https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.57-62

УДК 517.922+511.2

Л. І. Комарницька✉

ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ СОБОЛІВСЬКОГО ТИПУ

Розглянуто задачу з періодичними умовами за часовою координатою та умовами 2π-періодичності за просторовими змінними для рівняння n-го порядку, нерозв'язного відносно старшої похідної за часом. Розв'язність задачі пов'язана з проблемою малих знаменників. Розглянуто питання існування та єдиності розв'язку задачі, побудовано явну формулу розв'язку у вигляді ряду за системою ортогональних функцій, виконано метричний аналіз оцінок знизу малих знаменників, що виникли під час побудови розв'язку.

Ключові слова: *рівняння соболівського типу n-го порядку, періодична задача, умови існування і єдиності, функція Ґріна, малі знаменники.*

Серед некласичних крайових задач для рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних важливі задачі з нелокальними умовами, найпростішими серед яких є умови періодичності. Дослідження задач з періодичними умовами для різних типів диференціальних рівнянь із частинними похідними стимулюються як розвитком загальної теорії крайових задач, так і потребами практики. Першою в цьому напрямі була праця Н. А. Артемєва [1]. Для диференціальних рівнянь із частинними похідними гіперболічного і складеного типів періодична за t крайова задача є некоректною, а питання про існування розв'язку пов'язане з проблемою малих знаменників. Позитивні результати тут отримали Б. Й. Пташник та його учні [3, 4, 7, 8]. До вивчення періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними призводять багато задач математичної фізики, що описують коливання різних систем. Наприклад, дослідження поздовжніх коливань стрижнів, вібрації кораблів, розрахунок стійкості валів, що обертаються, тощо [2].

Через проблеми охорони довкілля останнім часом значно зросла зацікавленість до досліджень світового океану і, зокрема, до процесів коливань різної природи в товщі рідини. Диференціальні рівняння, що описують ці процеси, дуже своєрідні, що додатково стимулює їх вивчення. До таких рівнянь відносять відоме рівняння Соболєва:

$$D_t^2 \Delta u + \omega^2 D_{x_3}^2 u = f(t,x), \;\; p = 3.$$

Спорідненим до нього є двовимірний аналог рівняння Соболєва:

$$P_1(D_t) D_{x_1}^2 u + P_2(D_t) D_{x_2}^2 u = 0, \;\; p = 2, \tag{1}$$

де $P_j(D_t) = D_t^l + \sum_{k=0}^{l-1} a_{kj} D_t^k$, $l \in N$, $a_{kj} \in R$. Його вивченню присвячені праці [6, 10], але в них ці некласичні диференціальні рівняння досліджували за методами операційного числення.

Нижче розглянемо узагальнення рівняння (1) для довільної кількості p просторових змінних:

$$P_1(D_t) D_{x_1}^2 u + P_2(D_t) D_{x_2}^2 u + \ldots + P_p(D_t) D_{x_p}^2 u = f(t,x),$$

або

✉ komlesya@gmail.com

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \Delta u + \sum_{\beta=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta \left(a_{\beta 1}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_1^2} + \ldots + a_{\beta p}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_p^2}\right) = f(t,x). \qquad (2)$$

Рівняння (2) належить до рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. В області $D = [0;T]\times\Omega$, $\Omega = \left\{x \in R^p : 0 \le x_r \le 2\pi,\ r = 1,\ldots,p\right\}$ для нього слід встановити умови існування та єдиності розв'язку задачі з умовами

$$\sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{|s|\le 2} A_{\beta,r}^s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\left(\frac{\partial^\beta u(t,x)}{\partial t^\beta}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^\beta u(t,x)}{\partial t^\beta}\bigg|_{t=T}\right) = 0,\ r = 1,2,\ldots,n, \qquad (3)$$

де $a_{\beta 1},\ldots,a_{\beta p}$, $A_{\beta,r}^s \in R$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$ – оператор Лапласа.

За просторовими змінними для функції $u(t,x)$ накладемо умови 2π-періодичності.

Розв'язок задачі (2), (3) шукаємо у просторі $C^{(n,2)}(D)$ функцій $u(t,x)$ з нормою

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n,2)}(D)} = \sum_{\substack{s_0\le n\\ |s|\le 2}} \max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^{s_0+|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|$$

у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t)e^{i(k,x)},$$

де $k = (k_1,\ldots,k_p) \in Z^p$; $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$.

