https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.83-92

УДК 539.3

Ю. В. Токовий[✉], Д. С. Бойко

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ

Запропоновано методику зведення тривимірної задачі теорії пружності для однорідного трансверсально ізотропного півпростору до ключових інтегральних рівнянь другого роду для окремих компонент тензора напружень. З використанням методу резольвентного ядра отримано явні розв'язки цих рівнянь у просторі подвійного інтегрального перетворення Фур'є. Форма побудованого розв'язку не залежить від співвідношень між пружними модулями матеріалу, що дає можливість зокрема забезпечити згасання компонент тензора напружень у нескінченно віддалених від межі точках півпростору для різних класів трансверсально ізотропних матеріалів.

***Ключові слова**: однорідний півпростір, трансверсально ізотропний матеріал, інтегральні рівняння, резольвентне ядро, явний розв'язок.*

Вступ. Побудова розв'язків задач теорії пружності для тіл з ознаками просторової анізотропії складніша, ніж для ізотропних тіл, внаслідок наявності відмінних у різних просторових напрямках модулів матеріалу в конституційних рівняннях моделі. Зокрема, такі ускладнення виникають під час вивчення локальних ефектів від місцевого силового навантаження, коли шукані розв'язки повинні мати згасальну асимптотичну поведінку з віддаленням від навантаженої області. Для побудови розв'язків з такими властивостями потрібно володіти повною інформацією про тип та кратність власних чисел ключових характеристичних рівнянь. Для анізотропних матеріалів ці власні числа виражені через коефіцієнти ключових рівнянь, які, у свою чергу, визначені через пружні модулі. Наприклад, для просторової задачі теорії пружності для однорідного трансверсально ізотропного півпростору $\mathcal{HS} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+\}$ за відсутності масових сил ключове рівняння для трансверсальних напружень $\sigma_{zz}(x,y,z)$ отримали у вигляді [4]

$$\left\langle \Delta_{xy}\left(\Delta_{xy} - \frac{E_z}{E_z+\nu_z^2 E}\left(\frac{E_z}{G_z} - \nu_z\frac{E}{G}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1-\nu^2}{E_z+\nu_z^2 E}\frac{E_z^2}{E}\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right\rangle \sigma_{zz} = 0\,, \tag{1}$$

де $\Delta_{xy} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, E, E_z і $G = E/(2+2\nu)$, G_z – модулі пружності і зсуву у площині ізотропії, паралельній до площини $z=0$, та у перпендикулярному до неї напрямку; ν та ν_z – відповідні коефіцієнти Пуассона. Характеристичне рівняння, що відповідає (1), у просторі подвійного інтегрального перетворення Фур'є за координатами x та y має вигляд

$$æ^4 - 2a_1 s^2 æ^2 + a_2 s^4 = 0, \tag{2}$$

де

$$a_1 = \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{G}{G_z} - \nu_z\frac{E}{E_z}\right), \quad a_2 = \frac{1}{1-\nu^2}\left(1-\nu_z^2\frac{E}{E_z}\right)\frac{E}{E_z}, \tag{3}$$

✉ tokovyy@iapmm.lviv.ua

а s визначено через параметри інтегрального перетворення s_x та s_y відповідно у напрямках x та y за формулою

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2. \tag{4}$$

Форма розв'язку рівняння (1), яка забезпечуватиме згасання при $z \to \infty$, залежить від поведінки власних чисел $æ$, визначених з рівняння (2) за формулами

$$æ^{\pm} = \pm s\sqrt{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - a_2}}. \tag{5}$$

Залежно від співвідношень між пружними модулями в коефіцієнтах (3) власні числа (5) можуть бути дійсними або комплексними, простими або кратними, що вимагає окремого аналізу кожного з випадків. Цей факт суттєво ускладнює побудову загального розв'язку задачі, який би задовольняв ключові рівняння, вихідні умови та мав універсальну аналітичну форму для усіх фізично можливих модулів трансверсально ізотропних матеріалів.

У статті запропоновано методику зведення ключових рівнянь тривимірної задачі теорії пружності для однорідного трансверсально ізотропного півпростору до інтегральних рівнянь другого роду. З використанням методу резольвентного ядра побудовано явні розв'язки цих рівнянь, які мають однакову аналітичну форму для всіх можливих типів трансверсально ізотропних матеріалів та забезпечують згасання у точках, безмежно віддалених від межі півпростору.

