УДК 517.95

С. М. Репетило[1,2]✉, М. М. Симотюк[1,2]

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ СИСТЕМИ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В області, що є декартовим добутком відрізка на коло одиничного радіуса, досліджено крайову задачу з умовами Діріхле–Неймана за часовою змінною та умовою 2π*-періодичності за просторовою координатою для системи слабко нелінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами. За допомогою принципу нерухомої точки Каччополлі–Банаха встановлено умови однозначної розв'язності задачі у просторах Соболєва.*

Ключові слова: *крайова задача, умови Діріхле-Неймана, система слабко нелінійних гіперболічних рівнянь, принцип нерухомої точки Каччополлі–Банаха.*

Вступ. Крайові задачі з даними на всій межі області для гіперболічних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними, взагалі кажучи, некоректні, їхня розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників (див. [1, 3, 8–13, 15] та бібліографію в них). Типовим прикладом некоректної крайової задачі є задача типу Діріхле для хвильового рівняння [8, с. 23].

У працях [1, 10–13, 15] встановлено умови існування єдиного періодичного чи майже періодичного за просторовими координатами розв'язку задач Діріхле та Діріхле–Неймана за змінною t для лінійних гіперболічних рівнянь та їх систем високого порядку. Розв'язність двоточкових задач з умовами Діріхле та Діріхле–Неймана для лінійних та нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку за умови періодичності шуканого розв'язку за часовою змінною досліджено в працях [4, 6, 14, 16, 17].

Нижче результати праць [1, 11] поширено на задачі з умовами Діріхле-Неймана за змінною t та умовою 2π-періодичності за координатою x для системи слабко нелінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами. Поставлену задачу зведено до задачі про знаходження нерухомої точки деякого стискального оператора у повному метричному просторі. На підставі принципу нерухомої точки встановлено умови однозначної розв'язності задачі у просторах Соболєва.

1. Основні позначення. Використовуватимемо такі позначення: $\mathbb{Z}_+$ – множина невід'ємних цілих чисел; $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $T > 0$, $.\Omega.$ – коло одиничного радіуса; $D = \{(t, x) : 0 < t < T, x \in \Omega\}$; c_j, $j = 1, 2, \ldots$ – додатні сталі, які не залежать від k; H_q, $q \in \mathbb{R}$ – простір тригонометричних рядів $v(x) = \sum_{|k|\ge 0} v_k \exp(ikx)$ зі скінченною нормою

$$\|v; H_q\| := \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1 + k^2)^q |v_k|^2}\,;$$

$C^p([0,T], H_q)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathbb{R}$ – простір таких функцій $v(t,x)$, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\dfrac{\partial^r v(t,x)}{\partial t^r}$, $r \in \{0,1,\ldots,p\}$, належать до простору H_{q-r} та неперервні за t у нормі цього простору; норму в $C^p([0,T], H_q)$ визначаємо формулою

✉ repetylosofiya@gmail.com

$$\left\| v; C^p([0,T], H_q) \right\| := \sum_{r=0}^{p} \max_{0\le t\le T} \left\| \frac{\partial^r v}{\partial t^r}; H_{q-r} \right\|;$$

$\overline{C}^p\left([0,T], H_q(\Omega)\right)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathbb{R}$ – простір вектор-функцій $\upsilon(t,x) = (\upsilon_1(t,x), \ldots, \upsilon_m(t,x))$, для яких $\upsilon_j \in C^p([0,T], H_q(\Omega))$, $j \in \{1,\ldots,m\}$,

$$\left\| \upsilon; \overline{C}^p\left([0,T], H_q(\Omega)\right) \right\|^2 := \sum_{j=1}^{m} \left\| \upsilon_j; C^p\left([0,T], H_q(\Omega)\right) \right\|^2.$$

2. Формулювання задачі. В області D розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv \sum_{s=0}^{n} A_s \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2(n-s)} \partial x^{2s}} = f(t,x) + \varepsilon \Phi(t,x,u(t,x)),$$

$$\varepsilon \in \mathbb{R}, \ (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$U_\ell[u] := \left. \frac{\partial^{2\ell-2} u(t,x)}{\partial t^{2\ell-2}} \right|_{t=0} = 0, \ \ell \in \{1,\ldots,n\}, \ x \in \Omega,$$

$$U_{n+\ell}[u] := \left. \frac{\partial^{2\ell-1} u(t,x)}{\partial t^{2\ell-1}} \right|_{t=T} = 0, \ \ell \in \{1,\ldots,n\}, \ x \in \Omega, \tag{2}$$

