https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.93-101

УДК 539.3

Б. В. Процюк ✉

СПОСІБ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ

Запропоновано методику визначення температурних полів у півпросторі з урахуванням теплового випромінювання, температурної залежності теплофізичних характеристик, густин поверхневих та об'ємних джерел тепла за нерівномірного розподілу початкової температури. Задачі теплопровідності з використанням перетворення Кірхгофа, функції Ґріна, узагальнених функцій і лінійних сплайнів зведено до розв'язання рекурентного нелінійного алгебричного рівняння відносно значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на обмежувальній поверхні. Наведено результати числових досліджень.

***Ключові слова**: термочутливий півпростір, теплове випромінювання, нестаціонарне температурне поле, перетворення Кірхгофа, функція Ґріна, лінійні сплайни.*

У праці [2] нелінійні задачі теплопровідності для півпростору з використанням перетворення Кірхгофа, функції Ґріна, узагальнених функцій і лінійних сплайнів зведено до розв'язання рекурентних систем нелінійних алгебричних рівнянь відносно значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на обмежувальній поверхні та значень її похідної за часом на внутрішніх плоско-паралельних поверхнях.

У цьому дослідженні визначення температурних полів у півпросторі зведено до розв'язання лише рекурентнoго нелінійного алгебричного рівняння відносно значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на обмежувальній поверхні.

1. **Формулювання задачі**. Розглянемо, як і в праці [2], півпростір, який займає область $\tilde z \ge 0$, має початкову температуру $t_0 T_0(\tilde z)$, нагрівається шляхом конвективного теплообміну зі середовищем зі змінною у часі температурою $t_c T_c(\tau)$ і тепловим потоком густиною $q_0 q(T,\tau)$. Крім того, у півпросторі діють внутрішні джерела тепла густиною $W_0 W(T,\tilde z,\tau)$. Одночасно з обмежувальної поверхні відводиться тепловий потік власного випромінювання згідно зі законом Стефана–Больцмана. Визначимо одновимірне нестаціонарне температурне поле півпростору з урахуванням температурних залежностей коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t(T) = \lambda_0 \Lambda(T)$, об'ємної теплоємності $c_v(T) = c_0 C(T)$, коефіцієнта тепловіддачі $\alpha(T) = \alpha_0 \alpha_*(T)$ і ступеня чорноти поверхні півпростору $\varepsilon(T) = \varepsilon_0 \varepsilon_*(T)$. Тут множники біля функцій мають розмірності відповідних величин.

За таких припущень нелінійна задача теплопровідності у безрозмірних величинах матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\bar\Lambda(\bar T)\frac{\partial \bar T}{\partial z}\right] = \bar C(\bar T)\frac{\partial \bar T}{\partial \mathrm{Fo}} - \mathrm{Po}\,\bar W(\bar T, z, \mathrm{Fo}) , \tag{1}$$

$$\left.\left(\bar\Lambda(\bar T)\frac{\partial \bar T}{\partial z} - \mathrm{Bi}\,\bar\alpha(\bar T)[\bar T - \bar t_c \bar T_c(\mathrm{Fo})] - \mathrm{Sk}\,\bar\varepsilon(\bar T)\bar T^4 + \mathrm{Ki}\,\bar q(\bar T,\mathrm{Fo})\right)\right|_{z=0} = 0 , \tag{2}$$

$$\left.\bar T\right|_{z\to\infty} < \infty , \tag{3}$$

✉ dept19@iapmm.lviv.ua

$$\bar{T}\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = \bar{t}_0 \bar{T}_0(z)\,, \tag{4}$$

де

$$\bar{T} = \frac{T}{T_s}\,,\quad z = \frac{\tilde{z}}{\ell}\,,\quad \mathrm{Fo} = \frac{a_0\tau}{\ell^2}\,,\quad a_0 = \frac{\lambda_0}{c_0}\,,\quad \mathrm{Bi} = \frac{\ell\alpha_0}{\lambda_0}\,,$$

$$\mathrm{Sk} = \frac{\ell\varepsilon_0\sigma_0}{\lambda_0}T_s^3\,,\quad \mathrm{Ki} = \frac{\ell q_0}{\lambda_0 T_s}\,,\quad \mathrm{Po} = \frac{\ell^2 W_0}{\lambda_0 T_s}\,,\quad \bar{t}_0 = \frac{t_0}{T_s}\,,\quad \bar{t}_c = \frac{t_c}{T_s}\,,$$

$$\bar{T}_0(z) = T_0(z\ell)\,,\quad \bar{T}_c(\mathrm{Fo}) = T_c\left(\frac{\ell^2\mathrm{Fo}}{a_0}\right),$$