1. **Формулювання задачі**. Розглянемо тривимірну задачу про пружну рівновагу трансверсально ізотропного півпростору $\mathcal{HS}$, площина ізотропії якого є паралельною до межі $z = 0$. Компоненти симетричного тензора напружень $\sigma_{t\ell}$, $\{t, \ell\} = \{x, y, z\}$, визначатимемо з рівнянь рівноваги [2]

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \tag{6}$$

застосовуючи рівняння суцільності для деформацій $\varepsilon_{t\ell}$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{tt}}{\partial \ell^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\ell\ell}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{t\ell}}{\partial \ell \partial t},$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{tt}}{\partial \ell \partial k} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varepsilon_{t\ell}}{\partial k} - \frac{\partial \varepsilon_{\ell k}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{tk}}{\partial \ell}\right), \quad \{\ell, t, k\} = \{x, y, z\} \tag{7}$$

та фізичні співвідношення

$$\varepsilon_{\ell\ell} = \frac{\sigma_{\ell\ell} - \nu\sigma_{tt}}{E} - \frac{\nu_z \sigma_{zz}}{E_z}, \quad \varepsilon_{\ell z} = \frac{\sigma_{\ell z}}{G_z}, \quad \{\ell, t\} = \{x, y\}, \quad \ell \neq t,$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E_z} - \nu_z \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{E_z}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}. \tag{8}$$

Тут div – оператор дивергенції, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{\ell t}\}$ – тензор напружень. Вважаємо, що на обмежувальну поверхню півпростору $\mathcal{HS}$ діють нормальні та дотичні силові навантаження

$$\sigma_{zz}\big|_{z=0} = -p, \quad \sigma_{xz}\big|_{z=0} = q_x, \quad \sigma_{yz}\big|_{z=0} = q_y, \tag{9}$$

де $p(x, y), q_x(x, y), q_y(x, y)$ – задані функції, що згасають при $x^2 + y^2 \to \infty$.

У працях [4, 5] за допомогою методу безпосереднього інтегрування [8] рівняння (6)–(8) зведено до системи ключових рівнянь у напруженнях:

$$\Delta^+ \Delta^- \sigma_{zz} - \mu^+ \mu^- \Delta_{xy} \Delta_1 \sigma_{zz} = 0, \tag{10}$$

$$\Delta^{+}\sigma_{zz} = \mu^{+}\Delta_{xy}\sigma, \tag{11}$$

$$\Delta_{xy}\sigma_{yy} + \mu_1 \frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial z^2} = \frac{\mu_2 - \mu^{+}}{\mu^{+}}\Delta\sigma_{zz} + (1-\mu_2)\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} +$$

$$+(\mu_1 - \mu_2)\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\mu_2}{\mu^{-}}\sigma + (1-\mu_3)\sigma_{zz}\right), \tag{12}$$

$$2\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2}, \tag{13}$$

де

$$\Delta = \Delta_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_1 = (\mu_4 - 1)\Delta_{xy} + 2\frac{\mu^{+} - \mu_2}{\mu_2\mu^{+}}\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\Delta^{\pm} = \Delta_{xy} \pm (1 \pm \nu)\mu^{\pm}\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \mu^{\pm} = \frac{E_z}{\nu_z E \pm E_z},$$

$$\mu_1 = \frac{G_z}{G}, \quad \mu_2 = 2\frac{G_z}{E}, \quad \mu_3 = 2G_z\frac{1+\nu_z}{E_z}, \quad \mu_4 = \frac{E}{E_z},$$

та

$$\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}. \tag{14}$$

Ще два рівняння для визначення σ_{xz} та σ_{yz} через нормальні напруження можна отримати з (13) циклічним переставлянням індексів. З використанням рівняння рівноваги (6) крайові умови (9) для дотичних напружень можна звести до відповідних умов для похідної від нормальних напружень:

$$\left.\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y}. \tag{15}$$

Як зазначено вище, побудова точних аналітичних розв'язків рівнянь (10)–(13) з нульовою асимптотикою за безмежного віддалення від межі $z = 0$ зустрічає низку математичних ускладнень через наперед невідомі співвідношення між пружними модулями конкретного трансверсально ізотропного матеріалу [4]. Нижче наведено універсальну методику розв'язання системи рівнянь (10)–(13) для півпростору шляхом зведення її до інтегральних рівнянь другого роду.