Кожна з функцій $u_k(t), k \in Z^p$, є розв'язком задачі

$$-\|k\|^2 u_k^{(n)}(t) - \sum_{\beta=0}^{n-1}\Theta_\beta u_k^{(\beta)}(t) = f_k(t), \qquad (4)$$

$$\sum_{\beta=0}^{n-1}\xi_{\beta,r}(k)\left(u_k^{(\beta)}(t)\big|_{t=0} - u_k^{(\beta)}(t)\big|_{t=T}\right) = 0,\ r = 1,2,\ldots,n, \qquad (5)$$

де $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}$; $\Theta_\beta(k), \xi_{\beta,r}(k)$ визначають формули

$$\Theta_\beta(k) = a_{\beta 1}k_1^2 + \ldots + a_{\beta p}k_p^2,$$
$$\xi_{\beta,r}(k) = \sum_{|s|\le 2} A_{\beta,r}^s (ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}.$$

Припустимо, що для всіх цілочислових векторів $k \ne 0$ корені $\lambda_j(k)$, $j = 1,2,\ldots,n$, характеристичного рівняння

$$\|k\|^2\lambda^n + \sum_{\beta=0}^{n-1}\Theta_\beta(k)\lambda^\beta = 0 \qquad (6)$$

попарно різні і не дорівнюють нулю.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (2), (3) *у просторі* $C^{(n,2)}(D)$ *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$A(k) \ne 0, \qquad (7)$$

$$1-e^{\lambda_j(k)T}\neq 0,\ j=1,2,\ldots,n,\ \ k\in Z^p\setminus\{0\}, \tag{8}$$

де $A(k)=\det\left\|\xi_{\beta,r}(k)\right\|_{\substack{r=1,\ldots,n\\ \beta=0,\ldots,n-1}}$.

Доведення аналогічне до доведення теореми 3.1 у праці [7] (гл. 2).

Нехай $\lambda_j(k)=a_j(k)+ib_j(k)$. Зауважимо, що умови (8) виконуються тоді і тільки тоді, коли для кожного j, $j=1,2,\ldots,n$, виконується хоча б одна з умов

$$a_j(k)\neq 0,$$

$$b_j(k)T-2\pi d\neq 0,\ d\in Z.$$

Зокрема, якщо всі корені рівняння (6) є дійсними і відмінними від нуля, то розв'язок задачі (2), (3) єдиний. Якщо ж вони є суто уявні, тобто $\lambda_j(k)=ib_j(k)$, то для єдиності розв'язку цієї задачі необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $b_j(k)\neq\dfrac{2\pi d}{T}$, $d\in Z$.

За умови, що розв'язок задачі (2), (3) єдиний, для кожного вектора $k\in Z^p\,/\,\{0\}$ існує функція Ґріна $G_k(t,\tau)$, за допомогою якої розв'язок задачі (4), (5) має вигляд [5]

$$u_k(t)=\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau.$$

У квадраті $K_T=\left\{(t,\tau)\in R_+^2:0\le t\le T, 0\le\tau\le T\right\}$, крім сторін $\tau=0$, $\tau=T$, функції $G_k(t,\tau)$ визначає формула:

$$G_k(t,\tau)=g_k(t,\tau)+\frac{1}{2(n-1)A(k)}\sum_{m,\gamma,\alpha,r=1}^{n}(-1)^{m+n}\sum_{\beta=0}^{n-1}\xi_{\beta,m}(k)\lambda_\gamma^\beta(k)\cdot e^{\lambda_\alpha(k)t-\lambda_\gamma(k)\tau}A_{m,r}(k)\times$$

$$\times S_{n-r}\left[\lambda_\alpha(k)\right](1+e^{\lambda_j(k)T})(1-e^{\lambda_\alpha(k)T})^{-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{n}(\lambda_j(k)-\lambda_\alpha(k))^{-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\gamma}}^{n}(\lambda_j(k)-\lambda_\gamma(k))^{-1},$$

де $A_{m,r}(k)$ – визначник, отриманий з $A(k)$ шляхом викреслювання m-го рядка і r-го стовпця, $S_{n-r}\left[\lambda_\alpha(k)\right]$ – сума всеможливих добутків коренів $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_{\alpha-1}(k),\lambda_{\alpha+1}(k),\ldots,\lambda_n(k)$, взятих у кількості $n-r$ штук, $S_0\left[\lambda_\alpha(k)\right]=1$, функція $g_k(t,\tau)$ має вигляд

$$g_k(t,\tau)=\frac{(-1)^{n-1}\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2}\sum_{\gamma=1}^{n}e^{\lambda_\gamma(k)(t-\tau)}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\gamma}}^{n}(\lambda_j(k)-\lambda_\gamma(k))^{-1}.$$

На стороні $\tau=0$ ($\tau=T$) квадрата K_T функції $G_k(t,\tau)$ доозначують за неперервністю справа (зліва).