де $A_s = \left\| a_{pq}^s \right\|_{p,q=1}^m$, $s \in \{0,1,\ldots,n\}$ – квадратні матриці розміром $m \times m$ з дійсними елементами, A_0 – одинична матриця; $u(t,x) = \mathrm{col}(u_1(t,x), \ldots, u_m(t,x))$, $f(t,x) = \mathrm{col}(f_1(t,x), \ldots, f_m(t,x))$; функція $\Phi(t,x,u)$ визначена та неперервна за змінною t і досить гладка за x, u у замкненій множині $Q = \left\{(t,x,u) : (t,x) \in D, u \in \overline{S}\left(u^0, r\right)\right\}$,

$$\overline{S}\left(u^0, r\right) = \left\{ u \in \overline{C}^{2n}\left([0,T], H_q(\Omega)\right) : \left\| u - u^0 \right\|_{\overline{C}^{2n}\left([0,T], H_q(\Omega)\right)} \le r \right\},$$

де $u^0 := u^0(t,x)$ – розв'язок задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$, r – деяке додатне число.

Вважаємо, що система рівнянь (1) є гіперболічною за Петровським у вузькому сенсі [7], тобто всі $2mn$ коренів рівняння

$$\delta(\lambda) := \det \left\| \sum_{s=0}^{n} a_{pj}^s \lambda^{2n-2s} \right\|_{p,j=1}^{m} = 0 \tag{3}$$

є дійсними і різними, а отже, відмінними від нуля. Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції u, f і Φ.

3. Розв'язність задачі для системи лінійних рівнянь. Розглянемо задачу (1), (2), коли $\varepsilon = 0$. Позначимо: $\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn}$ – додатні корені рівняння (3). Оскільки вони прості, то для кожного $q \in \{1,\ldots,m\}$ хоча б один рядок визначника $\delta(\lambda_q)$ володіє такою властивістю, що не всі алгебричні доповнення його елементів дорівнюють нулю, нехай $N = N(q)$ – найменший серед номерів таких рядків.

У праці [11] встановлено такі умови єдиності розв'язку задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\overline{C}^{2n}([0,T], H_{2n}(\Omega))$ *необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \quad \cos\left(\lambda_j T k\right) \ne 0, \quad j \in \{1,\ldots,nm\}. \tag{4}$$

Якщо вони справджуються, то для кожного $k \in \mathbb{Z}$ існує [5] єдина матриця Гріна $G_k(t,\tau) \equiv \left\| p_{k,r,q}(t,\tau) \right\|_{r,q=1}^{m}$ крайової задачі

$$L\left(\frac{d}{dt}, ik\right) u_k(t) = f_k(t), \; U_\ell[u_k] = 0, \; \ell \in \{1,\ldots,2n\},$$

за допомогою якої формальний розв'язок задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$ визначає формула (див. [11]):

$$u^0(t,x) = \int_0^T G_0(t,\tau) f_0(\tau) d\tau + \sum_{|k|>0} \exp(ikx) \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau, \tag{5}$$

де $f_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, – вектор-коефіцієнти Фур'є функції $f(t,x)$ за змінною x:

$$f(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} f_k(t) \exp(ikx).$$

Елементи матриць Гріна $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, визначають формули