$$[\bar{\Lambda}(\bar{T}), \bar{C}(\bar{T}), \bar{\alpha}(\bar{T}), \bar{\varepsilon}(\bar{T})] = [\Lambda(T), C(T), \alpha_*(T), \varepsilon_*(T)]\Big|_{T=T_s\bar{T}}\,,$$

$$\bar{q}(\bar{T},\mathrm{Fo}) = q\left(T_s\bar{T}, \frac{\ell^2\mathrm{Fo}}{a_0}\right),\quad \bar{W}(\bar{T},z,\mathrm{Fo}) = W\left(T_s\bar{T}, z\ell, \frac{\ell^2\mathrm{Fo}}{a_0}\right),$$

σ_0 – стала Стефана–Больцмана, T_s – характерна для задачі температура, ℓ – параметр, який має розмірність довжини.

2. **Побудова розв'язку задачі**. Застосовуючи перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int\limits_{\bar{T}^*}^{\bar{T}} \bar{\Lambda}(\bar{T})d\bar{T}$$

за припущення, що існує функція $\bar{T} = \bar{T}(\theta)$, обернена до $\theta = \theta(\bar{T})$, задачу (1)–(4) зводимо до такої:

$$\frac{\partial^2\theta(z,\mathrm{Fo})}{\partial z^2} = \frac{\partial\theta(z,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} - w^t(z,\mathrm{Fo})\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z=0} = f(\mathrm{Fo})\,, \tag{6}$$

$$\theta\Big|_{z\to\infty} < \infty\,, \tag{7}$$

$$\theta\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = \theta_0(z)\,, \tag{8}$$

де

$$w^t(z,\mathrm{Fo}) = \left[\bar{a}(\bar{T}(\theta)) - 1\right]\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \mathrm{Po}\,\bar{a}(\bar{T}(\theta))\bar{W}(\bar{T}(\theta),z,\mathrm{Fo})\,,$$

$$\bar{a}(\bar{T}(\theta)) = \frac{\bar{\Lambda}(\bar{T}(\theta))}{\bar{C}(\bar{T}(\theta))}\,,$$

$$f(\mathrm{Fo}) = \{\mathrm{Bi}\,\bar{\alpha}(\bar{T}(\theta))[\bar{T}(\theta) - \bar{t}_c\bar{T}_c(\mathrm{Fo})] +$$
$$+ \mathrm{Sk}\,\bar{\varepsilon}(\bar{T}(\theta))\bar{T}^4(\theta) - \mathrm{Ki}\,\bar{q}(\bar{T}(\theta),\mathrm{Fo})\}\Big|_{z=0}\,,$$

$$\theta_0(z) = \int\limits_{\bar{T}_*}^{\bar{t}_0\bar{T}_0(z)} \bar{\Lambda}(\bar{T})\,d\bar{T}\,,$$

$\bar{T}_* = \dfrac{T_*}{T_s}$, T_* – нижня межа діапазону температур, у якому змінюються теплофізичні характеристики (ТФХ).

З використанням функції Ґріна розв'язок задачі (5)–(8) подамо в інтегральній формі у вигляді

$$\theta(z,\mathrm{Fo}) = \vartheta_0(z,\mathrm{Fo}) - \vartheta_f(z,\mathrm{Fo}) + \vartheta_w(z,\mathrm{Fo}). \tag{9}$$

Тут

$$\vartheta_0(z,\mathrm{Fo}) = \int_0^\infty \theta_0(\zeta) G(z,\zeta,\mathrm{Fo})\, d\zeta\,; \tag{10}$$

$$\vartheta_f(z,\mathrm{Fo}) = \int_0^{\mathrm{Fo}} f(\xi) G(z,0,\mathrm{Fo}-\xi)\, d\xi\,; \tag{11}$$

$$\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}) = \int_0^{\mathrm{Fo}} \int_0^\infty w^t(\zeta,\xi) G(z,\zeta,\mathrm{Fo}-\xi)\, d\zeta\, d\xi\,; \tag{12}$$

функція Ґріна

$$G(z,\zeta,\mathrm{Fo}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}}\left[\exp\left(-\frac{(\zeta+z)^2}{4\mathrm{Fo}}\right) + \exp\left(-\frac{(\zeta-z)^2}{4\mathrm{Fo}}\right)\right]$$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{\partial G}{\partial \mathrm{Fo}},$$

граничні

$$\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad G\big|_{z\to\infty} = 0$$

