)–(39) належить до **паралельних схем Робіна (Пуанкаре) декомпозиції області**.

Сформулюємо без доведення таке твердження про його збіжність.

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови лем 1 і 2. Тоді кожна із задач (36), (37) і (38) має єдиний розв'язок для будь-якого  $k \in \mathbb{N}_0$ . Якщо, крім цього, ітераційні параметри задовольняють умову  $\gamma^k \in (0; 2B_A/(M_A + D_J))$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , то послідовність  $\{\mathbf{u}^k\} = \{(\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^k, \mathbf{u}_3^k)^\top\} \subset V_0$ , побудована методом (36)–(39), за будь-якого початкового наближення  $\mathbf{u}^0 \in V_0$  при  $k \rightarrow \infty$  збігається слабо у просторі  $V_0$  до точного розв'язку  $\bar{\mathbf{u}}_\theta \in V_0$  варіаційного рівняння (27), тобто  $(\forall g \in V_0^*) \left\{ \langle g, \mathbf{u}^k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle g, \bar{\mathbf{u}}_\theta \rangle \right\}$ , де  $V_0^*$  – простір, спряжений до  $V_0$ .*

Вибираючи різні характеристичні функції  $\psi_{\alpha\beta}^k = \psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$ ,  $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}, \{2, 3\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , тобто різні підмножини  $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$ , можна отримати різні варіанти методу декомпозиції області (36)–(39). Зокрема, покладаючи  $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 0$ , тобто  $S_{\alpha\beta}^k = \emptyset$ ,  $\forall \alpha, \beta$ ,  $\forall k$ , отримаємо **паралельну схему Неймана**. Інший граничний випадок відповідає  $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 1$ , тобто  $S_{\alpha\beta}^k = S_{\alpha\beta}$ ,  $\forall \alpha, \beta$ ,  $\forall k$ . Однак числові експерименти показали, що найефективніше ці функції вибирати у вигляді (33). Тоді алгоритм декомпозиції області (36)–(39) можна вважати модифікацією напівгладкого методу Ньютона.

Отже, для розв'язування нелінійної осесиметричної контактної задачі (1)–(8), (10)–(15) для системи з трьох тіл запропоновано клас паралельних ітераційних методів декомпозиції області (36)–(39), які зводять її до розв'язування на кожній ітерації незалежних осесиметричних задач лінійної теорії пружності в окремих тілах з крайовими умовами Робіна на межах контакту. Задачі в окремих тілах можна розв'язувати різними числовими методами, зокрема методом скінченних елементів (МСЕ) або методом граничних елементів (МГЕ).

**4. Числові дослідження.** Розроблені методи декомпозиції області застосовано до розв'язування задачі про контакт трьох пружних тіл обертання  $\Omega'_1$ ,  $\Omega'_2$  і  $\Omega'_3$ . Меридіальні перетини цих об'єктів займають плоскі області  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  і  $\Omega_3$  відповідно. Схема контакту в меридіальному перерізі та граничні перерізи та граничні умови для цієї задачі зображені на рис. 2.



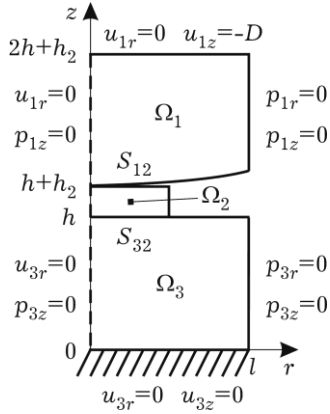


Рис. 2

Тіло  $\Omega'_2$  є циліндричним пружним покриттям центральної частини верхньої грані циліндричного тіла  $\Omega'_3$ . Між покриттям  $\Omega'_2$  і пружним тілом  $\Omega'_3$  (надалі – основою) виконуються умови ідеального механічного контакту. Нижня грань тіла  $\Omega'_3$  жорстко закріплена. Між тілом обертання  $\Omega'_1$ , внаслідок його вертикального переміщення, і покриттям  $\Omega'_2$  тіла  $\Omega'_3$  відбувається односторонній контакт без тертя. Відстань між меридіальними перетинами тіл  $\Omega'_1$  і  $\Omega'_2$  до контакту описує квадратична функція  $d_n(\mathbf{x}) = \chi r^2$ . Переміщення, що задані