$$\begin{aligned} p_{k,r,q}(t,\tau) = {} & \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{4\Upsilon(\lambda)} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \varphi_{r,\ell+m(\mu-1)} \Upsilon_{q,\ell+m(\mu-1)} \Big(e^{ik\lambda_{\ell+m(\mu-1)}(t-\tau)} - \\ & -(-1)^{nm} e^{-ik\lambda_{\ell+m(\mu-1)}(t-\tau)} \Big) + \\ & + \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{8\Upsilon^2(\lambda)} \sum_{j,\nu,\mu=1}^{n} \sum_{\ell,d=1}^{m} \frac{i\varphi_{r,\ell+m(j-1)} \varphi_{r,d+m(\mu-1)} \lambda_{d+m(\mu-1)}^{2\nu-3}}{k^{2n-1} \lambda_{\ell+m(j-1)} \cos(k\lambda_{\ell+m(j-1)}T)} \times \\ & \times \Upsilon_{q+m(n-1),d+m(\mu-1)} \Upsilon_{q+m(\nu-1),\ell+m(j-1)} \Big\{ \lambda_{\ell+m(j-1)} \times \\ & \times \Big(e^{ik\lambda_{d+m(\mu-1)}\tau} + (-1)^{nm-1} e^{-ik\lambda_{d+m(\mu-1)}\tau} \Big) \times \\ & \times \Big((-1)^{nm-1} e^{ik\lambda_{\ell+m(j-1)}(T-t)} + e^{-ik\lambda_{\ell+m(j-1)}(T-t)} \Big) + \\ & + \lambda_{d+m(\mu-1)} \Big(e^{ik\lambda_{d+m(\mu-1)}(T-\tau)} + (-1)^{nm} e^{-ik\lambda_{d+m(\mu-1)}(T-\tau)} \Big) \times \\ & \times \Big(e^{ik\lambda_{\ell+m(j-1)}t} + (-1)^{nm} e^{-ik\lambda_{\ell+m(j-1)}t} \Big) \Big\}, \end{aligned} \tag{6}$$

де r, $q \in \{1,\ldots,m\}$, $\Upsilon_{\ell j}$ – алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині ℓ-го рядка та j-го стовпця у визначнику:

$$\Upsilon(\lambda) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,nm} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{m,1} & \cdots & \varphi_{m,nm} \\ \varphi_{1,1}\lambda_1^2 & \cdots & \varphi_{1,nm}\lambda_{nm}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{m,1}\lambda_1^2 & \cdots & \varphi_{m,nm}\lambda_{nm}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{1,1}\lambda_1^{2n-2} & \cdots & \varphi_{1,nm}\lambda_{nm}^{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{m,1}\lambda_1^{2n-2} & \cdots & \varphi_{m,nm}\lambda_{nm}^{2n-2} \end{bmatrix},$$

$\varphi_{lh} \equiv \varphi_l(\lambda_h)$, $\ell \in \{1,\ldots,m\}$, $h \in \{1,\ldots,nm\}$ – алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині $N(h)$-го рядка та ℓ-го стовпця у визначнику $\delta(\lambda_h)$. Елементами матриці Гріна $G_0(t,\tau)$ є многочлени за t,τ.

Збіжність векторного ряду (5) пов'язана з оцінкою знизу модулів величин $\cos\left(k\lambda_{\ell+m(j-1)}T\right)$, $\ell \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

На підставі метричного підходу встановлено [11] таке твердження.

Лема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *оцінки*

$$\left|\cos(k\lambda_j T)\right| \ge (1+|k|)^{-\alpha}, \qquad 1<\alpha<2, \qquad j \in \{1,\ldots,mn\}\ , \tag{7}$$

справджуються для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$ *та фіксованих коренів* $\lambda_1,\ldots,\lambda_{mn}$ *рівняння* (3).

Із леми 1 та оцінок для елементів матриць Гріна (6) отримано такий результат.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (4)*. Якщо* $f \in \overline{C}([0,T],H_{q+\chi}(\Omega))$, $q \ge 2n$, $\chi > 2-2n$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T>0$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *при* $\varepsilon = 0$ *з простору* $\overline{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega))$, *який зображує рівність* (5)*. Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\left\|u^0;\overline{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega))\right\| \le c_1 \left\|f;\overline{C}([0,T],H_{q+\chi}(\Omega))\right\| \equiv \rho\,.$$

4. Основні результати. Розглянемо тепер задачу (1), (2), коли $\varepsilon \ne 0$. Зводимо її до нелінійного інтегрального рівняння

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon\int_D K(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\tau d\xi\,, \tag{8}$$

де $K(t,x,\tau,\xi) = \left\|K_{jr}(t,x,\tau,\xi)\right\|_{j,r=1}^{m}$, якщо ряди

$$K_{jr}(t,x,\tau,\xi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\ge 0} p_{k,j,r}\,(t,\tau)\exp\left(ik(x-\xi)\right), \quad j,r \in \{1,\ldots,m\}\,, \tag{9}$$

в яких $p_{k,j,r}(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $j,r \in \{1,\ldots,m\}$, визначають формули (6), рівномірно збігаються в області $\overline{D}\times\overline{D}$.