і початкову умови

$$G\big|_{\mathrm{Fo}=0} = \delta(z-\zeta)\,;$$

$\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

Для визначення $\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}_q)$ заміняємо у співвідношенні (12) верхню межу невласного інтеграла деяким числом b, яке вибираємо (шляхом числового експерименту) так, щоб в кінці часового інтервалу $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}^*$ виконувалась умова $\overline{T}(b,\mathrm{Fo}^*) \approx \overline{t}_0 \overline{T}_0(b)$. Отриманий інтеграл записуємо як суму інтегралів від z_{j-1} до z_j, $j = 1,2,\ldots,J$, $0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_J = b$, у кожному з яких $w^t(\zeta,\xi)$ заміняємо на $w_j^t(\xi)$ відповідно, де $w_j^t(\xi) \approx w^t(z_j^*,\xi)$, $z_j^* = \dfrac{z_{j-1}+z_j}{2}$. Після цього отримуємо:

$$\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}_q) = \sum_{j=1}^{J}\left[\int_0^{\mathrm{Fo}_{q-1}} w_j^t(\xi)\chi_j(z,\mathrm{Fo}_q-\xi)d\xi + \int_{\mathrm{Fo}_{q-1}}^{\mathrm{Fo}_q} w_j^t(\xi)\chi_j(z,\mathrm{Fo}_q-\xi)d\xi\right], \tag{13}$$

де

$$\chi_j(z,\eta) = \int_{z_{j-1}}^{z_j} G(z,\zeta,\eta)d\zeta = \frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{z_j+z}{2\sqrt{\eta}}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{z_j-z}{2\sqrt{\eta}}\right) -\right.$$

$$-\mathrm{erf}\left(\frac{z_{j-1}+z}{2\sqrt{\eta}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{z_{j-1}-z}{2\sqrt{\eta}}\right)\Bigg].$$

У першому інтегралі (13), вважаючи, що відомі значення $w_j^t(\mathrm{Fo}_k)$, $k=0,1,\ldots,q-1$, підінтегральну функцію $w_j^t(\xi)$ апроксимуємо на проміжку $\left[0,\mathrm{Fo}_{q-1}\right]$ лінійним сплайном, а в другому приймаємо $w_j^t(\xi)\approx w_j^t(\mathrm{Fo}_{q-1})$.

Лінійним сплайном апроксимуємо також підінтегральну функцію $f(\xi)$ у співвідношенні (11), але на проміжку $[0,\mathrm{Fo}_q]$. При цьому для апроксимацій використовуємо таке подання:

$$\chi_\eta(\mathrm{Fo})\approx s_{\eta,1}^{(1)}\,\mathrm{Fo}+s_{\eta,1}^{(0)}+$$

$$+\sum_{p=1}^{K-1}(s_{\eta,p+1}^{(1)}\,\mathrm{Fo}+s_{\eta,p+1}^{(0)}-s_{\eta,p}^{(1)}\,\mathrm{Fo}-s_{\eta,p}^{(0)})S(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\,, \qquad (14)$$

де $\eta=j,f$;

$$s_{\eta,q}^{(1)}=\frac{\chi_\eta(\mathrm{Fo}_q)-\chi_\eta(\mathrm{Fo}_{q-1})}{\mathrm{Fo}_1}\,,\quad s_{\eta,q}^{(0)}=\frac{\chi_\eta(\mathrm{Fo}_{q-1})\,\mathrm{Fo}_q-\chi_\eta(\mathrm{Fo}_q)\,\mathrm{Fo}_{q-1}}{\mathrm{Fo}_1}\,,$$

$\chi_j(\mathrm{Fo})=w_j^t(\mathrm{Fo})$, $\chi_f(\mathrm{Fo})=f(\mathrm{Fo})$; $\mathrm{Fo}_q=q\,\mathrm{Fo}_1$, $q=0,1,\ldots,K$; $K+1$ – кількість вузлів сплайна; $\mathrm{Fo}_1=a_0\Delta\tau/l^2$ і $\Delta\tau$ – відповідно без- і розмірний крок сітки; $S(\cdot)$ – функція Гевісайда.