2. **Побудова розв'язку**. Розв'язок рівнянь (10)–(13) будуємо у просторі подвійного інтегрального перетворення Фур'є [6]:

$$\overline{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\exp(-i(xs_x + ys_y))dxdy, \quad i^2 = -1, \tag{16}$$

де s_x і s_y – параметри перетворення відповідно за координатами x і y.

У просторі перетворення (16) рівняння (10) набуває вигляду

$$\left\langle \frac{d^4}{dz^4} - 2a_1 s^2\frac{d^2}{dz^2} + a_2 s^4 \right\rangle \overline{\sigma}_{zz} = 0, \tag{17}$$

а умови (9) та (15) для нормальних напружень –

$$\overline{\sigma}_{zz}(0) = -\overline{p}, \qquad \left.\frac{d\overline{\sigma}_{zz}}{dz}\right|_{z=0} = -i(s_x\overline{q}_x + s_y\overline{q}_y). \tag{18}$$

Тут коефіцієнти a_1 та a_2 подано виразами (3), s – формулою (4).

Запишемо рівняння (17) у вигляді

$$\left\langle \frac{d^4}{dz^4} - 2s^2 \frac{d^2}{dz^2} + s^4 \right\rangle \bar{\sigma}_{zz} = 2s^2(a_1 - 1)\frac{d^2\bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} + s^4(1 - a_2)\bar{\sigma}_{zz} . \tag{19}$$

Зауважимо, що ліва частина рівняння (19) відповідає ізотропному матеріалу, для якого права частина цього рівняння дорівнює нулеві. Розв'язок рівняння (19) відносно його лівої частини, який згасає в безмежно віддалених точках, має вигляд:

$$\bar{\sigma}_{zz}(z) = (A + zB)\exp(-|s|z) + \frac{|s|}{4}\int_0^{+\infty}(a_1^* + |s|a_2^*|z-\zeta|)\times \exp(-|s||z-\zeta|)\bar{\sigma}_{zz}(\zeta)d\zeta , \tag{20}$$

де

$$a_1^* = 3 - \frac{2}{1-\nu}\left(\left(\frac{1}{G_z} + \frac{1}{E_z}\right)G - \nu_z\left(1 + \nu_z\frac{G}{E_z}\right)\frac{E}{E_z}\right),$$

$$a_2^* = -1 + \frac{2}{1-\nu}\left(\left(\frac{1}{G_z} - \frac{1}{E_z}\right)G - \nu_z\left(1 - \nu_z\frac{G}{E_z}\right)\frac{E}{E_z}\right).$$

Після визначення сталих інтегрування A та B шляхом підстановки виразу (20) в умови (18) отримаємо інтегральне рівняння другого роду для напружень $\bar{\sigma}_{zz}$:

$$\bar{\sigma}_{zz}(z) = -((1+|s|z)\bar{p} + i(s_x\bar{q}_x + s_y\bar{q}_y)z)\exp(-|s|z) + \int_0^{+\infty}\bar{\sigma}_{zz}(\zeta)\mathcal{K}_z(z,\zeta)d\zeta , \tag{21}$$

де

$$\mathcal{K}_z(z,\zeta) = \frac{|s|}{4}\Big((|s|a_2^*z - (1 + 2|s|z)(a_1^* + |s|a_2^*\zeta))\exp(-|s|(z+\zeta)) + (a_1^* + |s|a_2^*|z-\zeta|)\exp(-|s||z-\zeta|)\Big).$$

Розв'язок рівняння (21) побудуємо за допомогою методу резольвентного ядра [1], внаслідок чого знайдемо напруження $\bar{\sigma}_{zz}$:

$$\bar{\sigma}_{zz}(z) = -\bar{p} f_z^p(z) - i(s_x\bar{q}_x + s_y\bar{q}_y) f_z^q(z) , \tag{22}$$

де

$$f_z^p(z) = (1+|s|z)\exp(-|s|z) + \int_0^{+\infty}(1+|s|\zeta)\exp(-|s|\zeta)\mathcal{R}_z(z,\zeta)d\zeta ,$$

$$f_z^q(z) = z\exp(-|s|z) + \int_0^{+\infty}\zeta\exp(-|s|\zeta)\mathcal{R}_z(z,\zeta)d\zeta ,$$

а резольвентне ядро $\mathcal{R}_z(z,\zeta)$ подамо у вигляді

$$\mathcal{R}_z(z,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}_{m+1}^z(z,\zeta)\,, \tag{23}$$