Використовуватимемо такі допоміжні твердження.

Лема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *ряди* (9) *рівномірно збігаються в області* $\overline{D}\times\overline{D}$ *при* $n \ge 2$.

Д о в е д е н н я. З формул (6) і леми 1 отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$ справджуються оцінки

$$\max_{\overline{D}\times\overline{D}}\left|p_{k,r,q}(t,\tau)\exp(ik(x-\xi))\right| \le c_2\,|k|^{-2n+1+\alpha}\,,$$

$$k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\,,\ r,q \in \{1,\ldots,m\},\ 1<\alpha<2\,, \tag{10}$$

із яких випливає, що ряд (9) мажорується числовим рядом із додатними членами

$$c_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n-1-\alpha}}\,. \tag{11}$$

Якщо $n \ge 2$, то ряд (11) є збіжним. Тому для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T ряди (9) є рівномірно збіжними в області $\overline{D}\times\overline{D}$.

Нехай Π − замкнена множина у повному метричному просторі X з метрикою $\rho(x,y)$, а відображення P переводить множину Π в себе.

Теорема 3 ([2, с. 605]). *Якщо P є оператором стиску, то в Π існує єдиний розв'язок x^* рівняння $x = P(x)$. При цьому x^* можна отримати як границю послідовності $\{x_n\}$, де $x_{n+1} = P(x_n)$, $n \in 0,1,2,\ldots$, а x_0 – довільний елемент із Π. Швидкість збіжності послідовності $\{x_n\}$ до розв'язку x^* визначає нерівність* $\rho(x_n, x^*) \le \dfrac{\beta^n}{1-\beta}\rho(x_1, x_0)$, $\beta < 1$.

Поряд із простором X розглянемо ще один метричний простір Y та замкнену підмножину $Y_0 \in Y$. Припустимо, що кожному $y \in Y_0$ відповідає оператор P_y, що відображає множину $\Pi \subset X$ в себе.

Теорема 4 ([2, с. 608]). *Якщо для кожного $y \in Y_0$ відображення P_y справджує умову*

$$\rho\big(P(x), P(x')\big) \le \beta\rho(x, x'), \quad 0 < \beta < 1,$$

зі сталою β, що не залежить від y, і якщо в точці $y_0 \in Y_0$ відображення P_y є неперервним за y, то при $y = y_0$ розв'язок рівняння $x = P_y(x)$ неперервно залежить від y.

Запишемо рівність (8) у вигляді операторного рівняння

$$u(t,x) = A_{u^0} u(t,x),$$

де A_v – нелінійний інтегральний оператор, визначений у кулі $\overline{S}(u^0, r)$ формулою

$$A_v u(t,x) := v(t,x) + \varepsilon \int_D K(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\tau d\xi, \tag{12}$$

Позначимо

$$\overline{\Phi}_j = \max_{0\le|s_1|+|s_1|\le 5} \max_{Q} \left| \frac{\partial^{|s_1|+|s_1|}\Phi_j(t,x,u)}{\partial u^{|s_1|}\partial x^{|s_2|}} \right|,$$

$$\Psi = c_3(1 + r + \rho)^3 \sum_{j=1}^{m} \overline{\Phi}_j \sum_{|k|\ge 0} \frac{1}{k^{2n+3-q-\alpha}}, \quad j \in \{1,\ldots,m\},$$

де $\rho = c_1 \left\| f; \overline{C}([0,T], H_{q+\chi}(\Omega)) \right\|$, $\chi > 2 - 2n$, $q \ge 2n$.