Обчисливши з використанням апроксимацій (14) інтеграли (11) і (12), одержимо:

$$\vartheta_f(z,\mathrm{Fo}_q)=f_q[\psi(z)-z]+\Psi_q(z)\,, \qquad (15)$$

$$\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}_q)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\left[\bar\vartheta_{j,q-1}(z,\mathrm{Fo}_q)-w_{j,q-1}^t\bar H_j(z,0)\right], \qquad (16)$$

де

$$\Psi_1(z)=-f_0[H(z,\mathrm{Fo}_1)+\psi(z)]\,,$$

$$\Psi_q(z)=-f_{q-1}\psi(z)+s_{f,1}^{(1)}R(z,\mathrm{Fo}_q)-s_{f,q-1}^{(1)}R(z,\mathrm{Fo}_1)+$$

$$+\sum_{p=1}^{q-2}\frac{f_{p+1}-2f_p+f_{p-1}}{\mathrm{Fo}_1}R(z,\mathrm{Fo}_q-\mathrm{Fo}_p)-f_0H(z,\mathrm{Fo}_q)\,,q=2,3,\ldots,K\,;$$

$$\bar\vartheta_{j,0}(z,\mathrm{Fo}_q)=0\,;$$

$$\bar\vartheta_{j,q-1}(z,\mathrm{Fo}_q)=w_{j,0}^t\bar H_j(z,\mathrm{Fo}_q)-s_{j,q-1}^{(1)}\bar R_j(z,\mathrm{Fo}_1)+s_{j,1}^{(1)}\bar R_j(z,\mathrm{Fo}_q)+$$

$$+\sum_{p=1}^{q-2}\frac{w_{j,p+1}^t-2w_{j,p}^t+w_{j,p-1}^t}{\mathrm{Fo}_1}\bar R_j(z,\mathrm{Fo}_q-\mathrm{Fo}_p)\,,\quad q=2,3,\ldots,K\,;$$

$$\psi(z)=\frac{R(z,\mathrm{Fo}_1)-z^3/6}{\mathrm{Fo}_1}\,;$$

$$H(z,\eta)=-2\exp(-X^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta}-z\,\mathrm{erf}(X)\,,$$

$$R(z,\eta) = z\left(\eta + \frac{1}{6}z^2\right)\mathrm{erf}(X) + \frac{1}{3}(4\eta + z^2)\exp(-X^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta}\,,$$

$$\bar{H}_j(z,\eta) = U(z,z_j,\eta) + U(-z,z_j,\eta) - U(z,z_{j-1},\eta) - U(-z,z_{j-1},\eta)\,,$$

$$\bar{R}_j(z,\eta) = V(z,z_j,\eta) + V(-z,z_j,\eta) - V(z,z_{j-1},\eta) - V(-z,z_{j-1},\eta)\,,$$

$$U(z,\zeta,\eta) = \left(\eta + \frac{1}{2}Z^2\right)\mathrm{erf}(Y) + Z\exp(-Y^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta}\,,$$

$$V(z,\zeta,\eta) = \left(\frac{\eta^2 + \eta Z^2}{2} + \frac{Z^4}{24}\right)\mathrm{erf}(Y) + \frac{1}{12}Z(10\eta + Z^2)\exp(-Y^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta}\,,$$

$$2\bar{H}_j(z,0) = (z_j + z)^2 + (z_j - z)^2 L_j(z) - (z_{j-1} + z)^2 - (z_{j-1} - z)^2 L_{j-1}(z)\,,$$

$$X = \frac{z}{2\sqrt{\eta}}, \qquad Y = \frac{Z}{2\sqrt{\eta}}, \qquad Z = z + \zeta\,;$$

$$w_{j,p}^t = w_j^t(\mathrm{Fo}_p)\,, \quad f_q = f(\mathrm{Fo}_q)\,.$$

Застосовуючи метод колокацій, із (9) з урахуванням (15) і (16) отримуємо рекурентне нелінійне алгебричне рівняння для знаходження значень $\theta_q = \theta(0,\mathrm{Fo}_q)$ у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на поверхні $z = 0$:

$$\theta_q + f_q\psi_0 = \vartheta_w(0,\mathrm{Fo}_q) + \vartheta_0(0,\mathrm{Fo}_q) - \Psi_{0q}\,, \qquad q = 1,2,\ldots,K\,, \tag{17}$$

де

$$\Psi_{01} = \frac{1}{2}\psi_0 f_0, \qquad \psi_0 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\mathrm{Fo}_1}{\pi}}\,,$$

$$\Psi_{0q} = \psi_0\Bigg\{-2f_{q-1} + f_{q-2} + [qf_1 + f_0(1.5 - q)]\sqrt{q} + $$
$$+ \sum_{p=1}^{q-2}(f_{p+1} - 2f_p + f_{p-1})(q-p)^{3/2}\Bigg\}, \quad q = 2,3,\ldots,K\,.$$