де

$$\mathcal{K}_1^z(z,\zeta) = \mathcal{K}_z(z,\zeta), \quad \mathcal{K}_{m+1}^z(z,\zeta) = \int_0^{+\infty} \mathcal{K}_1^z(z,\xi)\mathcal{K}_m^z(\xi,\zeta)d\xi, \quad m = 1,2,\ldots.$$

Сумарні напруження (14) нескладно знайти за нормальними напруженнями (22) за допомогою рівняння (11), яке у просторі перетворення (16) набуде вигляду

$$\bar{\sigma}(z) = \left(1 + \nu_z \frac{E}{E_z}\right)\bar{\sigma}_{zz}(z) - \frac{1+\nu}{s^2}\frac{d^2\bar{\sigma}_{zz}(z)}{dz^2}\,. \tag{24}$$

З урахуванням (17) та (24) рівняння (12) подамо у просторі перетворення (16) так:

$$\left\langle \frac{d^2}{dz^2} - (s\kappa)^2 \right\rangle \bar{\sigma}_{yy} = \frac{d_1}{s^2}\frac{d^2\bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} + d_2\bar{\sigma}_{zz}\,, \tag{25}$$

де

$$d_1 = \frac{E}{2}\left(\frac{s^2}{1-\nu}\left(\frac{\nu_z}{G}\frac{E}{E_z} - \frac{1}{G_z}\right) + \frac{s_x^2}{G_z} + 2\frac{\nu_z}{E_z}s_y^2\right),$$

$$d_2 = \frac{E}{E_z}\left(\left(1-\nu_z^2\frac{E}{E_z}\right)\frac{s_y^2 + \nu s_x^2}{1-\nu^2} - s_x^2\nu_z\frac{G}{G_z}\right), \quad \kappa^2 = \frac{G}{G_z}\,.$$

Перенесемо у праву частину рівняння (25) складову, залежну від властивостей матеріалу. У результаті отримаємо:

$$\left\langle \frac{d^2}{dz^2} - s^2 \right\rangle \bar{\sigma}_{yy}(s) = s^2(\kappa^2 - 1)\bar{\sigma}_{yy}(z) + \bar{p}\varphi_p(z) +$$
$$+ i(s_x\bar{q}_x + s_y\bar{q}_y)\varphi_q(z)\,, \tag{26}$$

де

$$\varphi_\eta(z) = -\frac{d_1}{s^2}\frac{d^2 f_z^\eta(z)}{dz^2} - d_2 f_z^\eta(z), \quad \eta = \{p,q\}\,.$$

Як і у рівнянні (19), ліва частина рівняння (26) відповідає ізотропному матеріалу. Розв'язок рівняння (26) має вигляд

$$\bar{\sigma}_{yy}(z) = C\exp(-|s|z) - \bar{p}\varphi_y^p(z) - i(s_x\bar{q}_x + s_y\bar{q}_y)\varphi_y^q(z) -$$
$$-|s|\frac{\kappa^2-1}{2}\int_0^{+\infty}\bar{\sigma}_{yy}(\zeta)\exp(-|s||z-\zeta|)d\zeta\,, \tag{27}$$

де

$$\varphi_y^\eta(z) = \frac{1}{2|s|}\int_0^{+\infty}\varphi_\eta(\zeta)\exp(-|s||z-\zeta|)d\zeta\,.$$

Для визначення сталої C використаємо інтегральну умову [4]

$$\int_{-\infty}^{x}\left(\varepsilon_{xz}(\xi,y,0) - \int_{-\infty}^{\xi}\frac{\partial\varepsilon_{xx}(\xi_1,y,0)}{\partial z}d\xi_1\right)d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \left(\varepsilon_{yz}(x,\eta,0) - \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\partial \varepsilon_{yy}(x,\eta_1,0)}{\partial z} d\eta_1 \right) d\eta \,,$$

яка у просторі перетворення (16) з урахуванням співвідношень (8), виразу (14) та умов (18) буде:

$$\left.\frac{d\bar{\sigma}_{yy}}{dz}\right|_{z=0} - \frac{s_y^2 + \nu s_x^2}{s^2(1+\nu)} \left.\frac{d\bar{\sigma}}{dz}\right|_{z=0} = i(s_x q^+ \bar{q}_x + s_x q^- \bar{q}_x) \,, \qquad (28)$$

