УДК 512.552.12

А. А. Дмитрук✉

АДЕКВАТНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ У АБЕЛЕВИХ І ДУО-КІЛЬЦЯХ

Доведено, що якщо R – дуо-кільце, в якому 0 є адекватним справа елементом, то R – кільце з властивістю заміни. Також отримано новий опис адекватних справа кілець, що узагальнює відомі результати у комутативних кільцях.

Ключові слова: *адекватне справа кільце, дуо-кільце, абелеве кільце, ідемпотентний стабільний ранг 1.*

Адекватні кільця ввів О. Хелмер як клас кілець, над якими довільна матриця має властивість канонічної діагональної редукції, причому кільце не є нетеровим [6]. Структурна будова таких кілець досліджена недостатньо. В праці [8] показано, що в комутативному адекватному кільці кожен простий ідеал міститься в єдиному максимальному. В праці [1] вперше визначено і досліджено некомутативні адекватні справа кільця. Надалі багато авторів вводять і вивчають всеможливі узагальнення адекватності як у комутативному, так і в некомутативному випадках. Поняття стабільного рангу прийшло в теорію кілець з K-теорії і виявилось корисним для розв'язання деяких відкритих задач. Це поняття вперше ввів Басс [2]. Стабільний ранг зараз досить інтенсивно використовують у задачах діагональної редукції матриць [3, 7, 9, 11, 12]. Запропоновано низку узагальнень цього поняття, серед яких є поняття ідемпотентного рангу один [11]. Нижче встановлено, що дуо-кільце, в якому 0 є адекватним справа елементом, є кільцем з властивістю заміни. Також отримано нове описання адекватних справа кілець, що узагальнює відомі результати про комутативні кільця.

Усюди під кільцем R розумітимемо асоціативне кільце з відмінною від нуля одиницею. Позначимо через $U(R)$ групу оборотних елементів кільця R.

Означення 1. Дуо-кільцем називають кільце R, в якому кожен правий чи лівий ідеал кільця R є двобічним.

Означення 2. Елемент a кільця R називають адекватним справа, якщо для довільного елемента $b \in R$ існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = r \cdot s$, $rR + bR = R$, і для такого довільного елемента $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$.

Означення 3. Кільце R називають правим (лівим) кільцем Безу, якщо кожний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головним. Праве та ліве кільця Безу називають кільцем Безу.

Означення 4. Кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент є адекватним справа, називають адекватним справа кільцем.

Означення 5. Кільце R називають чистим, якщо для довільного елемента $x \in R$ існують такі оборотний елемент $u \in R$ і ідемпотент $e \in R$, що $x = u + e$ [10].

Означення 6. Кільце R називають кільцем з властивістю заміни, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент $e \in R$, що $e \in aR$ і $(1-e) \in (1-a)R$ [6].

Означення 7. Кільце R називають кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, існує такий ідемпотент $e \in R$, що $(a + be) \in U(R)$ [9].

✉ tolikd1488@gmail.com

Означення 8. Кільце R називають абелевим, якщо довільний ідемпотент $e = e^2$ кільця R є центральним [4].

Зазначимо, що клас абелевих кілець містить клас правих (лівих) дуо-кілець.

Теорема 1 [4]. Нехай R − абелеве кільце. Тоді такі твердження еквівалентні:

1. R є чистим кільцем;
2. R є кільцем з властивістю заміни;
3. R є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1.

Теорема 2. Нехай a − адекватний справа елемент дуо-кільця R. Тоді $\bar{0}$ − адекватний справа елемент фактор-кільця $\bar{R} = R / aR$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\bar{b}$ − довільний елемент фактор-кільця $\bar{R} = R/aR$ і b − прообраз елемента $\bar{b} \in R / aR$ за канонічного гомоморфізму $R \to \bar{R}$. Оскільки a − адекватний справа елемент кільця R, то згідно з означенням існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = r \cdot s$, $rR + bR = R$, і для такого довільного елемента $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$. Тоді $\bar{r}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$ і $\bar{s'}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} \neq \bar{R}$. Нехай $\bar{t}$ − необоротний у $\bar{R}$ дільник елемента $\bar{s}$, де $\bar{s}$ − образ елемента s за канонічного гомоморфізму $R \to \bar{R}$. Тоді існує такий $k \in R$, що $(s + ak)R \subset tR$.