на верхній поверхні тіла  $\Omega'_1$ , дорівнюють  $u_{1r}(\mathbf{x}) = 0$ ,  $u_{1z}(\mathbf{x}) = -\Delta$ , де  $\Delta = 2.778999\chi$ . Максимальна висота тіла обертання  $\Omega'_1$  і висота циліндричного тіла  $\Omega'_3$  однакові і дорівнюють  $h_1 = h_3 = h$ . Висота циліндричного покриття  $\Omega'_2$  рівна  $h_2$  ( $h_2 \ll h$ ), а його радіус  $r_2 = \ell/2$ , де  $\ell$  – радіус основи  $\Omega'_3$ , який збігається з максимальним радіусом верхнього тіла  $\Omega'_1$  ( $r_1 = r_3 = \ell$ ). Зоною можливого контакту між областями  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  є  $S_{21} = \{\mathbf{x} : r \in [0, \ell/2], z = h + h_2\}$ , а міжфазною поверхнею між  $\Omega_2$  і  $\Omega_3$  є  $S_{23} = \{\mathbf{x} : r \in [0, \ell/2], z = h\}$ . Модулі Юнга тіл  $\Omega'_1$  і  $\Omega'_3$  однакові:  $E_1 = E_3 = E$ , а модуль Юнга покриття  $\Omega'_2$  рівний  $E_2$ . Коефіцієнти Пуассона всіх тіл однакові:  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu = 0.3$ . Об'ємні сили відсутні, тобто  $f_{\alpha r}(\mathbf{x}) = f_{\alpha z}(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ .

Сформульовану задачу досліджували для таких фізичних і геометричних параметрів: висота нижнього і максимальна висота верхнього тіл  $h = 8b$ , висота циліндричного покриття  $h_2 \in [0.125b, b]$ , радіус нижнього і максимальний радіус верхнього тіл  $\ell = 4b$ , стала  $\chi = 10^{-3}b$ , де  $b = 1$  см, модуль Юнга циліндричного покриття  $E_2 \in [E/5, 5E]$ .

Цю задачу розв'язували паралельним методом декомпозиції області (36)–(39). Для числового розв'язування осесиметричних задач лінійної теорії пружності в окремих тілах на кожному кроці застосовували МСЕ з квадратичними трикутними елементами. Для області  $\Omega_1$  використовували розбиття на 1372 квадратичні скінченні елементи, а для області  $\Omega_3$  – на 1349 елементів. Якщо висота  $h_2$  області  $\Omega_2$  становить 0.125 см, то цю область розбивали на 64 квадратичні скінченні елементи, якщо 0.25 см – на 128, якщо 0.5 см – на 256, а якщо 1 см – на 512 елементів. Параметр штрафу задавали за стрижневою моделлю [14] у вигляді  $\theta = cE(1 - \nu^2) \sum_{\alpha=1}^3 \frac{h_\alpha}{bE_\alpha}$ , де  $c = 0.01$  – нормований коефіцієнт штрафу. Початкові наближення для переміщень вибирали у вигляді  $u_{\alpha r}^0(\mathbf{x}) = u_{\alpha z}^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-6}$  см,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Для зупинки ітераційного процесу застосовували критерій

$$\|u_{\alpha m}^{k+1} - u_{\alpha m}^k\|_2 / \|u_{\alpha m}^{k+1}\|_2 \leq \varepsilon_u, \quad m = \tau, n, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

де  $\|u_{\alpha m}\|_2 = \sqrt{\sum_j [u_{\alpha m}(\mathbf{x}^j)]^2}$  – дискретна норма,  $\mathbf{x}^j \in S_\alpha$  – вузли скінченно-елементного розбиття межі  $S_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ,  $S_1 = S_{12}$ ,  $S_2 = S_{21} \cup S_{23}$ ,  $S_3 = S_{32}$ , а  $\varepsilon_u > 0$  – відносна точність для переміщень.