де

$$q^+ = \frac{1}{s^2}\left(s_x^2 \frac{E}{G_z} + s_y^2 + \nu s_x^2 + (s_y^2 - s_x^2)\nu_z \frac{E}{E_z} \right) \frac{1}{1+\nu} \,,$$

$$q^- = \frac{1}{s^2}\left(-s_y^2 \frac{E}{G_z} + s_y^2 + \nu s_x^2 + (s_y^2 - s_x^2)\nu_z \frac{E}{E_z} \right) \frac{1}{1+\nu} \,.$$

Підставивши вирази (24) та (27) в умову (28), визначимо сталу C, після чого для напружень $\bar{\sigma}_{yy}$ встановимо інтегральне рівняння другого роду:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{yy}(z) = {} & -(\varphi_y^p(z) - p_0 \exp(-|s|z))\bar{p} - \\ & - i s_x (\varphi_y^q(z) - q_0^- \exp(-|s|z))\bar{q}_x - \\ & - i s_y (\varphi_y^q(z) - q_0^+ \exp(-|s|z))\bar{q}_y + \\ & + \int_0^{+\infty} \bar{\sigma}_{yy}(\zeta) \mathcal{K}_y(z,\zeta) d\zeta \,. \end{aligned} \qquad (29)$$

Тут

$$p_0 = \frac{1}{|s|}\left(\frac{s_y^2 + \nu s_x^2}{s^2(1+\nu)} \left(\left(1 + \nu_z \frac{E}{E_z}\right) f_z^p(0) - \frac{1+\nu}{s^2} \left.\frac{d^2 f_z^p}{dz^2}\right|_{z=0} \right) - \left.\frac{d\varphi_y^p}{dz}\right|_{z=0} \right),$$

$$q_0^{\pm} = \frac{1}{|s|}\left(\frac{s_y^2 + \nu s_x^2}{s^2(1+\nu)} \left(\left(1 + \nu_z \frac{E}{E_z}\right) f_z^q(0) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1+\nu}{s^2} \left.\frac{d^2 f_z^q}{dz^2}\right|_{z=0} \right) - \left.\frac{d\varphi_y^q}{dz}\right|_{z=0} - q^{\pm} \right),$$

$$\mathcal{K}_y(z,\zeta) = |s| \frac{1-\kappa^2}{2} (\exp(-|s|(z+\zeta)) + \exp(-|s||z-\zeta|)) \,.$$

З використанням методу резольвентного ядра знаходимо розв'язок інтегрального рівняння (29) у вигляді

$$\bar{\sigma}_{yy}(z) = -\bar{p} f_y^p(z) - i s_x \bar{q}_x f_y^{q-}(z) - i s_y \bar{q}_y f_y^{q+}(z) \,, \qquad (30)$$

де

$$f_y^p(z) = \varphi_y^p(z) - p_0 \exp(-|s|z) + $$

$$+ \int_0^{+\infty} (\varphi_y^p(\zeta) - p_0 \exp(-|s|\zeta)) \mathcal{R}_y(z,\zeta) d\zeta \,,$$

$$f_y^{q\pm}(z) = \varphi_y^q(z) - q_0^{\pm} \exp(-|s|z) +$$

$$+\int_0^{+\infty} (\varphi_y^q(\zeta) - q_0^{\pm}\exp(-|s|\zeta))\mathcal{R}_y(z,\zeta)d\zeta\,,$$

а резольвента

$$\mathcal{R}_y(z,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}_{m+1}^y(z,\zeta)\,, \tag{31}$$

де

$$\mathcal{K}_1^y(z,\zeta) = \mathcal{K}_y(z,\zeta), \quad \mathcal{K}_{m+1}^y(z,\zeta) = \int_0^{+\infty} \mathcal{K}_1^y(z,\xi)\mathcal{K}_m^y(\xi,\zeta)d\xi, \quad m = 1,2,\ldots .$$

Знайшовши вирази (22) і (30) для напружень $\overline{\sigma}_{zz}(z)$ і $\overline{\sigma}_{yy}(z)$ відповідно, використаємо формули (14) і (24) для знаходження $\overline{\sigma}_{xx}(z)$:

$$\overline{\sigma}_{xx}(z) = \nu_z \frac{E}{E_z}\overline{\sigma}_{zz}(z) - \frac{1+\nu}{s^2}\frac{d^2\overline{\sigma}_{zz}(z)}{dz^2} - \overline{\sigma}_{yy}(z)\,,$$