Покажемо, що $sR + tR \neq R$. Припустимо, що $sR + tR = R$. Оскільки $(s + ak)R \subset tR$, то $s + ak = tl$ для деякого елемента $l \in R$. З рівностей $s + rsk = tl$, $sk = ps$, $(1 + rp)s = tl = nt$ і $sR + tR = Rs + Rt = R$ випливає, що $(1 + rp)R \subset tR$, тобто $tR + rR = R$. Оскільки $tR + sR = R$ і $tR + rR = R$, то $tR + rsR = R$ і $tR + aR = R$. Це означає, що образ елемента t за канонічного гомоморфізму $R \to \bar{R}$ є оборотний елемент в $\bar{R}$, що суперечить вибору елемента $\bar{t}$. Отже, $sR + tR \neq R$ і $sR + tR = uR$, де u − необоротний елемент. А це означає, що $\bar{u}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} \neq \bar{R}$. Оскільки $\bar{u}$ є лівим дільником елемента $\bar{t}$, то $\bar{t}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} \neq \bar{R}$. Отже, довели, що $\bar{0} = \bar{r}\bar{s}$ є адекватним справа елементом фактор-кільця $\bar{R} = R / aR$. Теорема доведена.

Теорема 3. Нехай R − дуо-кільце Безу, в якому 0 є адекватним справа елементом. Тоді R − кільце ідемпотентного стабільного рангу 1.

Д о в е д е н н я. Нехай $bR + cR + R$. Оскільки 0 є адекватним справа елементом кільця R, то $0 = r \cdot s$, $rR + bR = R$, і для довільного такого елемента $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$. Оскільки $rR + sR = R$, то існують такі елементи $u, v \in R$, що $ru + sv = 1$. Оскільки R є дуо-кільцем, тому $us = su'$ для деякого елемента $s' \in R$. В результаті отримаємо $(ru)^2 = ru(1 - sv) = ru - rsu'v = ru$. Аналогічно $(sv)^2 = sv$. Отже, елементи ru і sv є ідемпотентами. Позначимо $ru = e$. Покажемо, що $b + ce$ − оборотний елемент кільця R. Припустимо, що $(b + ce)R = hR \neq R$. Розглянемо рівність $hR + rR = tR$. Якщо t − необоротний елемент кільця R, то, оскільки $(b + ce)R \subset hR \subset tR$, отримаємо, що $bR \subset tR$. Це неможливо, оскільки $rR \subset tR$ і $bR \subset tR$, але $bR + rR = R$. Звідси випливає, що $hR + rR = R$.

Доведемо, що $hR + sR = R$. Припустимо, що $hR + sR = tR \neq R$. Оскільки t − необоротний лівий дільник елемента s, то згідно з визначенням елемента s одержимо, що $tR + bR = kR \neq R$. З іншого боку, $(b + ce)R = hR$ і $eR + sR = R$, тому маємо $eR + tR = R$, а звідси випливає, що $eR \subset kR$. Але це неможливо, оскільки $bR \subset kR$, але $bR + cR = R$. Отже, наше припущення невірне і тому $sR + hR = R$.

Оскільки $rR + hR = R$, одержимо, що $(rs)R + hR = R$. Тому $0 = rs$, а це означає, що h − оборотний елемент кільця R. Теорема доведена.

З теореми 1, як наслідок, отримаємо такий результат.

Теорема 4. Нехай R − дуо-кільце Безу, в якому 0 є адекватним справа елементом. Тоді:

1. R є чистим кільцем;
2. R є кільцем з властивістю заміни;
3. R є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1.

Нехай тепер R − дуо-область Безу і $\bar{0}$ є адекватним справа елементом фактор-кільця R / aR. Чи буде елемент a адекватним справа елементом області R?

Теорема 5. Нехай R − дуо-область Безу. Якщо $\bar{0}$ − адекватний справа елемент фактор-кільця R / aR, то a − адекватний справа елемент області R.