Теорема 5. *Нехай $n \ge 2$, виконуються умови теореми 2, функція $\Phi(t,x,u)$ в області Q неперервна за t та має обмежені похідні за змінними x та u до 5-го порядку включно. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T і для всіх ε таких, що $|\varepsilon| < \min\{r/\Psi, 1/\Psi\}$, існує єдиний розв'язок задачі (1), (2). Цей розв'язок належить до кулі $\overline{S}(u^0, r) \subset \overline{C}^{2n}\big([0,T], H_q(\Omega)\big)$ і неперервно залежить від функції $f(t,x)$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $|\varepsilon|\Psi < r$. Позначимо через V сукупність вектор-функцій $v \in \overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega))$, для яких

$$\left\| v - u^0; \overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega)) \right\| \le \chi := r - |\varepsilon|\Psi.$$

Покажемо, що для довільної функції $v(t,x)$ із множини V оператор A_v переводить кулю $\overline{S}(u^0, r)$ в себе. Нехай $u \in \overline{S}(u^0, r)$. Тоді

$$\Phi(t,x,u(t,x)) = \sum_{|k|\ge 0} \Phi_k\big(t, \{u_m(t)\}\big)\exp(ikx),$$

де

$$\Phi_k\left(t,\{u_m(t)\}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\left(t,x,\sum_{|m|\geq 0}u_m(t)\exp(imx)\right)\exp(-ikx)dx. \qquad (13)$$

За умов теореми із формул (13) одержуємо такі оцінки для компонент вектор-коефіцієнтів Фур'є:

$$\max_{0\leq t\leq T}|\Phi_{jk}(t,\{u_m(t)\})|\leq c_4\overline{\Phi}_j\,|k|^{-4}\,(1+r+\rho)^4,$$
$$k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ j\in\{1,\dots,m\}. \qquad (14)$$

Із формули (12), на підставі (10), (14) та леми 1, отримуємо, що для всіх ε таких, що $|\varepsilon|<r/\Psi$, і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T справджується така оцінка:

$$\left\|A_v u(t,x)-u^0(t,x)\right\|_{\overline{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega))}\leq\left\|v-u^0\right\|_{\overline{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega))}+$$
$$+|\varepsilon|\left\|\int_D K(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\tau d\xi\right\|_{\overline{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega))}\leq$$
$$\leq\chi+c_5|\varepsilon|\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=0}^{2n}\Bigg((1+k^2)^{q-r}\times$$
$$\times\max_{0\leq t\leq T}\left|\frac{d^r}{dt^r}\int_0^T\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_{kjr}(t,\tau)\exp(ik(x-\xi)\Phi_{jk}(\tau,\{u_m(\tau)\})d\tau\right|^2\Bigg)^{1/2}\leq$$
$$\leq\chi+|\varepsilon|c_6\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=0}^{2n}\sum_{|k|\geq 0}\max_{0\leq t\leq T}\left|\frac{d^r}{dt^r}\int_0^T g_{kjr}(t,\tau)\,d\tau\right|\times$$
$$\times\max_{0\leq t\leq T}|\Phi_{jk}(t,\{u_m(t)\})|\,|k|^{q-r}\leq$$
$$\leq\chi+|\varepsilon|c_7(1+r+\rho)^3\sum_{j=1}^{m}\overline{\Phi}_j\sum_{|k|\geq 0}\frac{1}{k^{2n+3-q-\alpha}}=\chi+|\varepsilon|\Psi=r.$$

Покажемо тепер, що для довільної функції $v\in V$ оператор A_v є оператором стиску, якщо $|\varepsilon|<1/\Psi$. Нехай $u^1,u^2\in\overline{S}(u^0,r)$. Враховуючи оцінки (10), (14), лему 1 та гладкість функції $\Phi(t,x,u)$, із формули (12) одержуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T справджується така оцінка:

$$\|A_v u_1(t,x)-A_v u_2(t,x)\|_{\overline{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega))}=$$
$$=|\varepsilon|\left\|\int_D K(t,x,\tau,\xi)(\Phi(\tau,\xi,u^1(\tau,\xi))-\Phi(\tau,\xi,u^2(\tau,\xi)))d\tau d\xi\right\|_{\overline{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega))}=$$
$$=|\varepsilon|\left\|\int_D K(t,x,\tau,\xi)\frac{\partial\Phi(\tau,\xi,\tilde{u}(\tau,\xi))}{\partial u}(u^1(\tau,\xi)-u^2(\tau,\xi))d\tau d\xi\right\|_{\overline{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega))}\leq$$
$$\leq|\varepsilon|\Psi\|u_1-u_2\|_{\overline{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega))}. \qquad (15)$$

Якщо $|\varepsilon|<1/\Psi$, то з нерівності (15) випливає, що A_v є оператором стиску. Крім того, він неперервний за v. На підставі встановленого вище, теорем 3 і 4 рівняння (8), а отже, і задача (1), (2), має єдиний розв'язок, який належить кулі $\overline{S}(u^0,r)$ і неперервно залежить від $f(t,x)$. Теорему доведено.