звідки

$$\overline{\sigma}_{xx}(z) = -\overline{p}f_x^p(z) - is_x\overline{q}_x f_x^{q-}(z) - is_y\overline{q}_y f_x^{q+}(z)\,. \tag{32}$$

Тут

$$f_x^p(z) = \nu_z \frac{E}{E_z} f_z^p(z) - \frac{1+\nu}{s^2}\frac{d^2 f_z^p(z)}{dz^2} - f_y^p(z)\,,$$

$$f_x^{q\pm}(z) = \nu_z \frac{E}{E_z} f_z^q(z) - \frac{1+\nu}{s^2}\frac{d^2 f_z^q(z)}{dz^2} - f_y^{q\pm}(z)\,.$$

Для знаходження дотичних напружень використаємо рівняння (13) та ще два рівняння, отримані з нього циклічним переставленням індексів, які у просторі інтегрального перетворення (16) з урахуванням умов (9) для дотичних напружень набудуть вигляду

$$\overline{\sigma}_{xy}(z) = -\frac{1}{2s_xs_y}\left(s_x^2\overline{\sigma}_{xx}(z) + s_y^2\overline{\sigma}_{yy}(z) + \frac{d^2\overline{\sigma}_{zz}(z)}{dz^2}\right),$$

$$\overline{\sigma}_{yz}(z) = \frac{\overline{q}_y}{2} + \frac{i}{4s_y}\int_0^{+\infty}\left(s_x^2\overline{\sigma}_{xx}(\zeta) - s_y^2\overline{\sigma}_{yy}(\zeta) + \frac{d^2\overline{\sigma}_{zz}(\zeta)}{d\zeta^2}\right)\mathrm{sgn}(z-\zeta)d\zeta, \tag{33}$$

$$\overline{\sigma}_{xz}(z) = \frac{\overline{q}_x}{2} + \frac{i}{4s_x}\int_0^{+\infty}\left(s_y^2\overline{\sigma}_{yy}(\zeta) - s_x^2\overline{\sigma}_{xx}(\zeta) + \frac{d^2\overline{\sigma}_{zz}(\zeta)}{d\zeta^2}\right)\mathrm{sgn}(z-\zeta)d\zeta.$$

З використанням виразів (22), (30) та (32) дотичні напруження (33) подамо так:

$$\begin{aligned}&\overline{\sigma}_{xy}(z) = -\overline{p}f_{xy}^p(z) - is_x\overline{q}_x f_{xy}^{q-}(z) - is_y\overline{q}_y f_{xy}^{q+}(z),\\ &\overline{\sigma}_{\eta z}(z) = -\overline{p}f_{\eta z}^p(z) - is_x\overline{q}_x f_{\eta z}^{q-}(z) - is_y\overline{q}_y f_{\eta z}^{q+}(z), \quad \eta = \{x,y\}.\end{aligned} \tag{34}$$

Вирази для складових виразів (34) наведено у додатку.

Знайшовши компоненти тензора напружень у вигляді виразів (22), (30), (32) та (34) у просторі інтегрального перетворення Фур'є (16), відтворимо їх у фізичній області за допомогою оберненого перетворення Фур'є [6]

$$f(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(z)\exp(i(xs_x + ys_y))ds_xds_y.$$

У такий спосіб побудували розв'язок тривимірної задачі теорії пружності для трансверсально ізотропного півпростору $\mathcal{HS}$. Форма розв'язку не залежить від співвідношення між пружними модулями матеріалу. Зауважимо, що для практичних обчислень безмежні ряди у виразах (23), (31) для резольвентних ядер $\mathcal{R}_z(z,\zeta)$ та $\mathcal{R}_y(z,\zeta)$ можна замінити [1] скінченними початковими сумами:

$$\mathcal{R}_z(z,\zeta) \simeq \mathcal{R}_z^N(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{N_z} \mathcal{K}_{k+1}^z(z,\zeta),$$

$$\mathcal{R}_y(z,\zeta) \simeq \mathcal{R}_y^N(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{N_y} \mathcal{K}_{k+1}^y(z,\zeta), \qquad (35)$$

де N_z, N_y – натуральні числа, які визначають за допомогою числового експерименту, або аналітичної методики [3].