Отже, розв'язок задачі (2), (3) формально зобразимо у вигляді ряду

$$u(t,x)=u_0(t)+\sum_{|k|>0}u_k(t)e^{i(k,x)}, \tag{9}$$

де

$$u_k(t)=\int_0^T\Bigg(g_k(t,\tau)+\frac{1}{2(n-1)A(k)}\sum_{m,\gamma,\alpha,r=1}^{n}(-1)^{m+n}\sum_{\beta=0}^{n-1}\xi_{\beta,m}(k)\lambda_\gamma^\beta(k)\cdot e^{\lambda_\alpha(k)t-\lambda_\gamma(k)\tau}A_{m,r}(k)\times$$

$$\left.\times S_{n-r}\,[\lambda_\alpha](1+e^{\lambda_j(k)T})(1-e^{\lambda_\alpha(k)T})^{-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{n}(\lambda_j(k)-\lambda_\alpha(k))^{-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\gamma}}^{n}(\lambda_j(k)-\lambda_\gamma(k))^{-1}\right) f_k(\tau)d\tau.$$

Ряд (9), взагалі кажучи, розбіжний, оскільки вирази $A(k)$, $1-e^{\lambda_\alpha(k)T}$, $\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{n}\left(\lambda_j(k)-\lambda_\alpha(k)\right)$, будучи відмінними від нуля, можуть бути як завгодно малими для нескінченної множини цілочислових векторів k. Тому збіжність ряду (9) пов'язана з проблемою малих знаменників.

Теорема 2. *Нехай існують такі додатні сталі* M_i *і* $\gamma_i \in N$, $i = 1,2,3,$, *що для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in Z^p \setminus \{0\}$ *і довільного* ε, $0<\varepsilon<1/4$, *виконуються нерівності*

$$|A(k)| \geq M_1\,|k|^{-\gamma_1-\varepsilon}, \tag{10}$$

$$\left|1-e^{\lambda_\alpha(k)T}\right| \geq M_2\,|k|^{-\gamma_2-\varepsilon},\ \ \alpha=1,2,\dots,n, \tag{11}$$

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{n}\left|\lambda_j(k)-\lambda_\alpha(k)\right| \geq M_3\,|k|^{-\gamma_3-\varepsilon},\ \ \alpha=1,2,\dots,n. \tag{12}$$

Якщо $f \in C^{(0,\psi)}(D)$, *де* $\psi > 2n+\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_3+5$, *то існує розв'язок задачі* (2), (3) *з простору* $C^{(n,2)}(D)$, *який задає ряд* (9) *і який неперервно залежить від функції* $f(t,x)$.

Розглянемо, за яких умов виконуються нерівності (10)–(12).

Позначимо через $g=(a_{01},\dots a_{0p})$ вектор, компонентами якого є вказані коефіцієнти рівняння (2).

Теорема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі* R^p*) векторів* g *або майже всіх векторів* $(T/\pi, g) \in R^3$, *нерівності* (11) *виконуються, якщо* $\gamma_2 \geq 4$, *для всіх векторів* $k \in Z^p, |k| > K, K = K(T, a_{01},\dots,a_{0p})$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи, що $|\lambda_j(k)| \leq C$, $j=1,\dots,n$, де стала C не залежить від k, отримаємо:

$$\left|1-e^{\lambda_\alpha(k)T}\right| \geq e^{-CT}\left|\sin\left(\frac{b_\alpha(k)T}{\pi}-m_k\right)\pi\right| \geq 2e^{-CT}\left|\frac{b_\alpha(k)T}{\pi}-m_k\right|,$$

де m_k – ціле число, яке задовольняє нерівність

$$\left|\frac{b_\alpha(k)T}{\pi}-m_k\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Якщо $m_k \neq 0$, то далі використовуватимемо схему доведення теореми 4.4 з праці [7] (гл. 2), якщо $m_k = 0$, – то теореми 2.4 [7] (гл. 1), доведення якої наведено у праці [9].