Зауваження 1. Розв'язок $u(t,x)$ задачі (1), (2) можна отримати як границю послідовності наближених розв'язків $\{u_n(t,x)\}_{n=1}^{\infty}$, які визначають за формулами

$$u_n(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon\int_D K(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u_{n-1}(\tau,\xi))d\tau d\xi, \quad n = 1,2,\ldots,$$

де $u^0(t,x)$ – розв'язок задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$.

Зауваження 2. Результати роботи можна перенести на задачу з багатьма просторовими змінними.

1. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Задача з умовами типу умов Діріхле для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь // Вісник Прикарпат. ун-ту. Сер. Математика. Фізика. Хімія. – 1999. – Вип. 1. – С. 22–32.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 742 с.
3. *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Триточкова задача для хвильового рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 45. – С. 78–85.
4. *Митропольський Ю. О., Хома Г. П., Хома-Могильська С. Г.* Розв'язки крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку // Доп. НАН України. – 2008. – № 5. – С. 30–36.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
6. *Павленко В. Н., Петраш Т. А.* Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – **18**, № 2. – С. 199–204.
7. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – Москва: Физматгиз, 1961. – 400 с.
8. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
9. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
10. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле–Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Прикл. проблеми механіки і математики – 2012. – Вип. 10. – С. 7–14.
11. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле – Неймана для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 2. – С. 25–31.

    Те саме: *Ptashnyk B. Yo., Repetylo S. M.* Dirichlet–Neumann problem for systems of hyperbolic equations with constant coefficients // J. Math. Sci. – 2016. – **215**, No. 1. – P. 26–35.
12. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійних безтипних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 5. – С. 665–682.

    Те саме: *Ptashnik B. I., Repetylo S. M.* Boundary-value problem with mixed conditions for typeless linear partial differential equations // *Ukr. Math. J.* – 2016. – **68**, No. 5. – P. 756–776, – https://doi.org/10.1007/s11253-016-1256-8
13. *Пташник Б. И., Штабалюк П. И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – **22**, № 4. – С. 669–678.
14. *Рудаков И. А.* Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 2(537). – С. 46–55.
15. *Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних систем рівнянь з частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання // Мат. вісник НТШ. – 2004. – **1**. – С. 130–148.
16. *Gentile G., Mastropietro V., Procesi M.* Periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations with Dirichlet boundary conditions. // Commun. Math. Phys. – 2005. – **256**, No. 2. – P. 437–490. – https://doi.org/10.1007/s00220-004-1255-8

17. *Kaliev I. A., Mugafarov M. F.* The third boundary value problem for the system of equations of linear thermoelasticity // J. Appl. Industr. Math. – 2008. – **2**, № 4. – P. 501–507. – https://doi.org/10.1134/S1990478908040066

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В области, являющейся декартовым произведением отрезка на круг единичного радиуса, исследована краевая задача с условиями Дирихле–Неймана по временной переменной и условием 2π-периодичности по пространственной координате для системы слабо нелинейных гиперболических уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами. С помощью принципа неподвижной точки Каччополли–Банаха установлены условия однозначной разрешимости задачи в пространствах Соболева.

Ключевые слова: *краевая задача, условия Дирихле–Неймана, система слабо нелинейных гиперболических уравнений, принцип неподвижной точки Каччополли–Банаха.*

DIRICHLET–NEUMANN PROBLEM FOR SYSTEM OF WEAKLY NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS OF HIGH ORDER WITH CONSTANT COEFFICIENTS

In the region, which is a Cartesian product of the interval on the unit circle, the boundary value problem with Dirichlet–Neumann conditions in the time variable and the conditions of 2π-periodicity in the spatial coordinate for the system of weakly nonlinear hyperbolic equations of high order with constant coefficients has been investigated. The Banach–Caccioppoli fixed-point theorem has been applied and the conditions for unique solvability for the problem in Sobolev spaces have been established.

Key words: *boundary value problem, Dirichlet–Neumann conditions, system of weakly nonlinear hyperbolic equations, Banach–Caccioppoli fixed-point theorem.*

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано 16.10.19