Ітераційні параметри  $\gamma^k$  у методі (36)–(39) задавали однаковими на кожній ітерації, тобто  $\gamma^k = \gamma \in [0.5, 0.6]$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , а характеристичні функції вибирали у вигляді (33). За таких параметрів МДО (36)–(39) досягає точності  $\varepsilon_u = 10^{-3}$  за  $164 \div 315$  ітерацій залежно від вхідних даних.

Тепер проаналізуємо числові результати, отримані для цієї задачі за допомогою МДО (36)–(39). Дослідимо нормальні контактні напруження вздовж зони можливого контакту  $S_{12}$ , а також нормальні та дотичні міжфазні напруження вздовж межі  $S_{23}$  для різних жорсткостей та різних висот циліндричного пружного покриття  $\Omega'_2$ .

На рис. 3 та 4 зображено відповідно розподіли безрозмірних нормальних контактних напруження  $\sigma_{12n}^* = \sigma_{12n}/E$  на ділянці можливого контакту  $S_{12}$  та міжфазного напруження  $\sigma_{23n}^* = \sigma_{23n}/E$  на інтерфейсі  $S_{23}$  між покриттям і основою. Суцільні криві відповідають числовим розв'язкам, коли пружне покриття у п'ять разів жорсткіше за основу і верхнє тіло ( $E_2 = 5E$ ), а штрихові – коли воно у п'ять разів податливіше за інші тіла ( $E_2 = E/5$ ). Криві 1–4 відповідають результатам за висоти пружного покриття  $h_2 = 1, 0.5, 0.25$  та  $0.125$  см.

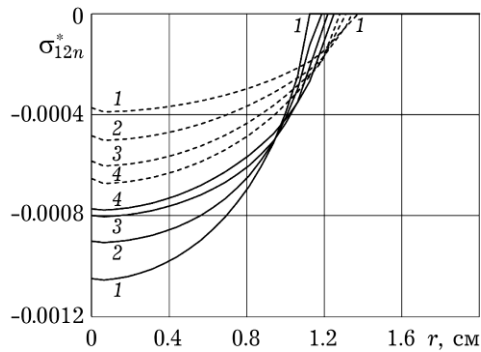


Рис. 3

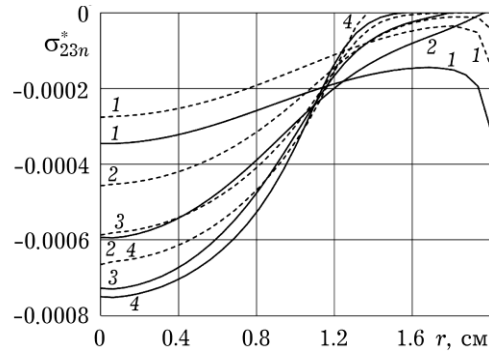


Рис. 4

З рис. 3 бачимо, що зі зменшенням висоти для податливого покриття (штрихові лінії) збільшується максимальне за модулем значення нормального контактного напруження  $\sigma_{12n}^*$  та зменшується ділянка контакту, а для жорсткого покриття (суцільні лінії) зменшення його висоти призводить до зниження максимуму модуля цього напруження та збільшення ділянки контакту. Максимальне за модулем значення напруження  $\sigma_{12n}^*$  у всіх випадках досягається біля центра пружного покриття (при  $r = 0$ ). Крім цього, що менша висота покриття, то ближчими стають розподіли нормального контактного напруження, отримані для різних жорсткостей цього покриття.