Д о в е д е н н я. Нехай $\bar{R} = R / aR$. Оскільки нульовий елемент адекватний справа, то існують такі елементи $\bar{r}, \bar{s} \in \bar{R}$, що $\bar{0} = \bar{r} \cdot \bar{s}$, і для довільного елемента $\bar{b} \in \bar{R}$ маємо $\bar{r}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$. Окрім того, для довільного необоротного лівого дільника $\bar{s}'$ елемента $\bar{s}$ маємо, що $\bar{s}'\bar{R} + \bar{b}\bar{R} \neq \bar{R}$. Оскільки $\bar{r}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$, то існують такі елементи $t, u, v \in R$, що $ru + bv = 1 + at$. Для довільних прообразів r, b елементів $\bar{r}, \bar{b}$ за канонічного гомоморфізму $R \to \bar{R}$. Нехай $aR + rR = dR$. Тоді $a = da_0, r = dr_0$ для деяких елементів a_0, r_0 кільця R, причому $a_0R + r_0R = R$. Звідси випливає, що $dR + bR = R$ і $ru - at + bv = 1$. Оскільки $\bar{0} = \bar{r} \cdot \bar{s}$, то $r \cdot s = aw$ для деякого елемента $w \in R$. Оскільки R − дуо-область, то $a_0w = r_0s$. А оскільки $a_0R + r_0R = R$, то існують такі елементи $l, k \in R$, що $a_0k + r_0t = 1$. А це означає, що $a_0ks + r_0ts = s$ і $a_0sk' + r_0st' = s$, тобто $a_0z = s$ для деякого елемента $z \in R$. Отже, одержуємо $a = da_0$, де $dR + bR = R$ і $sR \subset a_0R$.

Нехай j − такий необоротний лівий дільник елемента a_0, що $jR + bR = R$. Звідси випливає, що $\bar{j}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$, а це суперечить умові, що $\bar{j}$ − необоротний лівий дільник елемента $\bar{s}$. Зауважимо, що в $\bar{R}$ оборотними елементами є ті, прообрази яких за канонічного гомоморфізму $R \to \bar{R}$ взаємно прості зліва з a. Це суперечить твердженню $a_0R \subset jR$ і свідчить, що $dR + bR = R$ і $a_0'R + bR \neq R$ для довільного необоротного лівого дільника a_0' елемента a_0. Враховуючи ту обставину, що b − довільний елемент області R, одержуємо, що a − адекватний справа елемент області R. Теорема доведена.

Як очевидний наслідок маємо такий результат.

Теорема 6. Нехай R − дуо-область Безу, в якій для довільного необоротного і ненульового елемента a фактор-кільце R / aR є кільцем, в якому $\bar{0}$ − адекватний справа елемент. Тоді R − адекватна справа область.

1. *Гаталевич А. І.* Про адекватні праві дуо-кільця // Вісник Львів. ун-ту. – 1996. – **43**. – С. 16–19.
2. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. IHES. – 1964. – **22**. – P. 5–60.
3. *Camillo V. P., Yu H. P.* Exchange rings, units and idempotents // Commun. Algebra. – 1994. – **22**, No. 12. – P. 4737–4749. – https://doi.org/10.1080/00927879408825098
4. *Chen H.* Rings with many idempotents // Int. J. Math. Math. Sci. – 1999. – **22**, No. 3. – P. 547–558. – https://doi.org/10.1155/S0161171299225471
5. *Goodearl K. R., Menal P.* Stable range one for rings with many units // J. Pure Appl. Algebra. – 1988. – **54**, No. 2-3. – P. 261–287. – https://doi.org/10.1016/0022-4049(88)90034-5
6. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, No. 4. – P. 225–236.
7. *Lam T. Y.* Serre's Conjecture. – Berlin: Springer, 1978. – P. 167–204.
8. *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**. – P. 231–248.
9. *McGovern W. W.* Neat rings // J. Pure Appl. Algebra. – 2006. – **205**, No. 2. – P. 243–265. – https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2005.07.012
10. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – **229**. – P. 269–278. – https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1977-0439876-2
11. *Zabavsky B.* Diagonalizability theorems for matrices over rings with finite stable range // Algebra Discrete Math. – 2005. – No. 1. – P. 151–165.
12. *Zabavsky B.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank // Visn. Lviv. Univ. Ser. Mech. Math. – 2003. – **61**. – P. 206–210.

АДЕКВАТНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТОВ В АБЕЛЕВЫХ И ДУО-КОЛЬЦАХ

Доказано, что если R – дуо-кольцо, в котором ноль является адекватным справа элементом, то R – кольцо со свойством замены. Также получено новое описание адекватных справа колец, которое обобщает известные результаты о коммутативных кольцах.

Ключевые слова: *адекватное справа кольцо, дуо-кольцо, абелевое кольцо, идемпотентный стабильный ранг 1.*

ADEQUATE PROPERTIES OF ELEMENTS IN ABELIAN AND DUO-RINGS

It is proved that if R is a duo-ring in which zero is a right adequate element, then R is an exchange ring. A new description of right adequate rings is also obtained, which generalizes the known results on commutative rings.

Key words: *right adequate ring, duo ring, abelian ring, idempotent stable range 1.*

Львів. нац. ун-т
ім. Івана Франка, Львів

Одержано
11.11.19