Необхідні для визначення $\vartheta_w(0,\mathrm{Fo}_q)$ значення $w_{j,q-1}^t$ ($q = 1,2,...,K$) обчислюємо за формулами

$$w_{j,0}^t = \left[\bar{a}(\bar{t}_0\bar{T}_0(z_j^*)) - 1\right]\theta_0''(z_j^*) + \mathrm{Po}\,\bar{a}(\bar{t}_0\bar{T}_0(z_j^*))\bar{W}(\bar{t}_0\bar{T}_0(z_j^*), z_j^*, 0)\,;$$

$$w_{j,q-1}^t = \Big\{\left[\bar{a}(\bar{T}(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1})) - 1\right]\times$$
$$\times\left[\vartheta_0''(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1}) - \vartheta_f''(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1}) + \vartheta_w''(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1})\right] +$$
$$+ \mathrm{Po}\,\bar{a}(\bar{T}(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1}))\bar{W}(\bar{T}(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1}), z_j^*, \mathrm{Fo}_{q-1})\Big\}, \qquad q = 2,3,...,K\,,$$

де

$$\vartheta_f''(z,\mathrm{Fo}_k) = f_k\psi''(z) + \Psi_k''(z)\,, \quad k = 1,2,\ldots,K-1\,;$$

$$\psi''(z) = \frac{R''(z,\mathrm{Fo}_1) - z}{\mathrm{Fo}_1}\,;$$

$$\Psi_1''(z) = -f_0[H''(z,\mathrm{Fo}_1) + \psi''(z)];$$

$$\Psi_k''(z) = -f_{k-1}\psi''(z) + s_{f,1}^{(1)}R''(z,\mathrm{Fo}_k) - s_{f,k-1}^{(1)}R''(z,\mathrm{Fo}_1) +$$

$$+\sum_{p=1}^{k-2}\frac{f_{p+1}-2f_p+f_{p-1}}{\mathrm{Fo}_1}R''(z,\mathrm{Fo}_k-\mathrm{Fo}_p) - f_0H''(z,\mathrm{Fo}_k), \quad k=2,3,\ldots,K-1;$$

$$H''(z,\eta) = -\frac{1}{\sqrt{\pi\eta}}\exp(-X^2),$$

$$R''(z,\eta) = 2\exp(-X^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta} + z\,\mathrm{erf}(X);$$

$$\vartheta_w''(z,\mathrm{Fo}_k) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\left[\bar\vartheta_{j,k-1}''(z,\mathrm{Fo}_k) - w_{j,k-1}^t\bar H_j''(z,0)\right], \quad k=1,2,\ldots,K-1;$$

$$\bar\vartheta_{j,0}''(z,\mathrm{Fo}_1) = 0;$$

$$\bar\vartheta_{j,k-1}''(z,\mathrm{Fo}_k) = w_{j,0}^t\bar H_j''(z,\mathrm{Fo}_k) -$$

$$-s_{j,k-1}^{(1)}\bar R_j''(z,\mathrm{Fo}_1) + \sum_{p=1}^{k-2}\frac{w_{j,p+1}^t-2w_{j,p}^t+w_{j,p-1}^t}{\mathrm{Fo}_1}\bar R_j''(z,\mathrm{Fo}_k-\mathrm{Fo}_p) +$$

$$+s_{j,1}^{(1)}\bar R_j''(z,\mathrm{Fo}_k), \quad k=2,3,\ldots,K-1;$$

$$\bar H_j''(z,\mathrm{Fo}) = 2\chi_j(z,\eta), \qquad \bar R_j''(z,\eta) = \bar H_j(z,\eta); \quad \bar H_j''(z,0) = L_j(z) - L_{j-1}(z);$$

$$L_j(z) = \mathrm{sgn}(z_j - z).$$

Розв'язавши рівняння (17), знайдемо f_q, а на основі (15) і (16) – $\vartheta_f(z,\mathrm{Fo}_q)$ і $\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}_q)$ ($q=1,2,\ldots,K$). Скориставшись після цього виразом (9), матимемо значення $\theta(z,\mathrm{Fo}_q)$.