Рис. 4 ілюструє, що зі зменшенням висоти пружного покриття  $h_2$  збільшуються за модулем значення міжфазного нормального напруження  $\sigma_{23n}^*$  на більшій лівій частині межі  $S_{23}$ , яка в основному відповідає ділянці фактичного контакту між верхнім тілом і покриттям, та зменшуються за

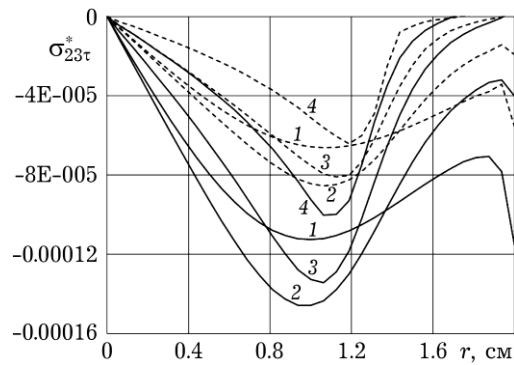


Рис. 5

модулем його значення на меншій правій частині цієї межі. При цьому значення напруження  $\sigma_{23n}^*$  для податливого покриття ( $E_2 = E/5$ ) менші за модулем, ніж для жорсткого ( $E_2 = 5E$ ). Також бачимо, що чим тонше покриття, то ближчим стає розподіл нормального міжфазного напруження  $\sigma_{23n}^*$  на межі  $S_{23}$  до розподілу нормального контактного напруження  $\sigma_{12n}^*$  на інтерфейсі  $S_{12}$ .

На рис. 5 наведено графіки безрозмірного дотичного міжфазного напруження  $\sigma_{23\tau}^* = \sigma_{23\tau}/E$  на межі ідеального контакту  $S_{23}$ . Суцільними лініями позначено результати, отримані для пружного покриття з модулем Юнга  $E_2 = E$ , а штриховими – для  $E_2 = E/5$ . Криві 1–4 відповідають результатам для таких же висот  $h_2$  пружного покриття, що й криві 1–4 на рис. 3 і 4.

Абсолютні значення розподілів цього напруження менші, ніж нормального міжфазного напруження. Усі графіки мають локальний мінімум, який знаходиться у середній частині ділянки  $S_{23}$ . Значення за модулем дотичних міжфазних напружень  $\sigma_{23\tau}^*$  для покриття з жорсткістю  $E_2 = E$  (суцільні лінії), як правило, перевищують відповідні значення для податливого покриття (штрихові лінії).

**Висновки.** Розглянуто осесиметричну контактну задачу для трьох пружних тіл обертання. Між першим і другим тілом відбувається односторонній контакт без тертя, а між другим і третім – ідеальний механічний контакт. За допомогою методу штрафу здійснено слабке формулювання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння у гільбертовому просторі. Визначено умови існування і єдиності його розв'язку та збіжності за параметром штрафу.

Для нелінійного варіаційного рівняння зі штрафом осесиметричної контактної задачі запропоновано паралельні ітераційні методи декомпозиції області, які зводять його розв'язування до паралельного розв'язування на кожній ітерації незалежних лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах, що відповідають осесиметричним задачам лінійної теорії пружності з крайовими умовами Робіна на спільних межах тіл. Встановлено умови слабкої збіжності цих методів.

Отримані методи апробовано для задачі про контакт пружних тіл обертання з поодиноким дискретним циліндричним пружним покриттям між ними. Для числового розв'язування лінійних осесиметричних задач в окремих тілах на кожній ітерації застосовано МСЕ з квадратичними трикутними скінченними елементами. Досліджено вплив висоти та жорсткості покриття на нормальні контактні напруження на інтерфейсі між покриттям і верхнім тілом та на нормальні і дотичні міжфазні напруження на межі між покриттям і основою.

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
2. Кравчук А. С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика. – 1978. – 42, № 3. – С. 466–474.