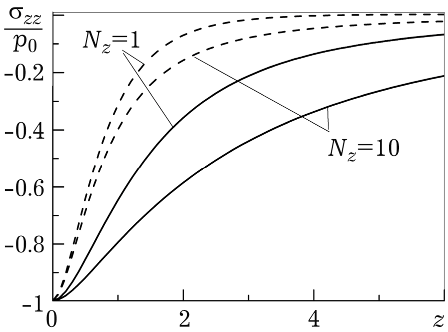
Пружні модулі трансверсально ізотропних матеріалів [7, 9]

Матеріал	E [ГПа]	E_z [ГПа]	ν	ν_z	G [ГПа]	G_z [ГПа]
60%-волокн. композит	9.95	141.1	0.5	0.27	3.32	6
Гексагональний цинк	13.56	5.04	0.21	0.17	5.6	3.85

3. **Числовий приклад**. Реалізуємо запропоновану методику для розрахунку напружень у трансверсально ізотропному півпросторі з властивостями, наведеними у таблиці, за нормального силового навантаження (9) межі $z = 0$, де

$$p(x,y) = p_0 \exp(-a_0 x^2 - b_0 y^2), \quad q_x(x,y) = q_y(x,y) = 0\,.$$

Зауважимо, що для 60%-волокнистого композиту власні числа (5) рівняння (1) є дійсними різними ($\text{æ}_1^{\pm} = \pm 0.212 s$, $\text{æ}_2^{\pm} = \pm 1.446 s$), а для гексагонального цинку – комплексно спряженими ($\text{æ}_1^{\pm} = (\pm 1.199 - 0.416 i) s$, $\text{æ}_2^{\pm} = (\pm 1.199 + 0.416 i) s$). На рисунку наведено розподіли осьових напружень σ_{zz}, розрахованих при $x = y = 0$ та $a_0 = b_0 = 1$ за формулою (22) з резольвентою (35), в якій враховано $N_z = 1$ та $N_z = 10$ членів. За використання резольвенти з $N_z = 10$ результати розрахунків збігаються з точними розв'язками [4], що вказує на ефективність запропонованої методики для різних типів трансверсально ізотропних матеріалів.



Безрозмірні напруження σ_{zz}/p_0 при $x = y = 0$ та $a_0 = b_0 = 1$ для 60%-волокнистого композиту (суцільні криві) та гексагонального цинку (штрихові лінії)

Висновки. Розвинуто методику розв'язування тривимірних задач теорії пружності для трансверсально ізотропного півпростору, яка дає можливість отримати універсальну форму розв'язків для різних співвідношень між пружними модулями. З використанням методу безпосереднього інтегрування вихідні задачі зведено до ключових рівнянь для окремих компонент тензора напружень з відповідними крайовими умовами на межі півпростору. Для побудови універсальної форми розв'язків отримані ключові рівняння зведено до інтегральних рівнянь другого роду, явні розв'язки яких знайдено з використанням резольвент, побудованих у вигляді безмежних сум повторних ядер. Для обчислення напружень безмежні ряди у виразах для резольвент замінено початковими сумами. Виявлено швидку збіжність побудованих розв'язків зі збільшенням кількості доданків у вказаних початкових сумах для різних співвідношень між пружними модулями трансверсально ізотропних матеріалів. Таку збіжність можна пояснити, зокрема, вдалим початковим наближенням (коли резольвенти взято тотожно рівними нулю), що відповідає випадку ізотропного матеріалу.

Додаток. Вирази складових дотичних напружень (34):

$$f_{xy}^{p}(z) = -\frac{s_x}{2s_y} f_x^{p}(z) - \frac{s_y}{2s_x} f_y^{p}(z) - \frac{1}{2s_x s_y}\frac{d^2 f_z^{p}(z)}{dz^2},$$

$$f_{xy}^{q\pm}(z) = -\frac{s_x}{2s_y} f_x^{q\pm}(z) - \frac{s_y}{2s_x} f_y^{q\pm}(z) - \frac{1}{2s_x s_y}\frac{d^2 f_z^{q}(z)}{dz^2},$$

$$f_{yz}^{p}(z) = \frac{i}{4s_y}\int_0^{+\infty}\left(s_x^2 f_x^{p}(\zeta) - s_y^2 f_y^{p}(\zeta) + \frac{d^2 f_z^{p}(\zeta)}{d\zeta^2}\right)\operatorname{sgn}(z-\zeta)\,d\zeta,$$