Якщо матеріал плити з простою нелінійністю ($\bar a(\bar T(z,\mathrm{Fo}))\approx 1$), тоді знаходження температурного поля зводимо також до розв'язання рівняння (17), але тепер

$$w_{j,0}^t = \mathrm{Po}\,\bar W(\bar t_0\bar T_0(z_j^*), z_j^*, 0);$$

$$w_{j,q-1}^t = \mathrm{Po}\,\bar W(\bar T(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1}), z_j^*, \mathrm{Fo}_{q-1}), \quad q=2,3,\ldots,K.$$

За врахування в задачі (1)–(4) температурної залежності тільки коефіцієнтів теплопровідності і температуропровідності замість (9) отримаємо інтегральне подання

$$\theta(z,\mathrm{Fo}) = \vartheta_0(z,\mathrm{Fo}) + T_L(z,\mathrm{Fo}) + \vartheta_w(z,\mathrm{Fo}) - \vartheta_f(z,\mathrm{Fo}) + \mathrm{Po}\,T_w(z,\mathrm{Fo}) \tag{18}$$

з такими новими позначеннями:

$$T_L(z,\mathrm{Fo}) = \int_0^{\mathrm{Fo}}\bar T_{c0}^*(\xi)G(z,0,\mathrm{Fo}-\xi)\,d\xi,$$

$$\bar T_{c0}^*(\mathrm{Fo}) = \mathrm{Bi}\,\bar t_{c0}\bar T_{c0}(\mathrm{Fo}) + \mathrm{Ki}\,\bar q(\mathrm{Fo}); \tag{19}$$

$$T_w(z,\mathrm{Fo}) = \int_0^{\mathrm{Fo}}\int_0^{\infty}\bar W(\zeta,\xi)G(z,\zeta,\mathrm{Fo}-\xi)\,d\zeta\,d\xi. \tag{20}$$

При цьому, як і раніше, $\vartheta_0(z,\mathrm{Fo})$ визначаємо за формулою (10), а $\vartheta_f(z,\mathrm{Fo}_q)$ і $\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}_q)$ – за формулами (15), (16) при

$$f(\mathrm{Fo}) = \mathrm{Bi}\,\overline{T}(\theta(0,\mathrm{Fo})) + \mathrm{Sk}\,\overline{T}^4(\theta(0,\mathrm{Fo}))\,;$$

$$w_{j,0}^t = \left[\overline{a}(\overline{t}_0\overline{T}_0(z_j^*)) - 1\right]\theta_0''(z_j^*)\,;$$

$$w_{j,q-1}^t = \left[\overline{a}(\overline{T}(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1})) - 1\right]\times$$

$$\times\left[\vartheta_0''(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1}) + \vartheta_w''(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1}) - \vartheta_f''(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1}) - \vartheta_c''(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1})\right],$$

$$q = 2,3,\ldots,K\,.$$

Рекурентне нелінійне алгебричне рівняння для знаходження значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на поверхні $z = 0$ набуде вигляду

$$\theta_q + f_q\psi_0 = \vartheta_w(0,\mathrm{Fo}_q) + \vartheta_0(0,\mathrm{Fo}_q) -$$

$$-\Psi_{0q} + T_L(0,\mathrm{Fo}_q) + \mathrm{Po}\,T_w(0,\mathrm{Fo}_q) = 0\,. \tag{21}$$

За простої нелінійності з (21) отримуємо таке рівняння для знаходження θ_q:

$$\theta_q + f_q\psi_0 = \vartheta_0(0,\mathrm{Fo}_q) - \Psi_{0q} + T_L(0,\mathrm{Fo}_q) + \mathrm{Po}\,T_w(0,\mathrm{Fo}_q) = 0\,.$$

За врахування температурної залежності лише густини джерела тепла з (1)–(4) отримаємо:

$$\overline{T}(z,\mathrm{Fo}) = \overline{t}_0 T_0^*(z,\mathrm{Fo}) + T_L(z,\mathrm{Fo}) - \mathrm{Sk}\,\vartheta_f(z,\mathrm{Fo}) + \mathrm{Po}\,\vartheta_w(z,\mathrm{Fo})\,,$$

де

$$T_0^*(z,\mathrm{Fo}) = \int_0^{z_1}\overline{T}_0(\zeta)G(z,\zeta,\mathrm{Fo})d\zeta\,, \tag{22}$$

$T_L(z,\mathrm{Fo})$ визначаємо за формулою (19), $\vartheta_f(z,\mathrm{Fo})$ і $\vartheta_w(z,\mathrm{Fo})$ – за формулами (15), (16). При цьому

$$f(\mathrm{Fo}) = \overline{T}^4(0,\mathrm{Fo})\,,\quad w_{j,0}^t = \overline{W}(\overline{t}_0\overline{T}_0(z_j^*),z_j^*,0)\,;$$

$$w_{j,q-1}^t = \overline{W}(\overline{T}(z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1}),z_j^*,\mathrm{Fo}_{q-1})\,,\quad q = 2,3,\ldots,K\,.$$