- Те саме: *Kravchuk A. S.* Formulation of the problem of contact between several deformable bodies as a nonlinear programming problem // *J. Appl. Math. Mech.* – 1978. – **42**, No. 3. – P. 489–498. – [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(78\)90117-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(78)90117-X)
3. *Кузьменко В. И.* О вариационном подходе к теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // *Прикл. математика и механика.* – 1979. – **43**, № 5. – С. 893–901.  
Те саме: *Kuz'menko V. I.* On the variational method in the theory of contact problems for nonlinearly elastic laminated bodies // *J. Appl. Math. Mech.* – 1979. – **43**, No. 5. – P. 961–970. – [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(79\)90184-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(79)90184-9)
  4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 588 с.
  5. *Лопата Л. А., Ляшенко Б. А., Калиниченко В. И., Волков Ю. В., Лопата Т. В.* Получение износостойких дискретных покрытий электроконтактным припеканием // *Проблеми тертя та зношування.* – 2009. – Вип. 51. – С. 139–148.
  6. *Лопата Л. А., Ляшенко Б. А., Калиниченко В. И., Дудан А. В.* Электроконтактное припекание дискретных покрытий // *Вестник Полоцк. гос. ун-та. Сер. В. Промышленность. Прикладные науки. Материаловедение и металлургия.* – 2010. – № 2. – С. 147–154.
  7. *Ляшенко Б. А., Волков Ю. В., Соловьев Е. К., Лопата Л. А.* Повышение износостойкости деталей судовых машин и механизмов покрытиями дискретной структуры. Технологическое обеспечение покрытий дискретной структуры электроконтактным припеканием // *Проблеми тертя та зношування.* – 2015. – Вип. 2(67). – С. 110–126.
  8. *Мартиняк Р. М., Прокопишин І. А., Прокопишин І. І.* Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – **56**, № 3. – С. 43–56.  
Те саме: *Martyniuk R. M., Prokopyshyn I. A., Prokopyshyn I. I.* Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers // *J. Math. Sci.* – 2015. – **205**, No. 4. – P. 535–553. – <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2265-0>
  9. *Прокопишин І.* Алгоритми декомпозиції області для задач про термомеханічний контакт багатьох пружних тіл // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2017. – Вип. 26. – С. 63–82.
  10. *Прокопишин І.* Контактна взаємодія пружних тіл, одне з яких має покриття, з'єднане з основою через вінклерівський прошарок // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2016. – Вип. 23. – С. 144–160.
  11. *Прокопишин І.* Методи декомпозиції області для задачі про статичну рівновагу системи пружних тіл, з'єднаних через тонкі нелінійні прошарки // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2015. – Вип. 21. – С. 173–185.
  12. *Прокопишин І.* Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2012. – Вип. 15. – С. 75–87.
  13. *Прокопишин І.* Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика.* – 2008. – Вип. 14. – С. 123–133.
  14. *Прокопишин І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. . – Львів, 2010. – 163 с.
  15. *Прокопишин І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач про ідеальний контакт пружних тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 1. – С. 41–56.  
Те саме: *Prokopyshyn I. I.* Domain decomposition schemes based on the penalty method for the problems of perfect contact of elastic bodies // *J. Math. Sci.* – 2016. – **212**, No. 1. – P. 46–66. – <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2648-2>
  16. *Прокопишин І. І., Дияк І. І., Мартиняк Р. М.* Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2013. – **49**, № 1. – С. 46–55.  
Те саме: *Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martyniuk R. M.* Numerical analysis of the problems of contact of three elastic bodies by the domain decomposition methods // *Mater. Sci.* – 2013. – **49**, No. 1. – P. 45–58. – <https://doi.org/10.1007/s11003-013-9581-7>
  17. *Прокопишин І., Шахно С.* Диференціально-різницеві ітераційні алгоритми декомпозиції області для задач про односторонній контакт багатьох пружних тіл // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2017. – Вип. 25. – С. 125–140.