Розглянемо нерівність (10). Визначник $A(k)$ є поліномом степеня $2n$ для змінних $k_1,\dots k_p$, який можна зобразити у вигляді

$$A(k)=\sum_{|r|\le 2n} B_r i^{|r|}k_1^{r_1}\dots k_p^{r_p}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{|r|=2j}\alpha_r k_1^{r_1}\dots k_p^{r_p}+i\sum_{j=1}^{n}\sum_{|r|=2j-1}\beta_r k_1^{r_1}\dots k_p^{r_p}, \quad (13)$$

де $\alpha_r=(-1)^j B_r$, $|r|=2j$, $j=0,1,\dots,n$; $\beta_r=(-1)^{j+1}B_r$, $|r|=2j-1$, $j=1,2,\dots,n$.

Позначимо через $\alpha\in R^{\chi}$, $\beta\in R^{\theta}$ вектори, складені відповідно з коефіцієнтів α_r і β_r полінома (13).

Теорема 4. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі* R^{χ}*) векторів* α *і всіх векторів* β *(або для майже всіх векторів* β *і для всіх векторів* α*) нерівність* (10) *виконується, якщо* $\gamma_1\ge 2$*, для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k\in Z^p$.

Доведення. Зауважимо, що

$$|A(k)|\ge \max\{|\operatorname{Re}A(k)|,|\operatorname{Im}A(k)|\}>0,\ k\in Z^p.$$

Якщо $\operatorname{Re}A(k)$ має вільний член, то доводимо аналогічно, як і теорему 4.4 у [7] (гл. 2); у протилежному випадку доведення випливає з теореми 2.4 [7] (гл. 1).

Перейдемо до нерівності (12). Розглянемо вектор $g=(a_{01},\dots a_{0p})$. Позначимо через y вектор, складений з усіх коефіцієнтів рівняння (2), крім коефіцієнтів $a_{01},\dots a_{0p}$.

Теорема 5. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі* R^p*) векторів* g *і для довільного фіксованого вектора* y *нерівності* (12) *виконуються, якщо* $\gamma_3\ge n-1$*, для таких всіх* $k\in Z^p$*, що* $|k|>K(g)$.

Доводять аналогічно, як і теорему 4.5 у [7] (гл. 2).

Отримані результати можна узагальнити на випадок, коли корені рівняння (6) кратні.

Таким чином, розв'язність розглянутої задачі є нестійкою для коефіцієнтів рівняння та граничних умов і пов'язана з проблемою малих знаменників. Встановлено існування та єдиність розв'язку задачі, побудовано явну формулу розв'язку у вигляді ряду за системою ортогональних функцій, а також проаналізовано оцінки знизу малих знаменників з використанням тверджень та методів метричної теорії чисел, розроблених В. Г. Спринджуком [9].

Результати праці можна застосувати для вивчення конкретних задач практики.

1. *Артемьев Н. А.* Периодические решения одного класса уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – № 1. – С. 15–50.
2. *Вабищевич П. Н.* Нелокальная параболическая задача и обратная задача теплопроводности // Дифференц. уравнения. – 1981. – 17, № 7. – С. 1193–1199.
3. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Нелокальна крайова задача для лінійних рівнянь з частинними похідними, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2007. – 59, № 3. – С. 370–381.
4. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – 58, № 12. – С. 1624–1650.
5. *Наймарк Н. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
6. *Плетнер Ю. Д.* Представление решений двумерных аналогов уравнения Соболева обобщёнными рядами Тейлора и Лорана // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1992. – 32, № 1. – С. 59–70.
7. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 142 с.

8. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
9. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – Москва: Наука, 1977. – 144 с.
10. *Pletner Yu. D.* The properties of the solutions of equations similar to the two-dimensional Sobolev equation // Comp. Math. and Math. Phys. – 1991. – 31, No. 10. – P. 64–73.

PERIODIC PROBLEM FOR SOBOLEV TYPE EQUATION

We consider a problem with periodic conditions in the time coordinate and conditions of 2π-periodicity in space variables for an n-th order equation that is not solvable with respect to the highest time derivative. The solvability of the problem is related to the problem of small denominators. The paper considers the question of the existence and uniqueness of a solution to the problem, constructs an explicit formula for the solution in the form of a series in a system of orthogonal functions, and performs a metric analysis of lower bounds for small denominators that arise in constructing the solution.

Key words: n-th order Sobolev type equation, periodic problem, existence and uniqueness conditions, Green's function, small denominators.

Дрогобицький держ. пед. ун-т
ім. Івана Франка, Дрогобич

Одержано
01.10.21