Значення $\overline{T}_q = \overline{T}(0,\mathrm{Fo}_q)$ знаходимо з рівняння

$$\overline{T}_q + \mathrm{Sk}\,f_q[\overline{\beta}_1(0,0,0) - \psi_0(0,0)] + \Psi_{fq}(0,0) -$$

$$-\mathrm{Po}\,\vartheta_w(0,\mathrm{Fo}_q) - \overline{t}_0 T_0^*(0,\mathrm{Fo}_q) - T_L(0,\mathrm{Fo}_q) + \overline{t}_{c1}T_{c1}^*(0,\mathrm{Fo}_q) = 0\,.$$

За нехтування температурною залежністю ТФХ, густин теплових потоків і джерела тепла інтегральне подання розв'язку відповідної задачі матиме вигляд

$$\overline{T}(z,\mathrm{Fo}) = \overline{t}_0 T_0^*(z,\mathrm{Fo}) + T_L(z,\mathrm{Fo}) - \mathrm{Sk}\,\vartheta_f(z,\mathrm{Fo}) + \mathrm{Po}\,T_w(z,\mathrm{Fo})\,, \tag{23}$$

де $T_0^*(z,\mathrm{Fo})$, $T_L(z,\mathrm{Fo})$ і $T_w(z,\mathrm{Fo})$ визначають формули (22), (19) і (20) відповідно, а $\vartheta_f(z,\mathrm{Fo}_q)$ – формула (15) при $f(\mathrm{Fo}) = \overline{T}^4(0,\mathrm{Fo})$.

Рівняння для знаходження температур $\overline{T}_{0q}$ таке:

$$\overline{T}_{0q} + \mathrm{Sk}\, f_q \psi_0 = \overline{t}_0 \overline{T}_0^*(0, \mathrm{Fo}_q) - \Psi_{0q} + T_L(0, \mathrm{Fo}_q) + \mathrm{Po}\, T_w(0, \mathrm{Fo}_q) = 0 .$$

3. **Числові результати**. Розглянемо півпростір зі склокераміки [1]. Температурне поле досліджуємо при:

$$\overline{\Lambda}(\overline{T}) = 1 + \beta_\lambda(\overline{T} - \overline{T}_*), \qquad \overline{C}(\overline{T}) = 1 - 0.2683 e^{-11.4(\overline{T} - \overline{T}_*)} ,$$

$$a_0 = 2.9756 \cdot 10^{-7}\ \text{м}^2/\text{с}, \quad \beta_\lambda = 1.18 , \quad \mathrm{Bi} = 8.475 ,$$

$\mathrm{Po} = 0$, $\overline{\alpha}(\overline{T}) = 1$, $\overline{t}_0 = \overline{T}_*$, $\overline{T}_c(\mathrm{Fo}) = \overline{T}_0(z) = 1$, $\overline{\varepsilon}(\overline{T}) = 1$, $\overline{q}(\overline{T}, \mathrm{Fo}) = 1$,
$T_s = t_c + q_0/\alpha_0 = 6000$ К, $\ell = 0.022$ м. $T_* = 300$ К, $J = 4$, $\Delta\tau = 0.125$ с, $f_0 = 0$.

Значення θ_q знаходимо з рівняння (21) з урахуванням

$$\vartheta_0(z, \mathrm{Fo}) = 0 , \quad \overline{T}_L(z, \mathrm{Fo}) = \mathrm{Bi}\left[2\sqrt{\frac{\mathrm{Fo}}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\mathrm{Fo}}\right) - z\, \mathrm{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\right].$$

За відомою змінною Кірхгофа температуру визначаємо за формулою

$$\overline{T}(\theta) = \overline{T}_* + \frac{\sqrt{1 + 2\beta_\lambda \theta} - 1}{\beta_\lambda} .$$