18. Соловьев Е. К., Ляшенко Б. А., Калинин В. И. Износостойкие несплошные покрытия каркасного типа // Проблемы тертя та зношування. – 2010. – Вип. 54. – С. 31–46.
19. Avery P., Farhat C. The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming: Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. – 2009. – **198**, No. 21–26. – P. 1673–1683. – <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.12.014>
20. Bresch D., Koko J. An optimization-based domain decomposition method for nonlinear wall laws in coupled systems // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2004. – **14**, No 7. – P. 1085–1101. – <https://doi.org/10.1142/S0218202504003556>
21. Dostál Z., Kozubek T., Vondrák V., Brzobohatý T., Markopoulos A. Scalable TFETI algorithm for the solution of multibody contact problems of elasticity // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2010. – **82**, No. 11. – P. 1384–1405. – <https://doi.org/10.1002/nme.2807>
22. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results. – <http://arxiv.org/pdf/1208.6478v1.pdf>. – 2012. – 32 p.
23. Gong Z.-Q., Komvopoulos K. Effect of surface patterning on contact deformation of elastic-plastic layered media // J. Tribol. – 2003. – **125**, No. 1. – P. 16–24. – <https://doi.org/10.1115/1.1501086>
24. Gong Z.-Q., Komvopoulos K. Mechanical and thermomechanical elastic-plastic contact analysis of layered media with patterned surfaces // J. Tribol. – 2004. – **126**, No. 1. – P. 9–17. – <https://doi.org/10.1115/1.1609487>
25. Haslinger J., Kučera R., Sassi T. A domain decomposition algorithm for contact problems: Analysis and implementation // Math. Model. Nat. Phenom. – 2009. – **4**, No 1. – P. 123–146. – <https://doi.org/10.1051/mmnp/20094106>
26. Kikuchi N., Oden J. T. Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. – Philadelphia: SIAM, 1988. – 490 p.
27. Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers // In: Erhel J., Gander M., Halpern L., Pichot G., Sassi T., Widlund O. (eds) Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXI. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 98. – Cham: Springer, 2014. – P. 739–748. – [https://doi.org/10.1007/978-3-319-05789-7\\_71](https://doi.org/10.1007/978-3-319-05789-7_71)
28. Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // In: Bank R., Holst M., Widlund O., Xu J. (eds) Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XX. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 91. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. – P. 647–654. – [https://doi.org/10.1007/978-3-642-35275-1\\_77](https://doi.org/10.1007/978-3-642-35275-1_77)
29. Ramachandra S., Ovaert T. C. Effect of coating geometry on contact stresses in two-dimensional discontinuous coatings // J. Tribol. – 2000. – **122**, No. 4. – P. 665–671. – <https://doi.org/10.1115/1.1310333>

#### АЛГОРИТМЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ

Предложены параллельные итерационные методы декомпозиции области для решения осесимметричной задачи о контакте упругих тел. Определены условия слабой сходимости этих методов. С использованием конечно-элементных аппроксимаций разработанные методы апробировано для исследования контактного взаимодействия двух упругих тел вращения, одно из которых имеет одиночное дискретное цилиндрическое упругое покрытие. Изучено влияние высоты и жесткости покрытия на контактные и межфазные напряжения.

**Ключевые слова:** осесимметричные контактные задачи, упругие покрытия, вариационные неравенства, нелинейные вариационные уравнения, методы декомпозиции области, метод конечных элементов.

#### DOMAIN DECOMPOSITION ALGORITHMS FOR AXISYMMETRIC PROBLEM OF CONTACT BETWEEN ELASTIC BODIES

Parallel iterative domain decomposition methods are proposed for solving axisymmetric contact problem for elastic bodies and the conditions of weak convergence of these

*methods are established. With the use of the finite element approximations, obtained methods are implemented to investigate contact interaction between two elastic bodies of revolution, one of which has a singular discrete cylindrical elastic coating. The influence of the height and the stiffness of the coating on the contact and the interfacial stresses is studied.*

**Key words:** *axisymmetric contact problems, elastic coatings, variational inequalities, nonlinear variational equations, domain decomposition methods, finite element method.*

<sup>1</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

<sup>2</sup> Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів,

<sup>3</sup> Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано

16.10.19