$$f_{yz}^{q-}(z) = \frac{i}{4s_y}\int_0^{+\infty}\left(s_x^2 f_x^{q-}(\zeta) - s_y^2 f_y^{q-}(\zeta) + \frac{d^2 f_z^{q}(\zeta)}{d\zeta^2}\right)\operatorname{sgn}(z-\zeta)\,d\zeta,$$

$$f_{yz}^{q+}(z) = \frac{i}{4s_y}\int_0^{+\infty}\left(s_x^2 f_x^{q+}(\zeta) - s_y^2 f_y^{q+}(\zeta) + \frac{d^2 f_z^{q}(\zeta)}{d\zeta^2}\right)\operatorname{sgn}(z-\zeta)\,d\zeta + \frac{i}{2s_y},$$

$$f_{xz}^{p}(z) = \frac{i}{4s_x}\int_0^{+\infty}\left(s_y^2 f_y^{p}(\zeta) - s_x^2 f_x^{p}(\zeta) + \frac{d^2 f_z^{p}(\zeta)}{d\zeta^2}\right)\operatorname{sgn}(z-\zeta)\,d\zeta,$$

$$f_{xz}^{q-}(z) = \frac{i}{4s_x}\int_0^{+\infty}\left(s_y^2 f_y^{q-}(\zeta) - s_x^2 f_x^{q-}(\zeta) + \frac{d^2 f_z^{q}(\zeta)}{d\zeta^2}\right)\operatorname{sgn}(z-\zeta)\,d\zeta + \frac{i}{2s_x},$$

$$f_{xz}^{q+}(z) = \frac{i}{4s_x}\int_0^{+\infty}\left(s_y^2 f_y^{q+}(\zeta) - s_x^2 f_x^{q+}(\zeta) + \frac{d^2 f_z^{q}(\zeta)}{d\zeta^2}\right)\operatorname{sgn}(z-\zeta)\,d\zeta.$$

1. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справ. пособ. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
3. *Токова Л. П., Ясінський А. В.* Наближений розв'язок одновимірної задачі теорії пружності для неоднорідного суцільного циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 59, № 4. – С. 107–112.
   Те саме: *Tokova L. P., Yasinskyy A. V.* Approximate solution of the one-dimensional problem of the theory of elasticity for an inhomogeneous solid cylinder // J. Math. Sci. – 2018. – 228. – P. 133–141.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3611-1.
4. *Токовий Ю. В., Бойко Д. С.* Безпосереднє інтегрування ключових рівнянь тривимірної задачі для трансверсально-ізотропного півпростору // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2019. – Вип. 17. – С. 51–59,
   https://doi.org/10.15407/apmm2019.17.51-59
5. *Токовий Ю. В., Бойко Д. С.* Розв'язок тривимірної задачі теорії пружності для необмеженого трансверсально-ізотропного тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 4. – С. 88–99.
6. *Brigham E. O.* The fast Fourier transform and applications. – New York: Prentice–Hall Inc., 1988. – 448 p.

7. *Ding H., Chen W., Zhang L.* Elasticity of transversely isotropic materials. – Dordrecht: Springer, 2006. – 436 p., https://doi.org/10.1007/1-4020-4034-2.
8. *Tokovyy Yu. V.* Direct integration method // In: Encyclopedia of thermal stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht: Springer, 2014. – Vol. 2 – P. 951–960, https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_621
9. *Tokovyy Yu. V.* Direct integration of three-dimensional thermoelasticity equations for a transversely isotropic layer // J. Thermal Stresses. – 2019. – 42, No. 1. – P. 49–64, https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1526150.

INTEGRAL EQUATIONS OF A THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY PROBLEM FOR A HOMOGENEOUS TRANSVERSELY ISOTROPIC HALF-SPACE

A method for reducing the three-dimensional problem of the theory of elasticity for a homogeneous transversely isotropic half-space to key integral equations of the second kind for individual components of the stress tensor is proposed. Using the resolvent kernel method, we obtain explicit solutions of these equations in the space of the double integral Fourier transform. The shape of the solution constructed in this way does not depend on the relationships between the elastic modules of the material, which allows, in particular, to ensure the attenuation of the components of the stress tensor at infinitely distant points of the half-space for various types of transversely isotropic materials.

Key words: homogeneous half-space, transversely isotropic material, integral equations, resolvent kernel, explicit solution.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.10.20