Таблиця 1

z, мм \ τ, с	2	10	50	125	200	300	500
0	0.2587 0.2587	0.3388 0.3388	0.3704 0.3708	0.3782 0.3785	0.3810 0.3811	0.3829 0.3830	0.3847 0.3848
0.34375	0.1968 0.1968	0.3075 0.3075	0.3570 0.3576	0.3698 0.3701	0.3744 0.3746	0.3775 0.3776	0.3805 0.3806
0.6875	0.1461 0.1461	0.2767 0.2767	0.3435 0.3443	0.3613 0.3617	0.3677 0.3680	0.3721 0.3722	0.3763 0.3764
1.03125	0.1082 0.1082	0.2472 0.2471	0.3300 0.3310	0.3528 0.3533	0.3611 0.3613	0.3666 0.3668	0.3721 0.3722
1.375	0.0826 0.0826	0.2194 0.2193	0.3164 0.3176	0.3443 0.3449	0.3544 0.3546	0.3612 0.3614	0.3678 0.3679
1.71875	0.0669 0.0669	0.1937 0.1937	0.3030 0.3042	0.3358 0.3364	0.3477 0.3479	0.3558 0.3559	0.3636 0.3637
2.0625	0.0582 0.0582	0.1707 0.1706	0.2897 0.2910	0.3273 0.3279	0.3410 0.3412	0.3503 0.3504	0.3593 0.3595
2.40625	0.0538 0.0538	0.1503 0.1502	0.2765 0.2779	0.3189 0.3194	0.3344 0.3345	0.3449 0.3450	0.3551 0.3552
2.75	0.0518 0.0518	0.1326 0.1325	0.2636 0.2649	0.3105 0.3110	0.3278 0.3279	0.3395 0.3395	0.3509 0.3510
3.09375	0.0509 0.0509	0.1177 0.1175	0.2510 0.2522	0.3022 0.3025	0.3212 0.3211	0.3341 0.3340	0.3466 0.3467
3.4375	0.0506 0.0506	0.1052 0.1050	0.2387 0.2397	0.2940 0.2942	0.3146 0.3145	0.3287 0.3285	0.3424 0.3424
3.78125	0.0505 0.0505	0.0949 0.0947	0.2267 0.2276	0.2858 0.2858	0.3081 0.3078	0.3233 0.3231	0.3382 0.3382
4.125	0.0505 0.0505	0.0865 0.0863	0.2151 0.2158	0.2778 0.2776	0.3016 0.3012	0.3180 0.3176	0.3340 0.3339
4.46875	0.0504 0.0504	0.0797 0.0793	0.2040 0.2044	0.2698 0.2694	0.2952 0.2946	0.3127 0.3122	0.3298 0.3296
4.8125	0.0504 0.0504	0.0740 0.0736	0.1933 0.1934	0.2620 0.2613	0.2889 0.2880	0.3074 0.3067	0.3256 0.3254

5.15625	0.0504 0.0504	0.0692 0.0687	0.1832 0.1828	0.2544 0.2534	0.2826 0.2815	0.3021 0.3013	0.3214 0.3211
5.5	0.0502 0.0502	0.0651 0.0644	0.1735 0.1727	0.2469 0.2455	0.2764 0.2750	0.2969 0.2959	0.3172 0.3168

У таблиці наведено безрозмірні температури поверхонь (близьких до обмежувальної) у вибрані моменти часу, підраховані на основі розв'язків, отриманих відповідно за запропонованою методикою (перший рядок) і, для порівняння, – за методикою [2] (другий рядок). Максимальна різниця їх значень 0.0014 (8.4 градуси) вказує на достатньо високу для практики точність результатів. Зазначимо, що для малих часів відповідні температури співпадають.

Висновки. З використанням перетворення Кірхгофа, функції Ґріна, узагальнених функцій і лінійних сплайнів нелінійні нестаціонарні задачі теплопровідності для півпростору зведено до розв'язання відповідних нелінійних рекурентних алгебричних рівнянь відносно значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на обмежувальній поверхні. Порівняння температур, підрахованих за цією і раніше запропонованою методиками, засвідчило, що максимальна їх різниця складає менше дев'яти градусів.

1. *Белик В. Д., Урюков Б. А., Фролов Г. А., Ткаченко Г. В.* Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 2008. – 81, № 6. – С. 1056–1062.
   Те саме: *Belik V. D., Uryukov B. A., Frolov G. A., Tkachenko G. V.* Numerical-analytikal method of solution of a nonlinear unsteady heat-conduction equation // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2008. – 81, No. 6. – P. 1099–1103, https://doi.org/10.1007/s10891-009-0150-8.
2. *Процюк Б. В.* Нестаціонарні нелінійні задачі теплопровідності для півпростору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 4. – С. 156–167

METHOD OF SOLVING NONLINEAR NONSTATIONARY THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEMS FOR HALF-SPACE

The technique of temperature fields determination in a half-space taking into account thermal radiation, temperature dependence of thermophysical characteristics, densities of surface and volumetric heat sources with non-uniform initial temperature distribution is suggested. Using Kirchhoff transform, Green's function, generalized functions and linear splines, heat conduction problems were reduced to solving a recurrent nonlinear algebraic equation with respect to values in the nodes of the spline of the Kirchhoff variable on the bounding surface. The results of numerical researches are provided.

Key words: thermosensitive half-space, thermal radiation, nonstationary temperature field, Kirchhoff transformation, Green's function, generalized functions, linear splines.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.12.20